Política monetaria óptima en la práctica: El caso Argentino

Lucas Consoli, Santiago Dorado, Francisco De Tommaso,
Franco De Luca y Santiago García Dans

Universidad Torcuato Di Tella,
Departamento de Economía - Licenciatura en Economía
Tutor: Emilio Espino

3 de agosto de 2017

Resumen

Estudiamos la política monetaria óptima en un contexto de dominancia fiscal donde la autoridad monetaria se ve obligada a financiar un sendero exógeno de transferencias. Estableciendo que la misma tiene la capacidad de emitir deuda que paga intereses o dinero fiduciario, nuestro modelo ilustra que es óptimo redistribuir en el tiempo el costo de financiación de las transferencias. De esta forma minimiza las distorsiones del impuesto inflacionario. Además demostramos que tanto la tasa de crecimiento de la economía real como el grado de compromiso de la autoridad monetaria a no desviarse de su política inicial impactan en la determinación de la política monetaria óptima. Calibramos el modelo para aplicarlo al caso argentino luego del reciente cambio de régimen monetario.

1. Introducción

El 10 de diciembre de 2015 la asunción del nuevo presidente de la República Argentina marcaría un antes y un después en la política económica nacional. Argentina acumulaba doce años de gobiernos que en materia económica se destacaron por la generación de un sustancial déficit fiscal y la financiación del mismo casi exclusivamente a través de impuesto inflacionario. El 31 de julio de 2014 Argentina cayó en default selectivo al fracasar las negociaciones con el 7 % de los acreedores que no adhirieron a los canjes de deuda tras el default del año 2001. Esto implicó que, de forma definitiva, los mercados de capitales internacionales como fuente de financiamiento dejaron de ser una opción viable. De esta forma, la decisión del gobierno fue utilizar al Banco Central de la República Argentina (BCRA) para cubrir el déficit fiscal con emisión monetaria. Como resultado de esto, la inflación en los últimos años fue del orden del 30 %. El actual gobierno se ha puesto como objetivo bajar la inflación a la vez que se reduce el déficit fiscal. Para esto, resulta evidente la necesidad de conseguir otras formas de financiar al Tesoro en su gradual transición al equilibrio fiscal. En este sentido, una de las primeras medidas tomadas por la administración fue la de retomar las negociaciones con los querellantes. Con el transcurso de los meses Argentina fue llegando a distintos acuerdos con los bonistas y vio cómo progresivamente volvía a tener acceso a los mercados de capitales internacionales a la vez que se daba una reducción en la calificación de riesgo país. Esto le permite al gobierno afrontar la reducción del déficit de forma gradual, financiándose en el corto plazo con deuda externa y ejerciendo menor presión sobre el BCRA.

Este cambio en la política económica genera una excelente oportunidad para evaluar cuál sería la forma eficiente de financiar las transferencias temporales de la autoridad monetaria a la fiscal. Al igual que la economía monetaria que plantearon Sargent y Wallace (1981), el régimen argentino se caracteriza por la Dominancia Fiscal. Es decir, la autoridad fiscal (Tesoro de la Nación) decide el nivel de gasto y el nivel de déficit producto de dicho gasto, y le impone a la autoridad monetaria (Banco Central) un monto que este debe cubrir. A diferencia del modelo expuesto por Sargent y Wallace nuestro trabajo introduce la posibilidad que tiene la entidad monetaria de emitir deuda propia. Es decir, el BCRA debe decidir qué porcentaje de las transferencias financiar con emisión monetaria, monetización, y qué parte cubrir con deuda, por la cual deberá pagar intereses. En otras palabras, el Tesoro decide cuánto debe financiar el Banco Central y dado esto, el organismo solo puede decidir cómo hacerlo.

Así la política monetaria se debate entre la decisión de reducir la tasa de interés que paga su deuda para estimular la demanda de dinero y poder producir recursos del señoreaje, o minimizar el impuesto inflacionario que afecta a los agentes económicos con un mayor endeudamiento que deberá pagar mayores intereses a futuro. Ante tal disyuntiva, a la que podríamos agregar el efecto en la economía real de los movimientos de tasas, se encuentra el gobierno Argentino, siendo criticado por una gran parte de la opinión pública por las altas tasas y nivel de endeudamiento elegido. Nuestra motivación es generar un modelo que nos permita analizar en sentidos monetarios la política óptima que debería seguir el BCRA y poder determinar si el comportamiento observado se inscribe en lo predicho.

Las metas fiscales anunciadas en enero de 2016 dictaban que se alcanzaría el equilibrio fiscal para el año 2019. Sin embargo, en el mes de febrero de 2017 el nuevo Ministro de Hacienda presentó un esquema de metas fiscales más graduales que regirán hasta finalizar el mandato presidencial. Este sendero presentado plantea un objetivo de déficit fiscal primario de 4,2 % en 2017 y una reducción de un punto porcentual por año hasta alcanzar el 2,2 % en 2019. Nosotros basaremos nuestro trabajo en el supuesto de que el Tesoro se comprometerá con dichas metas y que se continuará con la reducción del déficit siguiendo este mismo esquema hasta alcanzar el equilibrio en el año 2022. Dado esto, el país debería verse en un sendero decreciente de déficit, lo que le impondría menor presión al BCRA. A la vez que se reduce el déficit fiscal, se reducirá el monto que el organismo deberá emitir con el único fin de financiar el gasto.

Como ya han estudiado Uribe (2016) y Manuelli y Vizcaino (2017) el problema que enfrenta el Banco Central es similar a aquel propuesto por Sargent and Wallace (1981) en su paper "Unpleasant Monetarist Arithmetic". La principal diferencia entre estos trabajos y el que desarrollaremos a continuación es que nosotros estudiaremos la decisión del Banco Central argentino en un contexto donde se combina el crecimiento económico y la credibilidad del ente como factores fundamentales en el proceso de decisión. A su vez, incorporaremos al análisis en tiempo continuo un sendero de crecimiento económico variable para dar lugar a la intuición de que la economía Argentina se encuentra rezagada en su frontera de producción y existe la posibilidad de un 'catch-up' a su sendero de largo plazo. Además tomaremos los datos disponibles al año 2017 y utilizaremos como base las nuevas metas fiscales. De esta forma, intentaremos que nuestro modelo sea actualizado y que se aproxime en mayor medida a la realidad.

Al igual que los trabajos mencionados, modelamos una autoridad monetaria benevolente que busca maximizar la utilidad de sus agentes controlando la única variable que puede modificar, la tasa de interés que afectará en la demanda de dinero. De esta forma el problema se simplifica a la decisión de la tasa inflacionaria óptima, lo cual se asemeja a la suavización impositiva que desarrolla Barro (1979). Así veremos que la autoridad monetaria debería mantener constante el impuesto inflacionario en el tiempo para financiar parte de las transferencias temporales y luego pagar el servicio de la deuda que incurrirá para paliar el déficit restante. Sin embargo, dicho resultado depende en gran medida de la credibilidad del organismo, ya que una vez que se alcance el equilibrio fiscal el mismo tendrá incentivos a cancelar toda su deuda y no tener que continuar con el pago de sus intereses. De esta manera, generaría un aumento discreto en la base monetaria, pero le permitirá alcanzar un nivel de cero inflación de allí en adelante.

Como destaca Uribe (2016) la intuición detrás de este resultado es que suavizar la distorsión generada por el impuesto inflacionario es óptimo para el bienestar. Dado esto, el BCRA decidirá un nivel constante de inflación sujeto a la restricción de que el valor presente del señoreaje que genere sea suficiente para cubrir las necesidades fiscales a futuro. Así el nivel óptimo de inflación estará determinado en mayor medida por el nivel promedio de déficit que deba financiar a futuro, y no tanto por el nivel actual. En este sentido, si el nivel deficitario actual es mayor al que se espera en el futuro resultará óptimo que el BCRA emita deuda. Si bien esta alternativa implicará una mayor inflación en el largo plazo, permitirá la suavización de la misma. En este punto, el crecimiento esperado de la economía tendrá un rol preponderante ya que supondremos que las metas deficitarias están basadas en un crecimiento constante del 3 % y cualquier desviación de tal sendero modificará el déficit resultante y el valor presente de las transferencias que debe financiar la autoridad monetaria. De esta forma, el crecimiento afectará al impuesto inflacionario óptimo y al sendero de endeudamiento derivado por dos canales diferentes. Primero, generará diferentes niveles de transferencias a financiar y, por el otro, afectará la tasa de interés real de equilibrio. Con nuestro trabajo buscamos abarcar la mayor cantidad de posibles escenarios para poder enmarcar la discusión actual en un modelo comprensivo.

2. Modelo

Analizamos una economía simple, extendiendo el marco analítico de Manuelli & Vizcaino (2017) con crecimiento variable. Nos enfrentamos a un modelo en donde el producto (ingreso), y, ahora es afectado por una tasa de crecimiento, denominada g. Analizaremos el rol de la autoridad monetaria frente a un sendero deficitario preestablecido por la autoridad fiscal, quien demanda transferencias x_t.

2.1. Problema del consumidor

Asumimos la existencia de un agente representativo con preferencias sobre consumo y balances reales de dinero separables dadas por la función de utilidad

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t}[u(\tilde{c}_t) + v(\tilde{m}_t)]dt \tag{1}$$

Donde $\tilde{c}_t$ y $\tilde{m}_t$ son el consumo y los balances reales de dinero, ambos descontados por crecimiento en el tiempo t.

Las funciones u y v son las típicas funciones con elasticidad de sustitución intertemporal constante:

$$v(\tilde{m}_t) = \frac{(\tilde{m}_t y_t)^{1-\sigma} z}{1-\sigma} \qquad u(\tilde{c}_t) = \frac{(\tilde{c}_t y_t + \alpha y_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Además, la Restricción Presupuestaria de los hogares es:

$$\dot{M}_t + \dot{B}_t^T + \dot{B}_t^M = i_t(B_t^T + B_t^M) + P_t y e^{gt} - P_t c_t - P_t \tau_t \tag{2}$$

Donde $B_t^T + B_t^M = B_t$ y $\dot{B}_t^T + \dot{B}_t^M = \dot{B}_t$

Los agentes ganan un interés nominal a tasa i de su stock de bonos B, tanto del tesoro como de la autoridad monetaria además de su ingreso y, el cual gastan en consumo c e impuestos τ. Con lo ya mencionado podemos proceder a establecer la relación entre los balances reales de dinero, el consumo, y la tasa nominal de interés, expresando (2) en términos reales [1]:

$$\dot{m}_t + m_t \pi_t + \dot{b}_t + b_t \pi_t = i_t b_t + y e^{gt} - c_t - \tau_t \tag{3}$$

El próximo paso es corregir por la tendencia de crecimiento o "de-trend"la serie. De esta forma obtenemos una restricción donde se muestra que los saldos reales normalizados son afectados tanto por el cambio de precios como por cambios en la tasa de crecimiento de la economía[2]:

$$\dot{\tilde{m}}_t + \tilde{m}_t(g + \pi_t) + \dot{\tilde{b}}_t + \tilde{b}_t(g + \pi_t - i_t) = y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t \tag{4}$$

Definiendo $w_t = m_t + b_t$

$$\dot{\tilde{w}}_t + \tilde{w}_t(g + \pi_t) = i_t \tilde{b}_t + y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t$$

Utilizando la Ecuación de Fisher ($i_t = r_t + \pi_t$):

$$\dot{\tilde{w}}_t - \tilde{w}_t(r_t - g) = y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t - \tilde{m}_t i_t \tag{5}$$

Iteramos (5) hacia delante descotando por la tasa real de interés corregida por crecimiento para llegar a una Restricción Presupuestaria Intertemporal (RPI)[3]:

$$\int_0^T [\dot{\tilde{w}}_t - \tilde{w}_t(r_t - g_t)] e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds} dt = \int_0^T [y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t - i_t \tilde{m}_t] e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds} dt$$

$$\tilde{w}_T e^{-\int_0^T (r_s - g_s) ds} - \tilde{w}_0 = \int_0^T [y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t - i_t \tilde{m}_t] e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds} dt \tag{6}$$

Además, cuando $T \to \infty$:

$$\lim_{T \to \infty} \tilde{w}_T e^{-\int_0^T (r_s - g_s) ds} = 0$$

Así obtenemos las RPI:

$$\int_0^\infty [\tilde{c}_t + \tilde{\tau}_t + i_t \tilde{m}_t] e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds} dt = \tilde{w}_0 + \int_0^\infty y e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds} dt \tag{7}$$

[1] Ver auxiliar 1

[2] Ver auxiliar 2

[3] De aquí en adelante las RPIs se resolverán de la misma forma que si g fuese variable para poder aplicarlo mas adelante. Los resultados no cambian, ya que si g fuese variable, el producto sería $y_t = y e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds}$, y el "de-trending"se llevaría a cabo con esto en mente. Así, con g_s, se llegaría a las mismas restricciones flujo que con un g (constante). Ver auxiliar 3

El agente representativo optimiza desde el tiempo 0 maximizando la función de utilidad descontada, sujeta a la RPI:

$$max \int_0^\infty e^{-\rho t}[u(\tilde{c}_t) + v(\tilde{m}_t)]dt \quad s.a(7)$$

Condiciones de Primer Orden (CPO):

$$[\tilde{c}_t] \quad u'(\tilde{c}_t)e^{-\rho t} = \lambda e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}$$

$$[\tilde{m}_t] \quad v'(\tilde{m}_t)e^{-\rho t} = \lambda i_t e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}$$

Entonces, a partir de las CPO obtenemos la siguiente relación de sustitución entre saldos reales y consumo, dada la tasa de interés nominal, de la cual se deriva la demanda de dinero:

$$\frac{v'(\tilde{m}_t)}{u'(\tilde{c})} = i_t \tag{8}$$

Y al combinar la restricción flujo de los agentes y del gobierno consolidado obtenemos por vaciamiento de mercados en todo momento del tiempo la determinación de la tasa de interés real[4]:

$$\tilde{c}_t = y \qquad\qquad r_t - \frac{1}{\sigma}g_t = \rho$$

Además, recordando la Ecuación de Fisher:

$$\pi_t = \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - \rho - \frac{1}{\sigma}g_t \tag{9}$$

2.2. Problema de la autoridad monetaria

La autoridad monetaria presenta el siguiente flujo presupuestario.

$$\dot{M}_t + \dot{B}_t^M = i_t B_t^M + P_t x_t \tag{10}$$

Ahora, llevamos a (10) a términos reales dividiendo por P_t y corregimos por tendencia dividiendo por e^{gt} siguiendo con la misma metodología [5]:

$$\dot{\tilde{w}}_t - \tilde{w}_t(r_t - g_t) = \tilde{x}_t - i_t\tilde{m}_t \tag{11}$$

Donde los puntos sobre las variables indican derivadas contra el tiempo. Del lado de los egresos del banco central se incluyen las transferencias a la autoridad fiscal, x_t, y los intereses pagados por la deuda emitida, $(r_t - g_t)b_t^M$. Las fuentes de ingreso que tiene la autoridad monetaria son el señoreaje obtenido por los saldos reales y la tasa de interés y la deuda $\dot{b}_t$.

Iteramos (11) hacia adelante descontando por tasa de interés real corregida por crecimiento para llegar a una Restricción Presupuestaria Intertemporal (RPI) de la autoridad monetaria [6]:

$$\tilde{w}_T e^{-\int_0^T (r_s - g_s)ds} - \tilde{w}_0 = \int_0^T [\tilde{x}_t - i_t\tilde{m}_t]e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}dt \tag{12}$$

[4] Ver auxiliar 4
[5] Ver auxiliar 5
[6] Ver auxiliar 6

Vemos que cuando $T = t$:

$$\tilde{b}_t = e^{\int_0^s (r_v - g_v)dv}[\int_0^t [\tilde{x}_s - \frac{v'(\tilde{m}_s)}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_s]e^{-\int_0^s (r_v - g_v)dv}ds + \tilde{w}_0] - \tilde{m}_t$$

Además, cuando tomamos $T \to \infty$:

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{w}_T e^{-\int_0^T (r_s - g_s)ds} = 0$$

Así llegamos a la RPI:

$$\tilde{m}_0 + \tilde{b}_0 = \int_0^\infty [i_t\tilde{m}_t - \tilde{x}_t]e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}dt \tag{13}$$

Por último, conociendo (8) definimos la demanda de dinero como: $\tilde{m}_t = L(i_t, \tilde{c}_t)$ La cual por equilibrio del mercado es redefinida como $L(i_t, y)$

3. Política Monetaria Óptima con Crecimiento Constante

Siguiendo el lineamiento de Manuelli & Vizcaino (2017), procedemos a analizar la economía bajo dos escenarios de compromiso de la autoridad monetaria: compromiso estricto y compromiso débil. En el escenario donde el organismo no puede comprometerse a mantener su política, el mismo tiene incentivos a licuar el valor real de su deuda denominada nominalmente, generando inflación. Al no capturar mediante este modelo todas las consecuencias adversas de tal política restringimos tal accionar, aunque la autoridad monetaria podrá implementar una operación de mercado abierto única y comprar su stock de deuda que paga intereses.

3.1. Compromiso estricto

Bajo compromiso estricto y asumiendo una autoridad monetaria que se comporta a la Ramsey, maximizando el bienestar de los agentes económicos, la política monetaria óptima sería la resolución del siguiente problema:

$$\max_{b_t, m_t} = \int_0^\infty e^{-\rho t}[v(L(i_t, y))]dt$$

$$s.a. \quad \tilde{m}_0 + \tilde{b}_0 = \int_0^\infty [i_t L(i_t, y) - \tilde{x}_t]e^{-(r_t - g)t}dt$$

CPO:

$$[i_t] \quad e^{-\rho t}v'(L(i_t, y))L_1 = -\lambda e^{-(r_t - g)t}[L(i_t, y) + i_t L_1]$$

Al resolver la CPO obtenemos que la tasa de interés nominal debe ser constante a través del tiempo. Lo cual se condice con los resultados de Barro (1979), al entender la inflación como un impuesto, por lo cual para suavizar las distorsiones debe mantenerse constante a través del tiempo.

$$\tilde{m} = L(i, y) \tag{14}$$

Proposición 1: La política óptima esta caracterizada por un nivel de balances reales de dinero $\tilde{m}$ y un nivel de inflación π, dado por:

$$\pi = \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - \rho - \frac{1}{\sigma}g$$

Donde $\tilde{m}$ se elige de forma que los ingresos por señoreaje a través del tiempo logren financiar las transferencias negativas hacia la autoridad fiscal y la deuda a $t = 0$:

$$\tilde{m}_0 + \tilde{b}_0 = \int_0^\infty [\tilde{m}\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - \tilde{x}_s]e^{-(r-g)s}ds$$

Determinando el sendero de la deuda que paga intereses de la siguiente forma:

$$\tilde{b}_t = e^{(r-g)t}[\int_0^t [\tilde{x}_s - \tilde{m}\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}]e^{-(r-g)s}ds + \tilde{w}_0] - \tilde{m}$$

La cual podemos reescribir[7]:

$$\tilde{b}_t = [\int_0^t [\tilde{x}_s - \tilde{m}(\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - (r-g))]e^{-(r-g)s}ds + \tilde{b}_0 + \tilde{m}_0 - \tilde{m}]e^{(r-g)t} \tag{15}$$

Así en este escenario la política monetaria óptima es tal que, al llegar al momento del equilibrio fiscal desde el cual las transferencias se mantienen en cero, la autoridad monetaria tendrá servicios de deuda por cumplir. Estos mismos serán cancelados en el tiempo a través de los ingresos de señoreaje obtenidos siguiendo una política de inflación constante.

3.2. Compromiso Débil

Bajo compromiso débil la autoridad monetaria revisa su política al llegar al equilibrio fiscal monetiza toda la deuda pendiente. Este accionar es óptimo ya que intercambia pasivos que pagan intereses por pasivos monetarios. Al igual que Manuelli & Vizcaino (2017) asumimos agentes económicos que no integran este accionar a sus expectativas, por lo que no veremos un ajuste de la tasa de interés anticipándose al salto discreto de la inflación en el momento T.

Será oportuno dividir el problema en 2 períodos, encontrando que del momento T en adelante el problema es similar a la Proposición 1 sin deuda ni déficit a financiar.

Proposición 2:

Entonces, la autoridad monetaria optimizará de acuerdo al siguiente problema:

$$\text{máx} \int_T^{\infty} e^{(r-g)t} v(L(i_t, y))dt \tag{16}$$

s.a.

$$\left[\int_T^{\infty} e^{(r-g)t}(L(i_t, y)i_t)dt - \tilde{m}' \geq 0\right] \tag{17}$$

Recordando la condición de optimalidad obtenemos un i_{T+} constante. Estableciendo particularmente para este problema que el organismo podrá mantener ingresos positivos para sostener una inflación igual a 0 y no entrar en una economía deflacionaria, cuyas consecuencias escapan de nuestro modelo:

$$i_{T+} = i_{LR} \qquad \pi_{T+} = 0$$

En cambio de 0 a T el problema es el siguiente:

Proposición 3:

$$\text{máx} \int_0^T e^{-(r-g)t} v(L(i_t, y))dt + \lambda \left[\int_0^T e^{-(r-g)t}(L(i_t, y)i_t - \tilde{x}_t)dt - (b_0 + m_0) + \tilde{m}'\right] + \eta[L(i'_T, y) - \tilde{m}^*_T - \tilde{b}_T]$$

La segunda restricción implica que toda la deuda del organismo en la terminación del subproblema es monetizada eligiendo i'_T tal que la demanda de dinero absorba el stock de deuda y los saldos monetarios a tal momento generando del momento T en adelante inflación 0.

[7] Ver auxiliar 7

CPO:

$[i_t]$ $e^{-(r-g)t}v'(L(i_t,y))L_1(i_t,y)+\lambda e^{-(r-g)t}(L(i_t,y)+L_1(i_t,y)i_t)$

$[\lambda]$ $\tilde{b}_T+\tilde{m}_w=[\tilde{m}_0+\tilde{b}_0+\int_0^T[\tilde{x}_t-\frac{v'(\tilde{m}_w)}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w]e^{-(r-g)t}dt]e^{(r-g)T}$ [8]

$[\eta]$ $\tilde{b}_T+\tilde{m}_w=\tilde{m}'$

$$e^{-(r-g)T}\tilde{m}'=\tilde{m}_0+\tilde{b}_0+\int_0^T\tilde{x}_te^{-(r-g)t}dt+\frac{v'(\tilde{m}_w)}{u'(\tilde{c})}\frac{\tilde{m}_w}{r-g}e^{-(r-g)T}-\frac{v'(\tilde{m}_w)}{u'(\tilde{c})}\frac{\tilde{m}_w}{r-g}$$

La política óptima es tal que los saldos reales son constantes hasta el instante previo a T y satisfacen:

$$\frac{v'(\tilde{m}_w)}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w=\frac{r-g}{1-e^{-(r-g)T}}[\tilde{m}_0+\tilde{b}_0+\int_0^T\tilde{x}_te^{-(r-g)t}dt-e^{-(r-g)T}\tilde{m}']$$

Al no haber deuda ni déficit que financiar luego del momento T si no permitimos que el banco central obtenga ingresos positivos la inflación en este modelo es $\pi_t=-g_t$ lo que causaría otras consecuencias que no podemos abarcar. Por ello establecemos que al momento T la autoridad determina una inflación óptima para la economía, la cual por simplicidad determinamos igual a 0.

Lo que nos devuelve nuestra tercera condición donde la tasa nominal en el momento T debe incentivar la demanda de dinero $\tilde{m}'$ tal que no se genere inflación:

$$i(\tilde{m}')=r=\rho+\frac{1}{\sigma}g \tag{18}$$

4. Restricciones Teóricas

Recordando (8), derivando las funciones de utilidad y siguiendo los lineamientos de Lucas & Nicolini (2013), tomamos $M1$ como concepto relevante de transacciones de demanda por dinero:

$$\frac{(\tilde{m}y_t)^{-\sigma}z}{(\tilde{c}y_t+\alpha y_t)^{-\sigma}}=i_t$$

Así, la demanda de dinero satisface:

$$\tilde{m}=(\tilde{c}+\alpha)\left[\frac{1}{z}\right]^{-\frac{1}{\sigma}}$$

Además, definiendo el señoreaje como $\pi\tilde{m}_0=(i-r)\tilde{m}_0$:

$$s(\tilde{m})=\left[\left(\frac{\tilde{m}_1}{\tilde{c}+\alpha}\right)^{-\sigma}-r\right]\tilde{m}_0$$

Donde $\tilde{m}_0$ es la base monetaria neutralizada por crecimiento. Además, definimos $\frac{\tilde{m}_1}{\tilde{m}_0}=1+\vartheta$, entonces:

$$s(\tilde{m})=\left[z\left(\frac{1+\vartheta}{\tilde{c}+\alpha}\right)^{-\sigma}-\frac{r}{\tilde{m}_0^{-\sigma}}\right]\tilde{m}_0^{1-\sigma} \tag{19}$$

Por último, definimos $K=z(\frac{1+\vartheta}{\tilde{c}+\alpha})^{-\sigma}$

[8] Ver auxiliar 8

Así, resolvemos la siguiente integral para volver a definir $\tilde{m}$.

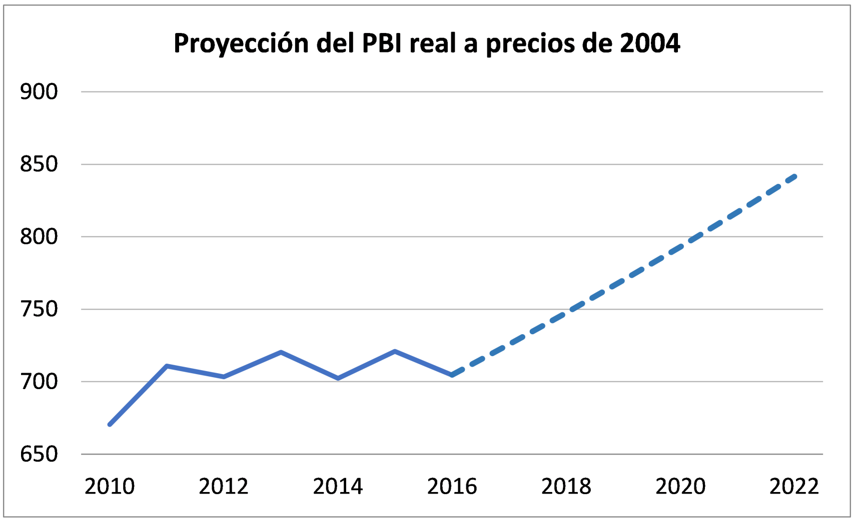
$$\int_0^{\infty}(i\tilde{m})e^{-(r-g)t}ds = \int_0^{\infty}(\tilde{K}\tilde{m}^{1-\sigma})e^{-(r-g)t}ds = \tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}}$$

$$\tilde{K}\tilde{m}^{1-\sigma} = (r-g)(\tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}})$$

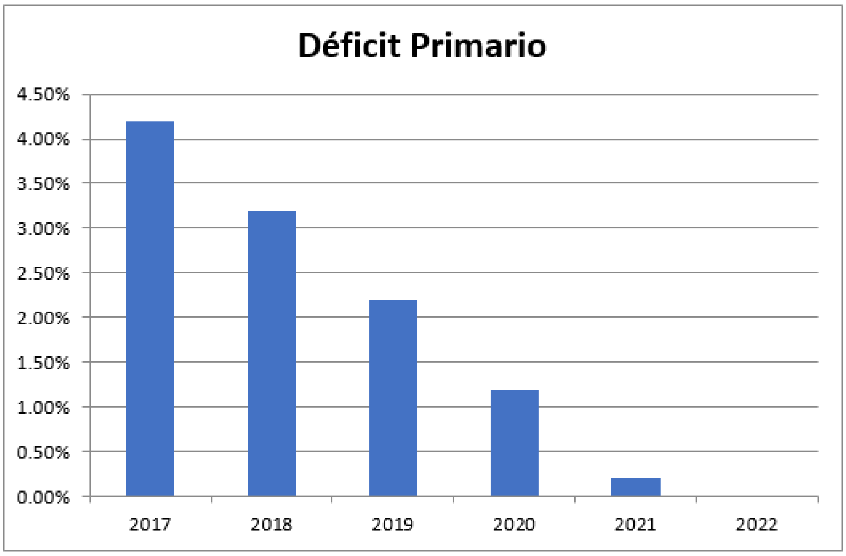
$$\tilde{m} = \left[\frac{r-g}{\tilde{K}}(\tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}})\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{20}$$

Donde $\hat{\tilde{x}}$ es el sendero de déficit establecido acumulado y descontado por la debida tasa.

Ahora, como mencionamos antes, consideramos que la autoridad fiscal cumplirá su objetivo de reducir gradualmente el déficit fiscal de acuerdo a lo estipulado. Según las metas anunciadas, el déficit será de 4,2 % en el año 2017 y se reducirá un punto porcentual por año. Si bien las metas oficiales sólo llegan al 2019, nosotros supondremos que se seguirá el mismo sendero hasta alcanzar el equilibrio fiscal en el año 2022. Tomamos como supuesto que el gobierno basa estas metas en la idea de que la economía crecerá al tres por ciento y define el déficit primario absoluto tal que, relativo al PBI, se satisfagan las metas trazadas. Es decir, suponemos que el Tesoro Nacional espera que el producto tenga la siguiente forma:



Dado eso, define un sendero de déficit absoluto tal que se satisfaga el siguiente esquema de déficit primario sobre producto:



De esta manera, si la economía termina mostrando un crecimiento menor al tres por ciento, el déficit relativo al producto será mayor al objetivo y si la economía crece a un mayor ritmo habrá sobre cumplimiento de las metas. En este escenario, y a modo de ejemplo, obtendremos los siguientes resultados fiscales para diferentes crecimientos de la economía:

	Crecimiento				
	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
2017	4.33 %	4.28 %	4.24 %	4.20 %	4.16 %
2018	3.39 %	3.33 %	3.26 %	3.20 %	3.14 %
2019	2.40 %	2.33 %	2.27 %	2.20 %	2.14 %
2020	1.35 %	1.30 %	1.25 %	1.20 %	1.15 %
2021	0.23 %	0.22 %	0.21 %	0.20 %	0.19 %
2022	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %

Entonces, dado un cierto crecimiento, $\hat{\tilde{x}}$ quedará definido como la suma de los déficits anuales futuros traídos a valor presente.

También es importante notar que, de las proposiciones con política monetaria débil, se sigue que el nivel óptimo de balances de dinero $\tilde{m}_w$ satisface:

$$\tilde{K}\tilde{m}_w^{1-\sigma} = \frac{r-g}{1-e^{-(r-g)T}}(\tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}} - e^{-(r-g)T}\tilde{m}')$$

Donde el sufijo w refiere a la situación de compromiso débil. Recordando la condición de borde en la que a la inflación en la terminación del sub-problema la restringimos a cero.

$$\rho + \frac{1}{\sigma}g = \tilde{K}\tilde{m}^{-\sigma}$$

$$\tilde{m}' = \left[\frac{\rho + \frac{1}{\sigma}g}{\tilde{K}}\right]^{-\frac{1}{\sigma}}$$

Recordando:

$$\tilde{m}_w = \left[\frac{r-g}{1-e^{-(r-g)T}\tilde{K}}\left[\tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}} - e^{-(r-g)T}\left(\frac{\tilde{K}}{\rho + \frac{1}{\sigma}g}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right]\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{21}$$

$$\pi_w = \tilde{K}\tilde{m}_w^{-\sigma} - (\rho + \frac{1}{\sigma}g)$$

Podemos definir la deuda en el momento terminal:

$$\tilde{b}_T = (\frac{\tilde{K}}{\rho + \frac{1}{\sigma}g})^{\frac{1}{\sigma}} - \tilde{m}_w \tag{22}$$

Resumiendo, tanto (20) como (21) son el nivel óptimo de balances reales de dinero en los casos de compromiso estricto y de compromiso débil respectivamente. Se nota cómo claramente el crecimiento g tiene efectos tanto en los balances como en las respectivas inflaciones.

5. Política Monetaria Óptima con Crecimiento Variable

En esta sección, replicaremos los anteriores resultados bajo un sendero de crecimiento variable, así definiendo $y_t = ye^{\int_0^t g_s ds}$. Definiremos el crecimiento como:

$$g_t = \begin{cases} g^{SR}, & para \quad 0 \le t \le T_1 \\ g^{LR}, & para \quad t \ge T_1 \end{cases} \tag{23}$$

5.1. Compromiso Estricto

Bajo compromiso estricto y crecimiento variable, y nuevamente asumiendo una autoridad monetaria que busca maximizar el bienestar de los agentes económicos, la política monetaria óptima surge de la resolución del siguiente problema:

$$\max_{b,m} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}[v(L(i_t, y))]dt + \lambda[\tilde{w}_0 - \int_0^\infty e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}[\tilde{x}_t - i_t L(i_t, y)]dt] \tag{24}$$

Donde otra vez asumimos un gobierno benevolente a la Ramsey que no puede licuar la deuda en $t = 0$, llevando P_0 a infinito, con P_0 dado.

Además, al igual que antes: $\frac{v'(\tilde{m}_t)}{u'(\tilde{c}_t)} = i_t$ y también $\tilde{m}_t = L(i_t, \tilde{c}_t) = L(i_t, y)$

CPO:

$[i_t]$ $e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds} v'(L(i_t, y))L_1 = -\lambda e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}[L(i_t, y) + i_t L_1]$

De esta ecuación se desprende $i_t = i \ \forall t$.

Recordando el equilibrio de mercado que obtenemos del problema de los consumidores, podemos determinar el siguiente sendero de la tasa de interés real:

$$r_t = \begin{cases} r^{SR} = \rho + \frac{1}{\sigma} g^{SR}, & para \quad 0 \le t \le T_1 \\ r^{LR} = \rho + \frac{1}{\sigma} g^{LR}, & para \quad t \ge T_1 \end{cases} \tag{25}$$

Donde ambos períodos incentivan a los agente a no traer riqueza de mañana y así vaciar los mercados. Tal sendero definirá una tasa de inflación menor a mayor crecimiento, dada una tasa de interés nominal. Siguiendo los lineamientos del caso con crecimiento constante, vemos que $\tilde{m}$ es determinado de tal modo que cumpla:

$$\tilde{m}_0 + \tilde{b}_0 = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}[\tilde{m}\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - \tilde{x}_s]ds \tag{26}$$

Y el sendero de deuda se elige de forma que:

$$\int_0^t [\dot{\tilde{w}}_s - (r_s - g_s)\tilde{w}_s]e^{-\int_0^s (r_v - g_v)dv} ds = \int_0^t (\tilde{x}_s - i_s \tilde{m})e^{-\int_0^s (r_v - g_v)dv} ds$$

Recordando Leibniz para el primer término:

$$\tilde{w}_t e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds} - \tilde{w}_0 = \int_0^t (\tilde{x}_s - i_s \tilde{m})e^{-\int_0^s (r_v - g_v)dv} ds$$

Así entonces:

$$\tilde{b}_t = [\int_0^t (\tilde{x}_s - \tilde{m}[\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - (r_s - g_s)])e^{-\int_0^s (r_v - g_v)dv} ds + \tilde{b}_0 + \tilde{m}_0 + \tilde{m}]e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds} \tag{27}$$

Por lo cual, dado el sendero de crecimiento modelado:

$$\tilde{b}_t = \left[\int_0^t \tilde{x}_s e^{-(r^{SR}-g^{SR})s} ds + [\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - (r^{SR} - g^{SR})]\tilde{m}\frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})t} - 1}{r^{SR} - g^{SR}} + \tilde{w}_0 - \tilde{m} \right] e^{(r^{SR}-g^{SR})t}$$

$$para \quad 0 \leq t \leq T_1$$

$$\tilde{b}_t = [\hat{\tilde{x}}_t + [\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - (r^{SR} - g^{SR})]\tilde{m}\frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1} - 1}{r^{SR} - g^{SR}} + [\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})} - (r^{LR} - g^{LR})]$$
$$\tilde{m}\frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)} - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{LR} - g^{LR}} + \tilde{w}_0 - \tilde{m}]e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)}$$

$$para \quad t \geq T_1$$

Reescribiendola de otra manera:

$$\tilde{b}_t = \left[\int_0^t \tilde{x}_s e^{-(r^{SR}-g^{SR})s} ds + \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}\frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})t} - 1}{r^{SR} - g^{SR}} + \tilde{w}_0 \right] e^{(r^{SR}-g^{SR})t} - \tilde{m}$$

$$para \quad 0 \leq t \leq T_1$$

$$\tilde{b}_t = \left[\hat{\tilde{x}}_t + \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}\tilde{m} \left[\frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T1} - 1}{r^{SR} - g^{SR}} + \frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)} - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{LR} - g^{LR}} \right] + \tilde{w}_0 \right]$$
$$e^{(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)} - \tilde{m} \tag{28}$$

Para simplificar, llamamos B al término de la derecha y obtenemos:

$$\tilde{b}_t = Be^{(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)} - \tilde{m}$$

5.2. Restricción Teórica

Ahora, al igual que antes, buscamos $\tilde{m}$:

$$\int_0^\infty i\tilde{m}e^{-\int_0^t (r_s-g_s)ds}dt = \int_0^\infty \tilde{K}\tilde{m}^{1-\sigma}e^{-\int_0^t (r_s-g_s)ds}dt = \tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}}$$

$$\hat{\tilde{x}} = \tilde{x}_t \left[\frac{1 - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{SR} - g^{SR}} + \frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1} - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(T-T_1)}}{r^{LR} - g^{LR}} \right] \tag{29}$$ [9]

Así[10]:

$$\tilde{K}\tilde{m}^{1-\sigma} \left[\frac{1 - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{SR} - g^{SR}} + \frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{LR} - g^{LR}} \right] = \tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}}$$

Finalmente encontramos el valor de $\tilde{m}$

$$\tilde{m} = \left[\frac{\tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}}}{\tilde{K}} \left[\frac{1 - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{SR} - g^{SR}} + \frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{LR} - g^{LR}} \right]^{-1} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{30}$$

Y además recordamos que: $i = \tilde{K}\tilde{m}^{-\sigma}$ y $\pi_t = i - r_t$

[9]Ver auxiliar 9
[10]Ver auxiliar 10

5.3. Compromiso Débil

En el sub-problema definido de $t \geq T$, la optimización es similar a la de compromiso estricto sin déficit ni deuda a financiar.

Entonces, tenemos que:

$$\text{máx} \int_T^\infty e^{-\int_T^t (r_s - g_s)ds} v(L(i_t, y))dt \tag{31}$$

s.a.

$$\left[\int_T^\infty e^{-\int_T^t (r_s - g_s)ds}(L(i_t, y)i_t)dt - \tilde{m}' \geq 0\right] \tag{32}$$

Recordando la condición de optimalidad obtenemos un i_{T+} constante. Estableciendo particularmente para este problema que el organismo podrá mantener ingresos positivos para mantener una inflación igual a 0 y no entrar en una economía deflacionaria:

$$i_{T+} = i_T \qquad \pi_{T+} = 0$$

Por otro lado en el período $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} \text{máx} \int_0^T e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds} v(L(i_t, y))dt + \lambda \left[\int_0^T e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}(L(i_t, y)i_t - \tilde{x}_t)dt - (\tilde{b}_0 + \tilde{m}_0) + \tilde{m}'\right] \\ + \eta[L(i_t^*, y) - \tilde{m}_T - \tilde{b}_T] \end{aligned} \tag{33}$$

Donde la segunda restricción le da la oportunidad a la autoridad monetaria de monetizar en una única operación de mercado abierto el stock de deuda en la terminación de su problema más la cantidad real de dinero, dada la tasa i_T^* elegida.

$$\tilde{m}' = \tilde{m}_w + \tilde{b}_T$$

CPO:

$$[i_t]: \qquad e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds} v'(L(i_t, y))L_1(i_t, y) + \lambda e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}(L(i_t, y) + L_1(i_t, y)i_t)$$

Lo que implica un $\tilde{m}_w$ constante

Ahora, hacemos la Restricción Presupuestaria Intertemporal:

$$\int_0^T [\dot{\tilde{w}}_t - \tilde{w}_t(r_t - g_t)]e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}dt = \int_0^T [\tilde{x}_t - \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w]e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}dt$$

Usando Liebniz:

$$(\tilde{m}_w + \tilde{b}_T)e^{-\int_0^T (r_s - g_s)ds} - (\tilde{m}_0 + \tilde{b}_0) = \int_0^T [\tilde{x}_t - \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w]e^{-\int_0^t (r_s - g_s)ds}dt$$

$$\int_0^{T_1} \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w e^{-(r^{SR} - g^{SR})}ds + \int_T^{T_1} \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w e^{-(r^{SR} - g^{SR})T_1 - (r^{LR} - g^{LR})(t - T_1)}ds = \hat{\tilde{x}} + \tilde{w}_0 - \tilde{m}' e^{-\int_0^T (r_s - g_s)ds}$$

$$\begin{aligned} &\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w \left[\frac{1 - e^{-(r^{SR} - g^{SR})T_1}}{r^{SR} - g^{SR}} + \frac{e^{-(r^{SR} - g^{SR})T_1} - e^{-(r^{SR} - g^{SR})T_1 - (r^{LR} - g^{LR})(t - T_1)}}{r^{LR} - g^{LR}}\right] \\ &= \hat{\tilde{x}} + \tilde{w}_0 - \tilde{m}' e^{-(r^{SR} - g^{SR})T_1 - (r^{LR} - g^{LR})(t - T_1)} \end{aligned} \tag{34}$$

Entonces, definiendo:

1. $\frac{v'(\tilde{m}_w)}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w = \left[\frac{1-e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{SR}-g^{SR}} + \frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1} - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)}}{r^{LR}-g^{LR}}\right]\left(\hat{\tilde{x}} + \tilde{w}_0 - \tilde{m}'e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)}\right)$
2. $\tilde{m}' = \tilde{m}_w + \tilde{b}_T$
3. $i\tilde{m}_w = \tilde{K}\tilde{m}_w^{1-\sigma}$
4. $\tilde{m}'$ tal que $i(\tilde{m}') = r_T = \rho + \frac{1}{\sigma}g_T$ Esto dice que la tasa de interés tiene que ser elegida tal que todo lo que se monetice sea absorbido y lleve al nuevo equilibrio que es $\tilde{\pi} = 0$ sin ningún salto discreto en los precios.

De 1.:

$$\tilde{K}\tilde{m}_w^{1-\sigma} = \left[\frac{1-e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{SR}-g^{SR}} + \frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1} - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)}}{r^{LR}-g^{LR}}\right]$$
$$\left(\hat{\tilde{x}} + \tilde{w}_0 - \tilde{m}'e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)}\right)$$

$$\tilde{m}_w = [\left[\frac{1-e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}}{r^{SR}-g^{SR}} + \frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1} - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)}}{r^{LR}-g^{LR}}\right] \frac{\left(\hat{\tilde{x}} + \tilde{w}_0 - \tilde{m}'e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)}\right)}{\tilde{K}}]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{35}$$

De 3. y 4. : $\tilde{K}\tilde{m}'^{-\sigma} = \rho + \frac{1}{\sigma}g_T$

$$\tilde{m}' = \left(\frac{\rho + \frac{1}{\sigma}g_T}{\tilde{K}}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{36}$$

De 2.:

$$\tilde{b}_t = \left[\int_0^t \tilde{x}_t e^{-(r^{SR}-g^{SR})t}dt + \frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}\frac{e^{-(r^{SR}-g^{SR})t}-1}{r^{SR}-g^{SR}} + \tilde{w}_0\right]e^{(r^{SR}-g^{SR})t} - \tilde{m}$$

$$para \quad 0 \leq t \leq T_1$$

$$\tilde{b}_t = B_w e^{(r^{SR}-g^{SR})T_1-(r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)} - \tilde{m}_w \tag{37}$$

$$para \quad t \geq T_1$$

6. Resultados

Para las calibraciones, se utilizaron los siguientes datos y supuestos:

Parámetro	Valor
ρ	6.00 %
σ	3.00
m_0	9.80 %
b_0	8.52 %
i_0*	18.00 %
K	0.00017

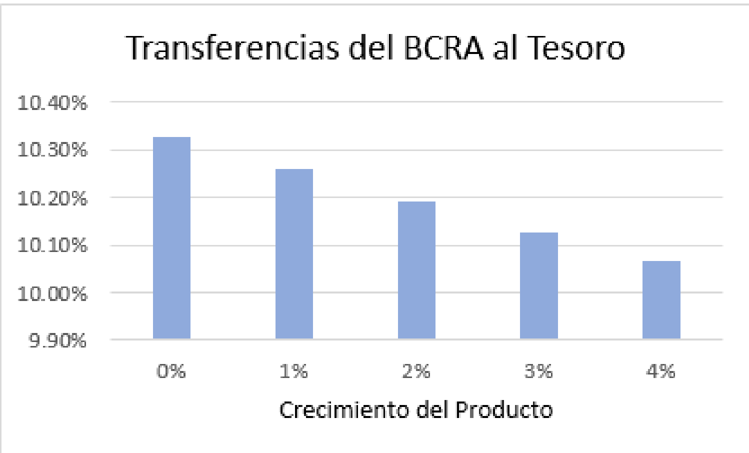
* Plazo fijo de 30 a 59 días en Dic. 2016

Cuadro 1: Parámetros utilizados

Se selecciona el valor de ρ tal que la tasa de interés real de equilibrio de la economía argentina en un contexto de crecimiento de 3 % (crecimiento que se asume es el de tendencia) sea igual al 7 %. Esta tasa es la observada actualmente en la deuda externa soberana de largo plazo. Si bien en la literatura se suele utilizar más comúnmente un factor de descuento en torno al 4 %, resulta intuitivo que para el caso argentino este factor sea más elevado, dadas las preferencias más cortoplacistas de los agentes. Se define σ, que forma parte de la semi-elasticidad de la demanda de dinero con respecto a la tasa de interés, siguiendo la modelación de Manuelli & Vizcaino (2017). La base monetaria como porcentaje del producto, m_0, es obtenida con datos del BCRA en Diciembre de 2016, así como también b_0. w_0 es simplemente la suma de ambos y es un proxi de los pasivos iniciales de la entidad monetaria. Finalmente K es calculada de la forma que ya se ha demostrado anteriormente.

6.1. Crecimiento constante

6.1.1. Compromiso estricto



	Crecimiento 0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
$\tilde{x}$	10.33 %	10.26 %	10.19 %	10.13 %	10.07 %
r	6.00 %	6.33 %	6.67 %	7.00 %	7.33 %
$\tilde{m}$	9.93 %	10.54 %	11.28 %	12.20 %	13.38 %
i	17.31 %	14.46 %	11.79 %	9.33 %	7.07 %
π	11.31 %	8.12 %	5.12 %	2.33 %	-0.26 %

Cuadro 2: Escenarios de compromiso estricto con crecimiento constante

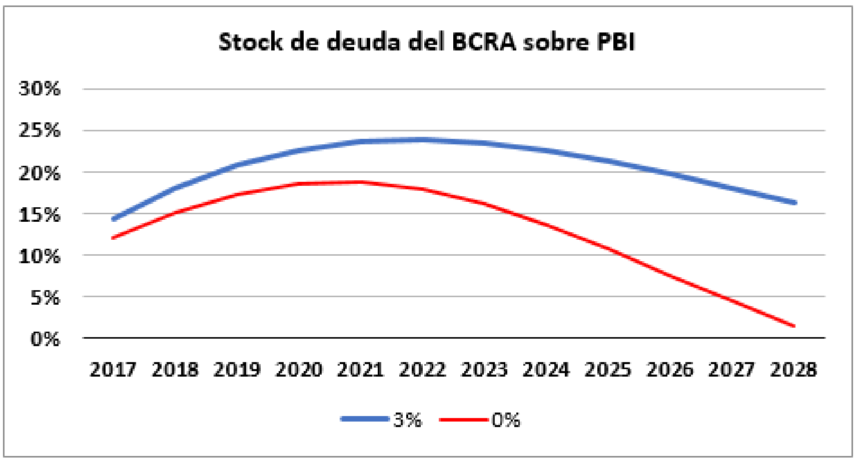
De estos resultados se pueden extraer nociones intuitivas. Se ve como, por ejemplo, a mayor crecimiento, menor déficit primario y por lo tanto menores transferencias por parte del BCRA. Además, la tasa de interés real resultante se relaciona de forma directa con el crecimiento. La intuición básica detrás de esto es que, dado que habrá mayor producto en el futuro, los agentes querrán endeudarse para suavizar su consumo y esto repercute en la tasa de equilibrio. Lo que se observa es que la tasa de interés nominal depende negativamente del crecimiento en magnitudes relevantes. Dado esto, los saldos reales son constantes en equilibrio pero son mayores a mayor crecimiento. De esto se desprende que la tasa de inflación será menor. La lógica detrás de estos resultados es que a mayor crecimiento menores serán las transferencias al Tesoro y que el propio crecimiento irá licuando la deuda, haciendo que sea óptimo recurrir a la misma en mayor medida. Dado esto, el BCRA puede permitirse cobrar menor señoreaje y optar por una menor tasa de interés nominal que genere menor inflación en el largo plazo. Dado que la elasticidad de de la demanda de dinero es menor a uno, a menor tasa de interés, aun cuando haya mayores saldos reales, menor será el señoreaje.

	Crecimiento				
Año	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
2017	12.08 %	12.82 %	13.60 %	14.43 %	15.35 %
2018	15.06 %	16.00 %	16.97 %	17.98 %	19.06 %
2019	17.24 %	18.37 %	19.55 %	20.76 %	22.04 %
2020	18.50 %	19.85 %	21.24 %	22.68 %	24.17 %
2021	18.72 %	20.32 %	21.95 %	23.63 %	25.36 %
2022	17.86 %	19.82 %	21.81 %	23.85 %	25.94 %
2023	16.13 %	18.56 %	21.02 %	23.52 %	26.08 %
2024	13.67 %	16.62 %	19.62 %	22.66 %	25.77 %
2025	10.72 %	14.20 %	17.75 %	21.37 %	25.09 %
2026	7.55 %	11.52 %	15.60 %	19.78 %	24.11 %
2027	4.41 %	8.80 %	13.34 %	18.04 %	22.94 %
2028	1.46 %	6.21 %	11.15 %	16.29 %	21.71 %

Cuadro 3: Stock de deuda del BCRA sobre PBI

Aquí observamos como esperábamos que, a mayor crecimiento, mayor será el stock de deuda óptima del BCRA. Esto se debe a que, dado que en estos escenarios la tasa de interés nominal son más bajas, el organismo obtendrá un menor señoreaje y recurrirá en mayor medida a la deuda. Podemos observar cómo una vez que el déficit fiscal llega a cero, el BCRA puede utilizar la emisión exclusivamente para ir cancelando la deuda tomada y bajar el stock de pasivos. De esta forma, el BCRA minimiza las distorsiones y el costo que las mismas generan en la utilidad de los agentes de la economía al redistribuir en el tiempo el costo de la financiación del déficit.

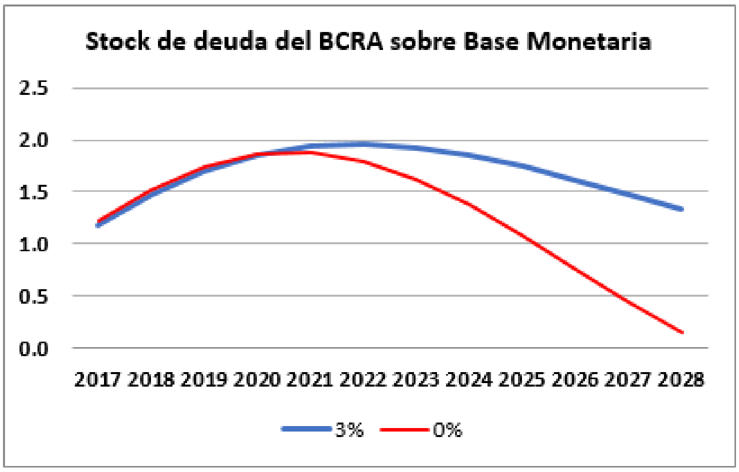
A continuación, graficamos el stock de deuda del BCRA sobre PBI para los casos de 0 % y 3 % de crecimiento constante:



	Crecimiento				
Año	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
2017	121.67 %	121.62 %	120.55 %	118.26 %	114.46 %
2018	151.73 %	151.73 %	150.36 %	147.38 %	142.43 %
2019	173.67 %	174.29 %	173.21 %	170.15 %	164.68 %
2020	186.35 %	188.3 %	188.25 %	185.84 %	180.61 %
2021	188.55 %	192.71 %	194.53 %	193.66 %	189.56 %
2022	179.87 %	187.98 %	193.32 %	195.48 %	193.89 %
2023	162.47 %	176 %	186.24 %	192.75 %	194.89 %
2024	137.73 %	157.67 %	173.84 %	185.72 %	192.62 %
2025	108.01 %	134.72 %	157.3 %	175.16 %	187.49 %
2026	76.07 %	109.31 %	138.21 %	162.12 %	180.15 %
2027	44.38 %	83.5 %	118.22 %	147.86 %	171.44 %
2028	14.67 %	58.94 %	98.78 %	133.54 %	162.22 %

Cuadro 4: Stock de deuda del BCRA sobre Base Monetaria

Nuevamente, graficamos para los mismos casos de crecimiento constante. La razón por la cual al principio el ratio es similar en ambos casos es que los saldos reales de dinero son menores en el caso de menor crecimiento. De esta manera, el denominador es menor. A medida que transcurre el tiempo el efecto del crecimiento se hace más relevante debido al carácter exponencial del mismo.



6.1.2. Compromiso débil

	Crecimiento				
	0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
$\tilde{x}$	10.33 %	10.26 %	10.19 %	10.13 %	10.07 %
r	6.00 %	6.33 %	6.67 %	7.00 %	7.33 %
$\tilde{m}$	6.74 %	6.86 %	6.98 %	7.11 %	7.24 %
i	55.31 %	52.53 %	49.82 %	47.17 %	44.59 %
π	49.31 %	46.20 %	43.15 %	40.17 %	37.25 %

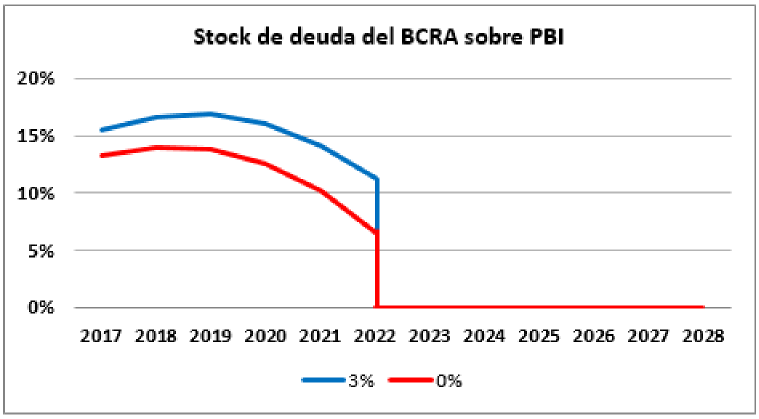
Cuadro 5: Escenarios de compromiso debil con crecimiento constante

Si bien el efecto que tiene el crecimiento sobre las políticas óptimas es el mismo que bajo el caso de compromiso estricto, se observan claras diferencias en cuanto a la magnitud de los resultados. En primer lugar, dado que el Banco Central deberá llegar al momento T con una menor deuda para licuar, elegirá un señoreaje más alto, optando entonces por una tasa de interés nominal más alta que terminará generando mayor inflación en el largo plazo.

Año	Crecimiento 0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
2017	12.25 %	12.82 %	13.41 %	14.01 %	14.63 %
2018	13.02 %	13.69 %	14.38 %	15.09 %	15.81 %
2019	12.84 %	13.62 %	14.42 %	15.23 %	16.06 %
2020	11.60 %	12.50 %	13.42 %	14.35 %	15.30 %
2021	9.17 %	10.21 %	11.26 %	12.33 %	13.42 %
2022	5.49 %	6.78 %	8.09 %	9.40 %	10.73 %
2023	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %

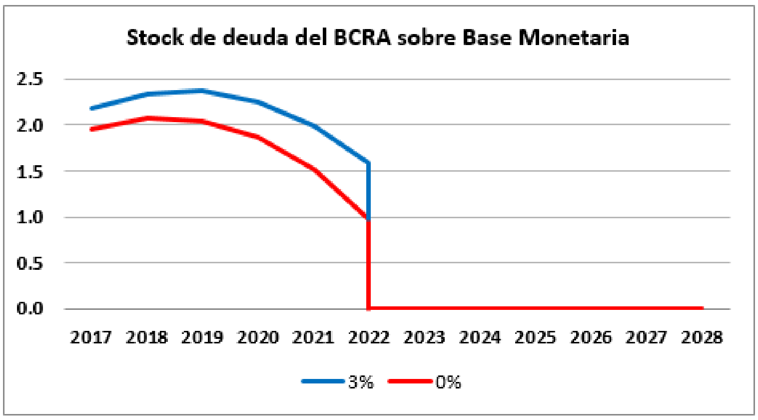
Cuadro 6: Stock de deuda del BCRA sobre PBI

Si se comparan los mismos escenarios de crecimiento del 0 % y 3 % se observa, al igual que en el caso del compromiso estricto, que los niveles de deuda óptimos son mayores a mayor crecimiento.



Año	Crecimiento 0 %	1 %	2 %	3 %	4 %
2017	251.71 %	259.25 %	266.67 %	273.95 %	281.11 %
2018	267.5 %	276.85 %	285.99 %	294.94 %	303.67 %
2019	263.9 %	275.47 %	286.76 %	297.78 %	308.51 %
2020	238.43 %	252.82 %	266.86 %	280.53 %	293.84 %
2021	188.39 %	206.43 %	224.02 %	241.13 %	257.77 %
2022	112.78 %	137.13 %	160.82 %	183.85 %	206.2 %
2023	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

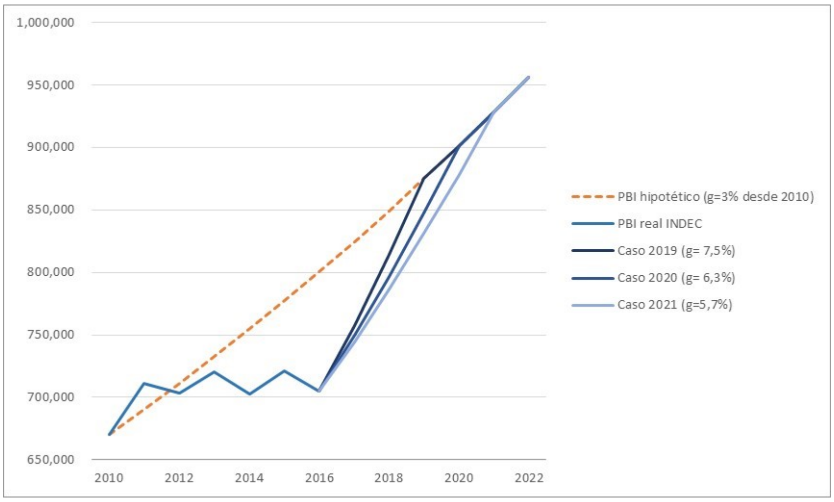
Cuadro 7: Stock de deuda del BCRA sobre Base Monetaria



6.2. Crecimiento variable

Se definen tres escenarios diferentes de crecimientos variables para evaluar sus implicancias en la política monetaria óptima y capturar la noción de que Argentina se encuentra actualmente por debajo de su nivel de producto potencial. En cada uno de estos casos la economía crecerá primero a tasas más altas y luego volverá al crecimiento de tendencia del 3 %. Para definir cuáles serán estos crecimientos iniciales más altos estudiamos cuánto debería crecer el país para recuperar el crecimiento perdido entre los años 2010 y 2016. De esta manera, planteamos los escenarios donde la economía crece a una velocidad que le permite recuperar un PBI hipotético de tendencia y volver a la senda de producción “natural”, en los años 2019, 2020 o 2021. Para este ejercicio nos basamos en los datos del PBI a precios del 2004 publicados por el INDEC [11].

Gráficamente:



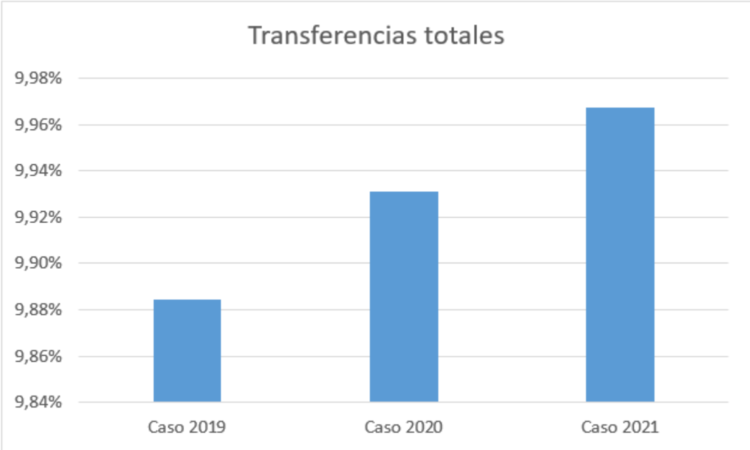
6.2.1. Compromiso estricto

	Años		
	2021	2020	2019
g^{SR}	5.66 %	6.34 %	7.48 %
g^{LR}	3.00 %	3.00 %	3.00 %
$\tilde{x}^{SR}$	8.82 %	8.79 %	8.74 %
$\tilde{x}^{LR}$	1.15 %	1.14 %	1.14 %
$\tilde{x}^{Total}$	9.97 %	9.93 %	9.88 %
r^{SR}	7.89 %	8.11 %	8.49 %
r^{LR}	7.00 %	7.00 %	7.00 %
$\tilde{m}$	12.74 %	12.76 %	12.78 %
i	8.19 %	8.16 %	8.11 %
$\pi(g^{SR})$	0.31 %	0.04 %	-0.38 %
$\pi(g^{LR})$	1.19 %	1.16 %	1.11 %

Cuadro 8: Escenarios de compromiso estricto con crecimiento variable

Resulta obvio que, para recuperar el producto perdido en menor tiempo, la tasa de crecimiento tendrá que ser mayor. Esto acarreará una tasa de interés real mayor y menores transferencias. Como ha sido explicado en los casos anteriores esto le permite al Banco Central optar por una tasa de interés nominal más baja, saldos reales de dinero más altos, y así generar menor inflación. En este caso si bien el BCRA va a elegir generar las menores distorsiones posibles manteniendo la tasa de interés nominal constante, el cambio de crecimiento y por ende el cambio también en la tasa de interés real, harán que existan dos niveles distintos de inflación, con un salto discreto entre una y otra, claramente generando una mayor inflación en la desaceleración del crecimiento.

[11] http://www.indec.gob.ar

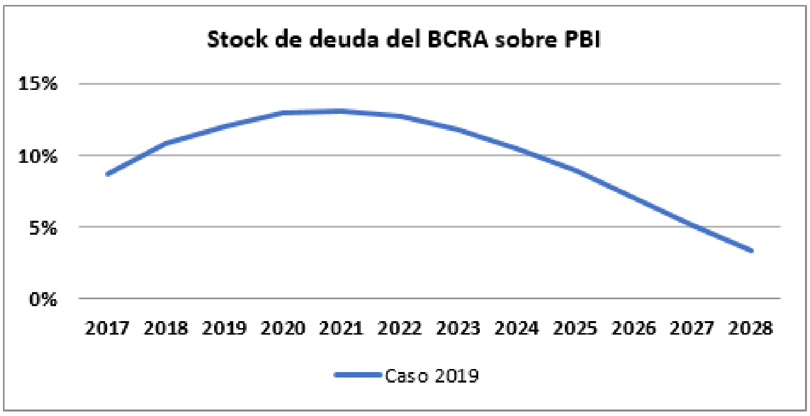


	Años		
Años	Caso 2021	Caso 2020	Caso 2019
2017	8.76 %	8.74 %	8.71 %
2018	10.90 %	10.87 %	10.82 %
2019	12.06 %	12.02 %	11.96 %
2020	12.30 %	12.25 %	12.97 %
2021	11.67 %	13.26 %	13.14 %
2022	12.90 %	12.80 %	12.69 %
2023	11.99 %	11.90 %	11.78 %
2024	10.68 %	10.59 %	10.48 %
2025	9.05 %	8.96 %	8.87 %
2026	7.22 %	7.14 %	7.05 %
2027	5.31 %	5.24 %	5.16 %
2028	3.42 %	3.36 %	3.3 %

Cuadro 9: Stock de deuda del BCRA sobre PBI

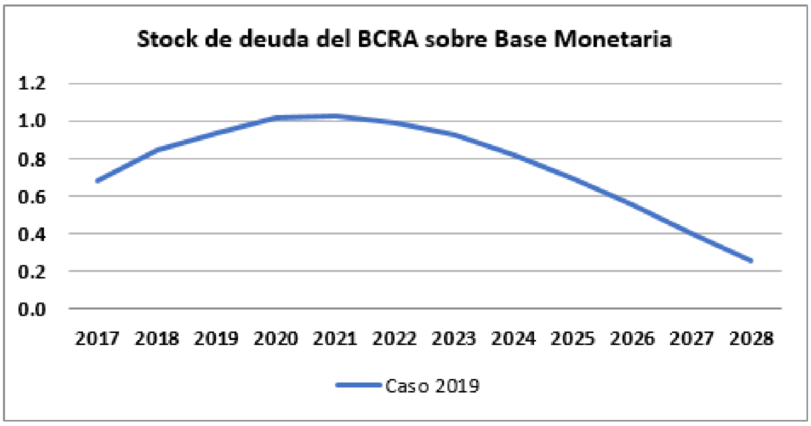
El stock de deuda como en los casos anteriores toma la forma de una u invertida. En este caso, se ve que, a mayor crecimiento, menor deuda inicial dado que está expresada como porcentaje del producto. Sin embargo, a diferencia del caso en donde teníamos crecimiento constante, ahora vemos que, a mayor crecimiento, menores niveles de deuda de largo plazo. La razón por la cual ocurre esto es que rápidamente la economía alcanza el crecimiento de tendencia en todos estos casos por lo cual lo preponderante será el nivel de deuda con la cual la economía llega a ese instante donde cambia la tendencia.

Graficamos a continuación el caso del 2019 como referencia:



	Años		
Años	Caso 2021	Caso 2020	Caso 2019
2017	69 %	68 %	68 %
2018	86 %	85 %	85 %
2019	95 %	94 %	94 %
2020	97 %	96 %	101 %
2021	92 %	104 %	103 %
2022	101 %	100 %	99 %
2023	94 %	93 %	92 %
2024	84 %	83 %	82 %
2025	71 %	70 %	69 %
2026	57 %	56 %	55 %
2027	42 %	41 %	40 %
2028	27 %	26 %	26 %

Cuadro 10: Stock de deuda del BCRA sobre Base Monetaria



6.2.2. Compromiso débil

	Años		
	2021	2020	2019
g^{SR}	5.66 %	6.34 %	7.48 %
g^{LR}	3.00 %	3.00 %	3.00 %
$\tilde{x}^{SR}$	8.82 %	8.79 %	8.74 %
$\tilde{x}^{LR}$	1.15 %	1.14 %	1.14 %
$\tilde{x}^{Total}$	9.97 %	9.93 %	9.88 %
r^{SR}	7.89 %	8.11 %	8.49 %
r^{LR}	7.00 %	7.00 %	7.00 %
$\tilde{m}$	7.49 %	7.53 %	7.57 %
i	40.27 %	39.67 %	39.03 %
$\pi(g^{SR})$	32.38 %	31.56 %	30.53 %
$\pi(g^{LR})$	33.27 %	32.67 %	32.02 %

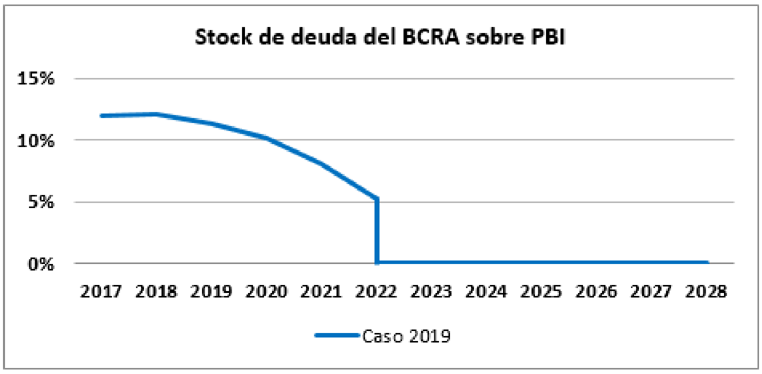
Cuadro 11: Escenarios de compromiso debil con crecimiento variable

Al igual que en los casos de crecimiento constante, los resultados siguen la misma lógica en compromiso estricto y compromiso débil pero, dada la mayor necesidad de recursos del señoreaje, en el caso de compromiso débil habrá mayor tasa de interés nominal e inflación de largo plazo.

	Años		
Años	Caso 2021	Caso 2020	Caso 2019
2017	12.03 %	12.01 %	11.99 %
2018	12.16 %	12.17 %	12.16 %
2019	11.29 %	11.32 %	11.33 %
2020	9.49 %	9.53 %	10.14 %
2021	6.79 %	8.00 %	8.03 %
2022	5.27 %	5.24 %	5.20 %
2023	0.00 %	0.00 %	0.00 %

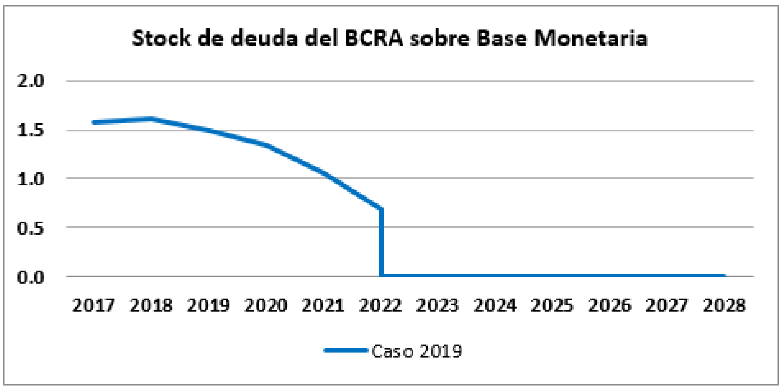
Cuadro 12: Stock de deuda del BCRA sobre PBI

Nuevamente graficamos el caso del 2019:



	Años		
Años	Caso 2021	Caso 2020	Caso 2019
2017	160 %	159 %	158 %
2018	162 %	162 %	161 %
2019	151 %	150 %	150 %
2020	127 %	127 %	134 %
2021	91 %	108 %	106 %
2022	70 %	70 %	69 %
2023	0 %	0 %	0 %

Cuadro 13: Stock de deuda del BCRA sobre Base Monetaria



7. Comentarios Finales

Este análisis demuestra, como es mencionado por Uribe (2016), que ante un sendero de transferencias negativas la autoridad monetaria optimiza al desplazar el costo de la financiación a través del tiempo, endeudándose en el corto plazo. Esto permite reducir la distorsión del impuesto inflacionario y minimizar el costo sobre la utilidad de los agentes de la economía. Además estresa la relevancia del crecimiento real sobre las decisiones de los organismos monetarios por modificar tanto el sendero deficitario a financiar como el descuento aplicado a las variables y el efecto directo en el mercado de dinero y la tasa de interés real.

Por último, como también han logrado señalar Manuelli y Vizcaino (2017), el modelo demuestra las implicancias cuantitativas que tiene la presunción sobre la habilidad de compromiso de la autoridad monetaria. Se pueden apreciar claras diferencias en los resultados con distintos niveles de compromiso. El modelo predice que cuando el mismo es débil hay un límite real a la deuda que puede emitir el BCRA, y por lo tanto se reduce la capacidad del ente de suavizar las distorsiones relacionadas al impuesto inflacionario.

Al calibrar el modelo para comparar sus predicciones con los datos del caso argentino, buscamos enmarcar la discusión política actual en un análisis objetivo. Particularmente, se podrían situar los objetivos establecidos por el BCRA en el marco de una economía con crecimiento constante cercano al 2 % y con un estricto compromiso a no desviarse de su política inicial. Cercana a las metas inflacionarias a las que se comprometió el organismo para el 2019 y en adelante, se puede ver que en este escenario a largo plazo se debe mantener una inflación alrededor del 5 %, mientras a corto plazo sería óptimo aumentar el endeudamiento a niveles mayores a los que se encuentra el BCRA actualmente. Teniendo en cuenta la deuda contra base monetaria, nuestro modelo ilustra que si el crecimiento es de 2 %, el ratio referido sería 121 % en el 2017. Comparando con los datos, encontramos un valor muy cercano del ratio, dado que a mayo de 2017, la deuda contra base monetaria en la Argentina era de 120 %. Por el otro lado si se asumiese que la autoridad monetaria no se comprometerá estrictamente, el crecimiento continuado de la deuda debería encontrar un tope alrededor de los 16 puntos del PBI y no sorprendería la expectativa de una inflación a niveles mucho mayores, como mostramos en nuestros cálculos.

En conclusión, nuestro trabajo permite evaluar el accionar del BCRA en cuanto a la política monetaria óptima, y decir que, su decisión tan cuestionada de tomar deuda en el corto plazo podría ser óptima en el contexto de un sendero decreciente de transferencias.

Referencias

[1] Barro, Robert J. 1979, *"On the determination of the public debt,"* Journal of Political Economy 87(5): 940-971.

[2] Lucas, R. Jr. and Nicolini, Juan, 2015, *"On the stability of money demand,"* 2013 Meeting Papers 353, Society for Economic Dynamics.

[3] Manuelli, Rody and Vizcaino, Juan, 2017, *"Monetary Policy with Declining Deficits: Theory and an Application to Recent Argentine Monetary Policy,"* Washington University in St. Louis, and Federal Reserve Bank of St. Louis.

[4] Sargent, T. and N. Wallace, 1981, *"Some Unpleasant Monetarist Arithmetic,"* Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, Fall, pp:1-17.

[5] Uribe, Martin, 2016, *"Is the Monetarist Arithmetic Unpleasant?,"* NBER working paper 22866.

8. Auxiliares

8.1. Auxiliar 1

$$\frac{\dot{M}_t}{P_t} + \frac{\dot{B}_t}{P_t} = i_t b_t + ye^{gt} - c_t - \tau_t$$

Donde $\frac{B_t}{P_t} = b_t$

$$\dot{b_t} = \frac{\dot{B}_t P_t - B_t \dot{P}_t}{P_t^2} = \frac{\dot{B}_t}{P_t} - b_t \pi_t$$

Por lo tanto $\frac{\dot{B}_t}{P_t} = \dot{b_t} + b_t \pi_t$
Del mismo modo $\frac{\dot{M}_t}{P_t} = \dot{m}_t + m_t \pi_t$

8.2. Auxiliar 2

$$\frac{\dot{m}_t}{e^{gt}} + \tilde{m}_t \pi_t + \frac{\dot{b_t}}{e^{gt}} + \tilde{b}_t \pi_t = i_t \tilde{b}_t + y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t$$

Donde $\tilde{m}_t = m_t e^{-gt}$; $\tilde{b}_t = b_t e^{-gt}$; $\tilde{c}_t = c_t e^{-gt}$ y $\tilde{\tau}_t = \tau_t e^{-gt}$
Y donde

$$\dot{\tilde{m}}_t = \frac{\partial m_t}{\partial e^{gt}} = \frac{\dot{m}_t e^{gt} - m_t g e^{gt}}{(e^{gt})^2} = \frac{\dot{m}_t}{e^{gt}} - \tilde{m}_t g$$

Por lo tanto: $\frac{\dot{m}_t}{e^{gt}} = \dot{\tilde{m}}_t + \tilde{m}_t g$
Del mismo modo: $\frac{\dot{b}_t}{e^{gt}} = \dot{\tilde{b}}_t + \tilde{b}_t g$

$$\dot{\tilde{m}}_t + \tilde{m}_t g + \tilde{m}_t \pi_t + \dot{\tilde{b}}_t + \tilde{b}_t g + \tilde{b}_t \pi_t = i_t \tilde{b}_t + y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t$$

8.3. Auxiliar 3

$$\int_0^T \frac{\partial(\tilde{w}_t e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds})}{dt} dt = \int_0^T [y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t - i_t \tilde{m}_t] e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds} dt$$

$$\tilde{w}_t e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds} |_0^T = \int_0^T [y - \tilde{c}_t - \tilde{\tau}_t - i_t \tilde{m}_t] e^{-\int_0^t (r_s - g_s) ds} dt$$

8.4. Auxiliar 4

Derivando la función de utilidad: $u'(\tilde{c}) = \frac{(1-\sigma)(\tilde{c}_t y_y + \alpha y_t)^{-\sigma} y_t}{1-\sigma}$

Aplicando logaritmo a la CPO $[u'(\tilde{c})]$:

$$\log[u'(\tilde{c})] = -\sigma \log(\tilde{c}_t + \alpha) + (1-\sigma)\log(y_t) = \log(\lambda) - \int_0^t (r_s - g_s - \rho) ds$$

Y derivando contra el tiempo, recordando Leibniz:

$$-\sigma \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}_t + \alpha} + (1-\sigma)\frac{\dot{y}_t}{y_t} = -r_s + g_s + \rho$$

$$-\sigma \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}_t + \alpha} + (1-\sigma) g_t = -r_t + g_t + \rho$$

$$\dot{\tilde{c}} = (\tilde{c}_t + \alpha)\frac{(r_t - \sigma g_t - \rho)}{\sigma}$$

Donde sabemos que tanto $\tilde{c}_t$ como α son mayores a cero. Y al combinar la restricción flujo de los agentes y del gobierno consolidado obtenemos que por vaciamiento de mercados:

$$\tilde{c}_t = y$$

por lo cual $\dot{\tilde{c}} = 0$:

8.5. Auxiliar 5

$$\dot{m}_t + m_t\pi_t + \dot{b}_t^M + b_t^M\pi_t = i_t b_t^M + x_t$$
$$\frac{\dot{m}_t}{e^{gt}} + \tilde{m}_t\pi_t + \frac{\dot{b}_t^M}{e^{gt}} + \tilde{b}_t^M\pi_t = i_t\tilde{b}_t^M + \tilde{x}_t$$
$$\dot{\tilde{m}}_t + \tilde{m}_t(\pi_t + g_t) + \dot{\tilde{b}}_t^M + \tilde{b}_t^M(\pi_t + g_t) = i_t\tilde{b}_t^M + \tilde{x}_t$$
$$\dot{\tilde{m}}_t - \tilde{m}_t(r_t - g_t) + \dot{\tilde{b}}_t^M - \tilde{b}_t^M(r_t - g_t) = -i_t\tilde{m}_t + \tilde{x}_t$$

8.6. Auxiliar 6

$$\int_0^T [\dot{\tilde{w}}_t - \tilde{w}_t(r_t - g_t)]e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds}dt = \int_0^T [\tilde{x}_t - i_t\tilde{m}_t]e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds}dt$$
$$\int_0^T \frac{\partial(\tilde{w}_t e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds})}{dt}dt = \int_0^T [\tilde{x}_t - i_t\tilde{m}_t]e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds}dt$$
$$\tilde{w}_t e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds}|_0^T = \int_0^T [\tilde{x}_t - i_t\tilde{m}_t]e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds}dt$$

8.7. Auxiliar 7

$$\tilde{b}_t = e^{(r-g)t}[\int_0^t [\tilde{x}_s - \tilde{m}\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}]e^{-(r-g)s}ds + \tilde{w}_0 - \tilde{m}e^{-(r-g)t}]$$
$$\tilde{b}_t = e^{(r-g)t}[\int_0^t [\tilde{x}_s - \tilde{m}\frac{v'(\tilde{m})}{u'(\tilde{c})}]e^{-(r-g)s}ds + \tilde{w}_0 + \tilde{m} - (\tilde{m}e^{-(r-g)t} + \tilde{m})]$$

8.8. Auxiliar 8

$$\dot{\tilde{m}}_w + \dot{\tilde{b}}_t - \tilde{m}_w(r-g) - \dot{\tilde{b}}_t(r-g) = -\frac{v'(\tilde{m}_w)}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w + \tilde{x}_t$$
$$\int_0^T [\dot{\tilde{w}}_t - \tilde{w}_t(r-g)]e^{-(r-g)t}dt = \int_0^T [\tilde{x}_t - \frac{v'(\tilde{m}_w)}{u'(\tilde{c})}\tilde{m}_w]e^{-(r-g)t}dt$$

8.9. Auxiliar 9

donde

$$\hat{\tilde{x}} = \int_0^T \tilde{x}_t e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds}dt = \int_0^{T_1} \tilde{x}_t e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds}dt + \int_{T_1}^T \tilde{x}_t e^{-\int_0^t(r_s-g_s)ds}dt$$
$$\hat{\tilde{x}} = \frac{-\tilde{x}_t}{r^{SR} - g^{SR}}e^{-(r^{SR}-g^{SR})t}|_0^{T_1} + \int_{T_1}^T \tilde{x}_t e^{-[\int_0^{T_1}(r^{SR}-g^{SR})ds + \int_{T_1}^t(r^{LR}-g^{LR})ds]}dt$$
$$\hat{\tilde{x}} = \frac{-\tilde{x}_t}{r^{SR} - g^{SR}}e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1} + \frac{\tilde{x}_t}{r^{SR} - g^{SR}} + \frac{-\tilde{x}_t}{r^{LR} - g^{LR}}e^{-[(r^{LR}-g^{LR})T_1 + (r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)]}|_{T_1}^T$$
$$\hat{\tilde{x}} = \frac{\tilde{x}_t}{r^{SR} - g^{SR}}[1 - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}] + \frac{\tilde{x}_t}{r^{LR} - g^{LR}}[e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1} - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1 - (r^{LR}-g^{LR})(T-T_1)}]$$

8.10. Auxiliar 10

$$-\frac{\tilde{K}\tilde{m}^{1-\sigma}}{r^{SR} - g^{SR}}e^{-(r^{SR}-g^{SR})t}|_0^{T_1} + \left[-\frac{\tilde{K}\tilde{m}^{1-\sigma}}{r^{LR} - g^{LR}}e^{-[(r^{LR}-g^{LR})T_1 + (r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)]}\right]|_{T_1}^{\infty} = \tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}}$$
$$\frac{\tilde{K}\tilde{m}^{1-\sigma}}{r^{SR} - g^{SR}}[1 - e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1}] + \frac{\tilde{K}\tilde{m}^{1-\sigma}}{r^{LR} - g^{LR}}\left[e^{-(r^{SR}-g^{SR})T_1} - \lim_{t\to\infty} e^{-[(r^{SR}-g^{SR})T_1 + (r^{LR}-g^{LR})(t-T_1)]}\right] = \tilde{w}_0 + \hat{\tilde{x}}$$