UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

ASIGNACIÓN ÓPTIMA EN UN MODELO NEOCLÁSICO CON EXTERNALIDAD MEDIOAMBIENTAL

Alumnos: Felicitas Lauri, Guido Lucas, María Lourdes Cors Losada, Mariana Strficek, Yanel Llohis

Tutor: Constantino Hevia | 2021

Tabla de contenido

1. Introducción

El propósito de nuestra tesis es profundizar el análisis sobre la política medioambiental óptima en un modelo neoclásico. Inspirándonos en el trabajo de Acemoglu “The environment and directed technical change”[1], nos proponemos modelar una economía que produce un único bien final a partir de dos bienes intermedios: un bien “sucio”, que contamina, y otro “limpio”. El agente representativo de la economía, deriva su utilidad a partir del consumo y se ve afectado por la existencia de una externalidad medioambiental, que definimos como la pureza del aire. Comparamos el resultado del equilibrio competitivo y el problema del planificador. Finalmente introducimos un impuesto al uso del bien “sucio” por parte del productor del bien final, para probar que con intervención estatal a favor de la tecnología limpia se puede llegar a la solución Pareto óptima. Finalmente calibramos el modelo y analizamos sus predicciones.

[1] Acemoglu, Daron, Philippe Aghion, Leonardo Bursztyn, and David Hemous. 2012. *"The Environment and Directed Technical Change."* American Economic Review, 102 (1): 131-66.

2. Modelo

El modelo se desarrolla en una pequeña economía cerrada con horizonte de tiempo infinito, en un contexto de certidumbre y competencia perfecta. La firma productora del bien final y las firmas productoras de bienes intermedios son maximizadoras de beneficios. El agente ofrece su trabajo y alquila el capital acumulado a las firmas y maximiza su utilidad que depende positivamente del consumo y la calidad del aire.

2.1 Tecnología:

2.1.1 Bien Final:

La economía produce un único bien final y_t. Su función de producción, utiliza como inputs dos bienes intermedios: uno "limpio" y_t^c, que utiliza tecnología no contaminante, y uno que denominamos "sucio" y_t^d, ya que daña al medioambiente. La función de producción es

$$y_t = \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

El parámetro $\varepsilon \, \epsilon \, (0, +\infty)$ representa la elasticidad de sustitución entre los bienes intermedios. Decimos que los bienes son sustitutos en el caso donde $\varepsilon > 1$y complementos cuando$\varepsilon < 1$.
La intención del modelo es analizar cómo cambia la intensidad del uso de los bienes intermedios en la producción del bien final y su efecto sobre la utilidad del agente. En específico, cómo varía el grado de sustitución del bien sucio por el bien limpio, cuando se presentan condiciones favorables para su mayor demanda. Por este motivo, consideramos únicamente los casos donde $\varepsilon > 1$.
Un claro ejemplo, puede ser el uso de energía fósil y solar. La energía fósil tiene costos más bajos de almacenamiento y transporte (**check con datos**), es por esto que es relativamente más utilizada que la energía renovable. Sin embargo, si la producción de energía renovable tuviese un menor costo, se sustituiría el uso de energía fósil, ya que se pueden obtener los mismos servicios de producción a partir de energías alternativas con menor contaminación

2.1.2 Bienes intermedios:

La función de producción del bien intermedio sucio es:

$$y_t^d = \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha}$$

donde A^d es la productividad del trabajo, k_t^d el capital asignado y l_t^d el trabajo asignado al sector sucio.

La función de producción del bien intermedio limpio es:

$$y_t^c = (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

donde A^ces la productividad del trabajo, k_t^c el capital asignado y l_t^c el trabajo asignado al sector limpio.
Notemos que la productividad A^s, donde $s = (c, d)$, es constante en todos los periodos $\forall t \in (0, \infty)$.

Para nuestro modelo suponemos que $A^d > A^c$, es decir, el bien sucio es relativamente más barato que el bien limpio.

Vamos a partir del supuesto de que hay libre movilidad de recursos: los precios de la mano de obra y del capital son iguales en ambos sectores.

$$w_t^d = w_t^c$$

$$r_t^d = r_t^c$$

2.1.3 Vaciamiento de mercado:

Las condiciones de vaciamiento de mercado en el mercado de trabajo y capital son:

$$l_t^d + l_t^c = l$$

$$k_t^d + k_t^c = k_t$$

donde l es la dotación fija de trabajo y k_t es el stock de capital $\forall t \in (0, \infty)$.

Además, la condición de vaciamiento de mercado en el mercado de bienes implica que:

$$c_t + x_t = y_t$$

donde x_t es inversión en bienes de capital, c_t es consumo del bien final e y_t es producción del bien final.

2.1.4 Evolución del capital:

La ecuación de la evolución del stock de capital es:

$$k_{t+1} = (1 + \delta)k_t + x_t$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital.

2.2 Agente representativo:

La función de utilidad del agente representativo es:

$$u(c_t, S_t) = \varphi\, log\, log\, (c_t)\ + (1-\varphi) log\, (S_t)$$

Cumple con las siguientes condiciones:

- Depende positivamente de la calidad del aire S_t y del consumo c_t.
- Dos veces diferenciable contra ambos argumentos.
- Cóncava en c_t y S_t.
- Separable en c_t y S_t.
- $\lim_{c \to \downarrow 0} \frac{\delta u}{\delta c} = \infty$
- $\lim_{s \to \downarrow 0} \frac{\delta u}{\delta S} = \infty$

2.3 El medioambiente y la externalidad:

Finalmente, la calidad del medioambiente (el grado de pureza del aire) evoluciona según la siguiente ecuación:

$$S_{t+1} = S^{*} + \left(1 - \mu\, y_t^d\right) S_t$$

La primera parte de esta ecuación representa un flujo de regeneración del oxígeno S^{*}. En un caso práctico lo podríamos ver como las emisiones de oxígeno generadas por la flora/vegetación en cada período. La segunda parte de la ecuación explica la degradación de la calidad del medioambiente causada por la producción del bien sucio, a una tasaμ. Esto podría ser representado por las emisiones de dióxido de carbono y otros gases contaminantes causadas por el uso de energía fósil. Asumiendo que $S_t \epsilon (0, \bar{S})$. Donde $\bar{S}$ es la mejor calidad medioambiental a la que se puede aspirar.

3. Equilibrio

<u>Proposición 1</u>: Por el Primer Teorema del Bienestar, se cumple que el problema del Cuasi-Planificador (ignora la externalidad medioambiental) resuelve el equilibrio competitivo.

Para demostrar que los problemas son análogos, comprobamos que existe un conjunto de multiplicadores de Lagrange que hacen que el sistema de ecuaciones que surge del problema del Cuasi-Planificador sea equivalente al sistema de ecuaciones del equilibrio competitivo.

En las próximas dos secciones del trabajo se demuestra la proposición.

3.1 Definición de Equilibrio competitivo

El equilibrio competitivo en esta economía es una asignación $\{c_t, x_t, y_t, y_t^d, y_t^c, l_t^d, l_t^c, k_{t+1}, k_t^d, k_t^c, S_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ y precios $\{p_t, p_t^d, p_t^c, w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ tales que, dada la condición inicial $\{k_0\}$:

- El agente representativo maximiza su utilidad sujeto a la restricción presupuestaria
- Las firmas maximizan beneficios
- Los mercados se vacían

3.2 Problema del agente representativo:

En el equilibrio competitivo, el agente resuelve:

$$\max_{c_t, k_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\varphi \, log \, log \, (c_t) \, + (1-\varphi) log \, (S_t)]$$

s.a.

$$c_t + x_t = l \, w_t + r_t k_t$$

$$k_{t+1} = \, (1+\delta) k_t + x_t$$

donde c_t es el consumo del bien final. Combinando las dos restricciones llegamos a la siguiente restricción presupuestaria del agente:

$$c_t + \, k_{t+1} = l \, w_t + (r_t + 1 - \delta) k_t \qquad (1)$$

Derivando:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t[\varphi\, log\, log\, (c_t)\; + (1-\varphi) log\, (S_t)]$$
$$-\; \beta^t \widetilde{\lambda_t}[c_t + k_{t+1} - lw_t - (r_t + 1 - \delta)k_t]$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(c_t): \frac{\varphi}{c_t} = \widetilde{\lambda_t} \tag{2}$$

$$(k_{t+1}): \beta^{t+1}\, \widetilde{\lambda_{t+1}}(r_{t+1} + 1 - \delta) = \; \beta^t \widetilde{\lambda_t} \tag{3}$$

$$(\widetilde{\lambda_t}\;): c_t + k_{t+1} = lw_t + (r_t + 1 - \delta)k_t$$

$$\text{Condición de Transversalidad: } lim_{t\to\infty}\beta^t u_c(c_t, S_t)k_{t+1} = 0 \tag{4}$$

Utilizando las ecuaciones (2) y (3) llegamos a la ecuación de Euler:

$$c_{t+1} = \;\; \beta\, c_t(r_{t+1} + 1 - \delta)$$

3.3 Problema de las firmas de bienes intermedios:

3.3.1 Problema de la firma del bien sucio:

Las firmas maximizan beneficios:

$$\max_{k_t^d, l_t^d} \sum_{t=0}^{\infty} p_t^d\, y_t^d - w_t l_t^d - r_t k_t^d$$

s.a.

$$y_t^d = \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha} \tag{5}$$

Derivando

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^d\, \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha} - w_t l_t^d - r_t k_t^d$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(k_t^d): (\alpha)\left(p_t^d\right)\left(k_t^d\right)^{\alpha-1}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha} = r_t \tag{6}$$

$$(p_t^d) Pmg_t^{k^d} = \; r_t$$

$$(l_t^d): (1-\alpha)\left(p_t^d\right)\left(k_t^d\right)^{\alpha}\, (A^d)^{1-\alpha}\left(l_t^d\right)^{-\alpha} = w_t \tag{7}$$

$$(p_t^d) Pmg_t^{l^d} = \; w_t$$

3.3.2 Problema de la firma del bien limpio:

Las firmas maximizan beneficios:

$$\max_{k_t^c, l_t^c} \sum_{t=0}^{\infty} p_t^c\, y_t^c - w_t l_t^c - r_t k_t^c$$

s.a.

$$y_t^c = (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha} \tag{8}$$

Derivando

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^c\, (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha} - w_t l_t^c - r_t k_t^c$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(k_t^c): (\alpha)(p_t^c)(k_t^c)^{\alpha-1}\,(A^c l_t^c)^{1-\alpha} = r_t \tag{9}$$

$$(p_t^c) Pmg_t^{k^c} = r_t$$

$$(l_t^c): (1-\alpha)(p_t^c)(k_t^c)^{\alpha}\,(A^c)^{1-\alpha}(l_t^c)^{-\alpha} = w_t \tag{10}$$

$$(p_t^c) Pmg_t^{l^c} = w_t$$

3.4 Problema de la firma del bien final:

La firma productora del bien final maximiza beneficios:

$$\max_{y_t^d, y_t^c} \sum_{t=0}^{\infty} p_t y_t - p_t^d\, y_t^d - p_t^c y_t^c$$

s.a.

$$y_t = \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{11}$$

Derivando

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - p_t^d\, y_t^d - p_t^c y_t^c$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(y_t^d): p_t\left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} (y_t^d)^{\frac{-1}{\varepsilon}} = p_t^d \tag{12}$$

$$p_t\left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = p_t^d$$

$$(y_t^c): p_t\left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} (y_t^c)^{\frac{-1}{\varepsilon}} = p_t^c \tag{13}$$

$$p_t\left(\frac{y_t}{y_t^c}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = p_t^c$$

Las ecuaciones de consistencia agregada del capital y trabajo y (1) a (13) resuelven el equilibrio competitivo de la economía.

4. Problema del Cuasi-Planificador

El problema del Cuasi-Planificador busca maximizar la utilidad del agente representativo, sujeto a las restricciones de la economía, sin internalizar la externalidad. Esto implica no tener en cuenta que el estado del medioambiente impacta en la utilidad del agente. En otras palabras, el planificador no elige S_{t+1}

$$\max_{c_t, k_{t+1}, y_t, y_t^d, y_t^c, l_t^c, k_t^c, l_t^d, k_t^d} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, S_t)$$

Donde $u(c_t, S_t) = \varphi\ log\ (c_t) + (1-\varphi) log(S_t)$.

s.a.

$$y_t = \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$y_t^d = \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha}$$

$$y_t^c = (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

$$l_t^d + l_t^c = l$$

$$k_t^d + k_t^c = k_t$$

$$c_t + k_{t+1} = y_t + k_t(1-\delta)$$

$$S_{t+1} = \{[S^* + (1-\mu\, y_t^d)S_t]; \bar{S}\}$$

Derivando:

$$\mathcal{L} = \beta^t[\varphi\, log \log(c_t) + (1-\varphi)S_t\,] - \beta^t\lambda_t[c_t + k_{t+1} - y_t - k_t(1-\delta)]$$

$$-\beta^t\eta_t^y\left[y_t^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} - (y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]$$

$$-\beta^t\eta_t^d\left[y_t^d - \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha}\right]$$

$$-\beta^t\eta_t^c[y_t^c - (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha}]$$

$$+\beta^t\omega_t^l[l - l_t^d - l_t^c] + \beta^t\omega_t^k[k_t - k_t^d - k_t^c]$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(c_t): \frac{\varphi}{c_t} = \lambda_t \tag{14}$$

$$(k_{t+1}): \beta\,[\lambda_{t+1}(1-\delta) + \omega_{t+1}^k] = \lambda_t \tag{15}$$

$$(y_t): \eta_t^y\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}y_t^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda_t \tag{16}$$

$$(y_t^d): \eta_t^y\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(y_t^d\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} = \eta_t^d \tag{17}$$

$$(y_t^c): \eta_t^y\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}(y_t^c)^{\frac{-1}{\varepsilon}} = \eta_t^c \tag{18}$$

$$(l_t^d): \eta_t^d(1-\alpha)\frac{y_t^d}{l_t^d} = \omega_t^l \tag{19}$$

$$\eta_t^d Pmg_t^{l^d} = \omega_t^l$$

$$(l_t^c): \eta_t^c(1-\alpha)\frac{y_t^c}{l_t^c} = \omega_t^l \tag{20}$$

$$\eta_t^c Pmg_t^{l^c} = \omega_t^l$$

$$(k_t^d): \eta_t^d \alpha \, \frac{y_t^d}{k_t^d} = \omega_t^k$$
$$\eta_t^d Pmg_t^{k^d} = \omega_t^k \tag{21}$$

$$(k_t^c): \eta_t^c \alpha \, \frac{y_t^c}{k_t^c} = \, \omega_t^k \tag{22}$$

$$\eta_t^c Pmg_t^{l^c} = \omega_t^k$$

Las ecuaciones de consistencia agregada del capital y trabajo, las restricciones y las ecuaciones (14)-(22) resuelven el el problema del Cuasi-Planificador.

<u>Demostración 1</u>: Se probará que las condiciones de primer orden del equilibrio competitivo son equivalentes a las condiciones del problema del planificador que no elije S_{t+1}. Por lo tanto, ambos problemas son equivalentes.

Tomando la ecuación (8) del equilibrio competitivo:

$$(p_t^d) Pmg_t^{k^d} = \, r_t$$

y la (21) del problema del planificador:

$$\eta_t^d Pmg_t^{k^d} = \omega_t^k$$

Haciendo (8)/(21):

$$\frac{r_t}{p_t^d} = \, \frac{\omega_t^k}{\eta_t^d} \tag{23}$$

Luego, tomando la ecuación (12) del equilibrio competitivo:

$$p_t \left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \, p_t^d$$

y la (17) del problema del planificador:

$$\eta_t^y \left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \, \eta_t^d$$

Haciendo (12)/(17):

$$\left(\frac{p_t^d}{p_t}\right) = \left(\frac{\eta_t^d}{\eta_t^y}\right)$$

Normalizando $p_t = 1$ y utilizando la ecuación (16) del problema del planificador:

$$\eta_t^y = \, \lambda_t$$

Obtenemos:

$$p_t^d = \left(\frac{\eta_t^d}{\lambda_t}\right) \tag{24}$$

Reemplazando (24) en (23):

$$r_t\lambda_t = \omega_t^k \tag{25}$$

Remplazando (25) en la ecuación (15) del problema del planificador:

$$\lambda_{t+1}(1-\delta) + \omega_{t+1}^k = \lambda_t$$

llegamos a: (26)

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}(1-\delta) + (r_{t+1}\lambda_{t+1})$$

que es igual a la ecuación (4) del equilibrio competitivo:

$$\widetilde{\lambda_{t+1}}(r_{t+1} + 1 - \delta) = \widetilde{\lambda}_t$$

Feasibility:

Tomando la RPI del agente:

$$c_t + k_{t+1} = w_t l + (r_t + 1 - \delta)k_t$$

y la restricción del planificador:

$$c_t + k_{t+1} = y_t + k_t(1-\delta)$$

Queremos probar que $y_t = w_t l + r_t k_t$:

$$c_t + k_{t+1} = y_t + k_t(1-\delta)$$

$$c_t + k_{t+1} - k_t(1-\delta) = y_t$$

Usando la ecuación (9) del problema de la firma del bien intermedio sucio:

$$(1-\alpha)\left(p_t^d\right)\left(\frac{k_t^d}{l_t^d}\right)^{\alpha}(A^d)^{1-\alpha} = w_t$$

Multiplicamos por l_t^d a ambos lados de la igualdad: (27)

$$(1-\alpha)\left(p_t^d y_t^d\right) = l_t^d w_t$$

Análogamente para el sector limpio: (28)

$$(1-\alpha)(p_t^c y_t^c) = l_t^c w_t$$

Sumando (27) y (28) llegamos a que:

$$w_t\left(l_t^c + l_t^d\right) = (1-\alpha)\left(p_t^c y_t^c + p_t^d y_t^d\right) \tag{29}$$

Usando la ecuación (8) del problema de la firma del bien intermedio sucio:

$$\alpha \left(p_t^d\right)\left(\frac{A^d l_t^d}{k_t^d}\right)^{1-\alpha} = r_t$$

Multiplicamos por k_t^d a ambos lados de la igualdad:

$$(\alpha)\left(p_t^d y_t^d\right) = k_t^d r_t \tag{30}$$

Analogamente para el sector limpio:

$$(\alpha)\left(p_t^c y_t^c\right) = k_t^c r_t \tag{31}$$

Sumando (30) y (31) llegamos a que:

$$r_t\left(k_t^c + k_t^d\right) = (\alpha)\left(p_t^c y_t^c + p_t^d y_t^d\right) \tag{32}$$

Luego, sumando (29) y (32) llegamos a que:

$$w_t l + r_t k_t = \left(p_t^c y_t^c + p_t^d y_t^d\right) = y_t$$

Debido a que los beneficios de la firma final son iguales a cero es que podemos decir que $\left(p_t^c y_t^c + p_t^d y_t^d\right) = y_t$.

Luego, probamos que $y_t = w_t l + r_t k_t$ y por lo tanto, el Equilibrio Competitivo cumple con la condicion de factibilidad del cuasi-Problema del Planificador:

$$c_t + k_{t+1} - k_t(1-\delta) = y_t$$

Por lo tanto, probamos que la asignacion es idéntica en ambos casos.

<u>Teorema 1:</u> Resolver equilibrio competitivo es analogo a resolver el cuasi problema del planificador.

4.1.1 Estado estacionario:

Ahora pasaremos a resolver el estado estacionario.

Primero definiremos la función de utilidad:

$$u(c,S) = \varphi \log(c_t) + (1-\varphi)\log(S_t)$$

Por lo que la derivada contra el consumo es igual a:

$$uc(c,S) = \frac{\varphi}{c_t}$$

Luego, vamos a buscar los valores de estado estacionario para el equilibrio competitivo. Dado que en estado estacionario $t = t+1$ podemos definir a los valores de estado estacionario como las variables con barra arriba:

$$\frac{\varphi}{\bar{c}} = \bar{\lambda} \tag{33}$$

$$\bar{\lambda} = \beta\left[\bar{\lambda}(1-\delta) + \overline{\omega^k}\right] \tag{34}$$

$$\bar{\lambda}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\overline{y^d}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} = \overline{\eta^d} \tag{35}$$

$$\bar{\lambda}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\overline{y^c}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}} = \overline{\eta^c} \tag{36}$$

$$\overline{\eta^d}\,(1-\alpha)\frac{\overline{y^d}}{\overline{l^d}} = \overline{\omega^l} \tag{37}$$

$$\overline{\eta^c}\,(1-\alpha)\frac{\overline{y^c}}{\overline{l^c}} = \overline{\omega^l} \tag{38}$$

$$\overline{\eta^d}\,(1-\alpha)\frac{\overline{y^d}}{\overline{k^d}} = \overline{\omega^k} \tag{39}$$

$$\overline{\eta^d}\,(1-\alpha)\frac{\overline{y^c}}{\overline{k^c}} = \overline{\omega^k} \tag{40}$$

$$\bar{c} + \bar{k} - \bar{y} - (1-\delta)\bar{k} = 0 \tag{41}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \left(\overline{y^d}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \left(\overline{y^c}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \tag{42}$$

$$\overline{y^d} = \left(A^d\right)^{1-\alpha}\left(\overline{k^d}\right)^{\alpha}\left(\overline{l^d}\right)^{1-\alpha} \tag{43}$$

$$\overline{y^c} = \left(A^c\right)^{1-\alpha}\left(\overline{k^c}\right)^{\alpha}\left(\overline{l^c}\right)^{1-\alpha} \tag{44}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c} \tag{45}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c} \tag{46}$$

$$\bar{S} = S^{*} + \left(1 - \mu\overline{y^{d}}\right)\bar{S} \tag{47}$$

Vamos a simplificar el sistema de ecuaciones. Primero, vamos a deshacernos de η^{y} reemplazando la ecuación (34) en la ecuación (35) y (36). Llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\bar{\lambda}\left(\frac{\bar{y}}{\overline{y^{d}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \overline{\eta^{d}}$$

$$\bar{\lambda}\left(\frac{\bar{y}}{\overline{y^{c}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \overline{\eta^{c}}$$

Además, vamos a eliminar ω^{l} y ω^{k}reemplazando sus valores en las otras ecuaciones. Con estos cambios, el sistema de ecuaciones queda:

$$\frac{\varphi}{\bar{c}} = \bar{\lambda}$$

$$1 = \beta\left[(1-\delta) + \overline{\eta^{c}}\alpha\frac{\overline{y^{c}}}{\overline{k^{c}}}\right] \tag{48}$$

$$\bar{\lambda}\left(\frac{\bar{y}}{\overline{y^{d}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \overline{\eta^{d}} \tag{49}$$

$$\bar{\lambda}\left(\frac{\bar{y}}{\overline{y^{c}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \overline{\eta^{c}} \tag{50}$$

$$\overline{\eta^{d}}\frac{\overline{y^{d}}}{\overline{l^{d}}} = \overline{\eta^{c}}\frac{\overline{y^{c}}}{\overline{l^{c}}} \tag{51}$$

$$\overline{\eta^{d}}\frac{\overline{y^{d}}}{\overline{k^{d}}} = \overline{\eta^{c}}\frac{\overline{y^{c}}}{\overline{k^{c}}} \tag{52}$$

$$\bar{c} + \bar{k} - \bar{y} - (1-\delta)\bar{k} = 0$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \left(\overline{y^{d}}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \left(\overline{y^{c}}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

$$\bar{S} = S^* + \left(1 - \mu\overline{y^d}\right)\bar{S}$$

Luego, nos vamos a deshacer de los multiplicadores η^d y η^c. Entonces, el sistema de ecuaciones queda:

$$\frac{\varphi}{\bar{c}} = \bar{\lambda}$$

$$1 = \beta\left[(1-\delta) + \left(\frac{\bar{y}}{\overline{\overline{y^c}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha \frac{\overline{y^c}}{\overline{\overline{k^c}}}\right] \tag{53}$$

$$\frac{\overline{y^d}}{\overline{\overline{k^d}}}\left(\frac{\bar{y}}{\overline{\overline{y^d}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\overline{y^c}}{\overline{\overline{k^c}}}\left(\frac{\bar{y}}{\overline{\overline{y^c}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \tag{54}$$

$$\frac{\overline{y^d}}{\overline{l^d}}\left(\frac{\bar{y}}{\overline{\overline{y^d}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\overline{y^c}}{\overline{l^c}}\left(\frac{\bar{y}}{\overline{\overline{y^c}}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \tag{55}$$

$$\bar{c} + \bar{k} - \bar{y} - (1-\delta)\bar{k} = 0$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

$$\bar{S} = S^* + \left(1 - \mu\overline{y^d}\right)\bar{S}$$

Por lo tanto, tenemos 11 ecuaciones con 11 incógnitas: $S, \lambda, c, y, y^d, y^c, k^d, k^c, k, l^d, l^c$.
Reescribimos el sistema de ecuaciones como:

$$\frac{\varphi}{\bar{c}} = \bar{\lambda}$$

$$1 = \beta\left[(1-\delta) + \left(\frac{\bar{y}}{\overline{y^c}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha \frac{\overline{y^c}}{\overline{k^c}}\right] \quad (56)$$

$$\left(\overline{y^d}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\left(\overline{y^c}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \quad (57)$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}} \quad (58)$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k} \quad (59)$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \left(\overline{y^d}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \left(\overline{y^c}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

$$\bar{S} = S^* + \left(1 - \mu\overline{y^d}\right)\bar{S}$$

O bien:

$$\frac{\varphi}{\bar{c}} = \bar{\lambda}$$

$$1 = \beta\left[(1-\delta) + (\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}\alpha\frac{\overline{y^c}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{k^c}}\right] \tag{60}$$

$$\left(\overline{y^d}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}}\left(\overline{y^c}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{\overline{l^c}}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \left(\overline{y^d}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \left(\overline{y^c}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

$$\bar{S} = \frac{S^*}{\mu\overline{\overline{y^d}}} \tag{61}$$

Ahora pasaremos a resolver el sistema de ecuaciones. Dado $\overline{y^d}$ la ecuación (61) determina $\bar{S}$. Dado $\bar{S}$y $\bar{c}$, la ecuación (33) determina $\bar{\lambda}$. Por lo tanto, por ahora, nos deshacemos de las ecuaciones (61) y (33). Entonces, el sistema de ecuaciones queda:

$$\frac{1}{\beta} - 1 + \delta = (\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha \frac{(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{k^c}}$$

$$\overline{y^d} = \left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \overline{y^c} \tag{62}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

Reemplazando $\overline{y^d}$ (ecuación(62)) en todas las demás ecuaciones:

$$\frac{1}{\beta} - 1 + \delta = (\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha \frac{(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{k^c}}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \left[\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} + 1\right] (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \tag{63}$$

$$\left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \overline{y^c} = \left(\overline{k^d}\right)^{\alpha} \left(A^d \overline{l^d}\right)^{1-\alpha} \tag{64}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha} (\overline{k^c})^{\alpha} (\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

O bien:

$$\frac{1}{\beta} - 1 + \delta = (\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha \frac{(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{k^c}}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta \bar{k}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \frac{\overline{k^c}}{\bar{k}} = (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\bar{y} = \overline{y^c} \left[\frac{\overline{k^c} + \overline{k^d}}{\overline{k^c}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{64}$$

$$\left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \overline{y^c} = \left(\overline{k^d}\right)^{\alpha} \left(A^d \overline{l^d}\right)^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha} (\overline{k^c})^{\alpha} (\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

Reescribimos la ecuación (64):

$$\overline{y^c} = \bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k^c} + \overline{k^d}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{65}$$

Reemplazando $\overline{y^c}$ en el resto de las ecuaciones:

$$\frac{1}{\beta} - 1 + \delta = (\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha \frac{\left(\bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k^c} + \overline{k^d}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{k^c}} \tag{66}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta \bar{k}$$

$$\left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k^c} + \overline{k^d}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \left(\overline{k^d}\right)^{\alpha} \left(A^d \overline{l^d}\right)^{1-\alpha} \tag{67}$$

$$\bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k^c} + \overline{k^d}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = (A^c)^{1-\alpha} (\overline{k^c})^{\alpha} (\overline{l^c})^{1-\alpha} \tag{68}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

Ahora usando que $\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$, el sistema queda:

$$\frac{1}{\beta} - 1 + \delta = \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}} \tag{69}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\frac{\bar{c}}{\bar{k}} = \frac{\bar{y}}{\bar{k}} - \delta \tag{70}$$

$$\left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \left(\overline{k^d}\right)^{\alpha}\left(A^d\overline{l^d}\right)^{1-\alpha} \tag{71}$$

$$\bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = (\overline{k^c})^{\alpha}(A^c\overline{l^c})^{1-\alpha} \tag{72}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

La ecuación (69) determina el ratio de output/trabajo:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{k}} = \frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha} \tag{73}$$

Reemplazando (73) en (70):

$$\frac{\bar{c}}{\bar{k}} = \frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha} - \delta$$

$$\frac{\bar{c}}{\bar{k}} = \frac{\beta^{-1} - 1 + (1-\alpha)\delta}{\alpha}$$

$$\bar{c} = \bar{k}\left[\frac{\beta^{-1} - 1 + (1-\alpha)\delta}{\alpha}\right] \tag{74}$$

Por lo tanto, dado $\bar{k}$ la ecuación (74) determina el consumo de estado estacionario. Luego, escribimos el sistema como:

$$\bar{y} = \bar{k}\left[\frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha}\right] \tag{75}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{\bar{k}}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \left(\overline{k^d}\right)^{\alpha}\left(A^d\overline{l^d}\right)^{1-\alpha}$$

$$\bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \left(\overline{k^c}\right)^{\alpha}\left(A^c\overline{l^c}\right)^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

Dividiendo (71) por (72):

$$\bar{y} = \bar{k}\ \left[\frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha}\right]$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}}\right)^{\alpha}\left(\frac{A^d\overline{l^d}}{A^c\overline{l^c}}\right)^{1-\alpha} \tag{76}$$

$$\bar{y}\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \left(\overline{k^c}\right)^{\alpha}\left(A^c\overline{l^c}\right)^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

Reescribiendo la ecuación (72):

$$\frac{\bar{y}}{\bar{\bar{k}}}\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{\bar{k}}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\left(\frac{\overline{l^c}}{\overline{\overline{k^c}}}\right)^{1-\alpha}\ (A^c)^{1-\alpha} \tag{77}$$

Reemplazando por la expresión $\frac{\bar{y}}{\bar{k}}$ tenemos:

$$\left(\frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha}\right)\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} = \left(\frac{\overline{l^c}}{\overline{k^c}}\right)^{1-\alpha} (A^c)^{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha}\right)\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{l^c}}{\overline{k^c}}\right)^{1-\alpha} (A^c)^{1-\alpha} \tag{78}$$

Por lo tanto, el sistema queda:

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\left(\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\right)^{\frac{\varepsilon-\alpha(\varepsilon-1)}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{A^d}{A^c}\right)^{1-\alpha} \tag{79}$$

$$\left(\frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha}\right)\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{l^c}}{\overline{k^c}}\right)^{1-\alpha} (A^c)^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^c}\left[1+\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right] \tag{80}$$

$$\overline{k} = \overline{k^c}\left[1+\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\right] \tag{81}$$

La ecuación (58) resuelve $\overline{k^d}$:

$$\overline{k^d} = \overline{k^c}\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}} \tag{82}$$

Reemplazando la ecuación (82) en el sistema:

$$\left(\frac{\overline{k^c}\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}}{\overline{k^c}}\right)^{\frac{\varepsilon-\alpha(\varepsilon-1)}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{A^d}{A^c}\right)^{1-\alpha} \tag{83}$$

$$\left(\frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha}\right)\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{l^c}}{\overline{k^c}}\right)^{1-\alpha} (A^c)^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^c}\left[1+\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right]$$

$$\bar{k} = \overline{k^c}\left[1+\frac{\overline{k^c}\,\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}}{\overline{k^c}}\right] \tag{84}$$

O bien:

$$\left(\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-\alpha} = \left(\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{A^d}{A^c}\right)^{1-\alpha} \tag{85}$$

$$\left(\frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha}\right)\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{l^c}}{\overline{k^c}}\right)^{1-\alpha} (A^c)^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^c}\left[1+\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right]$$

$$\bar{k} = \overline{k^c}\left[1+\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right] \tag{86}$$

Diviendo (80) por (86) y simplificando:

$$\left(\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{A^d}{A^c}\right)^{1-\alpha} \tag{87}$$

$$\left(\frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha}\right)\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{l^c}}{\overline{k^c}}\right)^{1-\alpha} (A^c)^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^c}\left[1+\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right]$$

$$\frac{\bar{k}}{l} = \frac{\overline{k^c}}{\overline{l^c}} \tag{88}$$

La ecuación (87) determina el ratio de trabajo:

$$\frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}} = \left(\frac{A^d}{A^c}\right)^{(1-\alpha)(\varepsilon-1)} \tag{89}$$

Entonces, la ecuación (80) determina $\overline{l^c}$:

$$l = \overline{l^c}\left[1 + \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}\right]$$

$$l = \overline{l^c}\left[1 + \left(\frac{A^d}{A^c}\right)^{(1-\alpha)(\varepsilon-1)}\right]$$

$$\overline{l^c} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{A^d}{A^c}\right)^{(1-\alpha)(\varepsilon-1)}\right]} \tag{90}$$

Dado $\overline{l^c}$, obtenemos $\overline{l^d}$. Dado que conocemos $\overline{l^c}$, la ecuación (88) determina la relación entre $\overline{k^c}$ y $\overline{k^d}$:

$$\frac{\bar{k}}{l} = \frac{\overline{k^c}}{\overline{l^c}}$$

$$\overline{k^c} = \frac{\bar{k}}{l}\overline{l^c}$$

Reemplazando $\overline{k^c}$en la ecuación (78):

$$\left(\frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha}\right)\left[\frac{\frac{\bar{k}}{l}\overline{l^c}}{\bar{k}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{\overline{l^c}}{\frac{\bar{k}}{l}\overline{l^c}}\right)^{1-\alpha} (A^c)^{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha}\right)\left[\frac{\overline{l^c}}{l}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{l}{\bar{k}}\right)^{1-\alpha} (A^c)^{1-\alpha}$$

Y despejando $\bar{k}$:

$$\bar{k} = \frac{lA^c}{\left(\frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\overline{l^c}}{l}\right]^{\frac{1}{(\varepsilon-1)(1-\alpha)}}} \tag{1*}$$

Reemplazando la ecuación (1*) en el resto del sistema podemos resolver todo el estado estacionario. El valor de estado estacionario para $\underline{\lambda}$ es:

$$\bar{\lambda} = \frac{\varphi}{\bar{c}} \tag{2*}$$

4.2 Caso 2: Teniendo en cuenta la externalidad

En el caso donde se tiene en cuenta la externalidad, el planificador elije S_{t+1}.

$$max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\varphi \; log \; log \; (c_t) \; + (1-\varphi) log \; (S_t)] - \; \beta^t \lambda_t [c_t + \; k_{t+1} - y_t - \; k_t(1-\delta)]$$

$$- \beta^t \eta_t^y \left[y_t - \; \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \right]$$

$$- \beta^t \eta_t^d \left[y_t^d - \; \left(k_t^d\right)^{\alpha} \left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha} \right]$$

$$- \beta^t \eta_t^c [y_t^c - \; (k_t^c)^{\alpha} (A^c l_t^c)^{1-\alpha}] - \beta^t \kappa_t \left[S_{t+1} - S^* - \left(1 - \mu \; y_t^d\right) S_t\right]$$

$$+ \beta^t \omega_t^l [l - l_t^d - \; l_t^c] + \beta^t \omega_t^k [k_t - k_t^d - \; k_t^c]$$

Derivando:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\varphi log \; (c_t) \; + (1-\varphi) log \; (S_t)] - \; \beta^t \lambda_t [c_t + \; k_{t+1} - y_t - \; k_t(1-\delta)]$$

$$- \beta^t \eta_t^y \left[y_t - \; \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \right]$$

$$- \beta^t \eta_t^d \left[y_t^d - \; \left(k_t^d\right)^{\alpha} \left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha} \right]$$

$$- \beta^t \eta_t^c [y_t^c - \; (k_t^c)^{\alpha} (A^c l_t^c)^{1-\alpha}] - \beta^t \kappa_t \left[S_{t+1} - S^* - \left(1 - \mu \; y_t^d\right) S_t\right]$$

$$+ \beta^t \omega_t^l [l - l_t^d - \; l_t^c] + \beta^t \omega_t^k [k_t - k_t^d - \; k_t^c]$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(c_t) \colon \frac{\varphi}{c_t} = \; \lambda_t$$

$$(k_{t+1}) \colon \beta \; [\lambda_{t+1}(1-\delta) \; + \; \omega_{t+1}^k] = \; \lambda_t$$

$$(y_t) \colon \eta_t^y \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} (y_t)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \; \lambda_t$$

$$(y_t^d): \eta_t^y \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(y_t^d\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^d + \kappa_t \mu S_t$$

$$(y_t^c): \eta_t^y \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}(y_t^c)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^c$$

$$(l_t^d): \eta_t^d(1-\alpha)\frac{y_t^d}{l_t^d} = \omega_t^l$$

$$\eta_t^d Pmg_t^{l^d} = \omega_t^l$$

$$(l_t^c): \eta_t^c(1-\alpha)\frac{y_t^c}{l_t^c} = \omega_t^l$$

$$\eta_t^c Pmg_t^{l^c} = \omega_t^l$$

$$(k_t^d): \eta_t^d(\alpha)\frac{y_t^d}{k_t^d} = \omega_t^k$$

$$\eta_t^d Pmg_t^{k^d} = \omega_t^k$$

$$(k_t^c): \eta_t^c \alpha \frac{y_t^c}{k_t^c} = \omega_t^k$$

$$\eta_t^c Pmg_t^{l^c} = \omega_t^k$$

$$(S_{t+1}): \kappa_t = \beta\left[\tfrac{1-\varphi}{S_t} + \kappa_{t+1}^s(1-\mu y_{t+1}^d)\right]$$

Esto implica que el costo marginal de una unidad de calidad medioambiental en términos de utilidad en el periodo t (κ_t) es igual al beneficio marginal de consumir una unidad de calidad medioambiental en $t+1$ $\left(\frac{1-\varphi}{S_{t+1}}\right)$y la ganancia generada por no consumir la unidad de calidad medioambiental en t , en términos de utilidad $(\kappa_{t+1}\ (1-\mu\ y_{t+1}^d))$, traído a valor presente por el β

$$(\lambda_t): c_t + k_{t+1} - y_t - (1-\delta)k_t = 0$$

$$(\eta_t^y): (y_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$(\eta_t^d): y_t^d = \left(k_t^d\right)^\alpha\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha}$$

$$(\eta_t^c): y_t^c = (k_t^c)^\alpha(A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

$$(\omega_t^l): l = l_t^d - l_t^c$$

$$(\omega_t^k): k_t = k_t^d - k_t^c$$

$$(\kappa_t): S_{t+1} = \left[S^* + \left(1 - \mu\, y_t^d\right)S_t\right]$$

Luego resolvemos el sistema de ecuaciones, el estado estacionario y el sistema de ecuaciones loglinealizados[2].

5. Política Fiscal

5.1 Impuesto óptimo

Comparando el sistema de ecuaciones del problema del Planificador con las del Cuasi-Planificador, observamos que en la condición de primer orden con respecto a y_t^d, en el problema del planner, la externalidad introduce una brecha entre la productividad marginal y el precio relativo del input sucio en términos del bien final, representado por la siguiente ecuación:

$$\lambda_t \left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^d + \kappa_t \mu S_t$$

Entonces:

$$\left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\eta_t^d + \kappa_t \mu S_t}{\lambda_t}$$

$$Pmg\ (y_t^d) = \frac{\eta_t^d + \kappa_t \mu S_t}{\lambda_t}$$

Donde $\left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ es el producto marginal del bien sucio, $\frac{\eta_t^d}{\lambda_t}$ es el precio sombra de y_t^d relativo a y_t. El término $\frac{\kappa_t \mu S_t}{\lambda_t}$ es la bracha que se introduce entre el precio relativo y el producto marginal, que equivale al costo medioambiental de utilizar una unidad más de y_t^d, en términos de utilidad. Reescribiendo la ecuación como $Pmg\ \left(y_t^d\right) = \widehat{p_t^d}(1 + \frac{\kappa_t \mu S_t}{\widehat{p_t^d}\lambda_t})$, donde $\widehat{p_t^d} = \frac{\eta_t^d}{\lambda_t}$, podemos ver que este resultado equivale a imponer un impuesto $\Gamma = \frac{\kappa_t \mu S_t}{\eta_t^d}$ sobre el uso del bien sucio por parte de la firma productora del bien final.

[2] Ver el anexo

Esto significa que existe una política fiscal óptima tal que hace posible obtener las asignaciones Pareto óptimas internalizando la externalidad medioambiental característica del problema. Como podemos ver, la tasa del impuesto óptimo Γ depende positivamente del precio sombra de la calidad medioambiental, negativamente del precio sombra del bien sucio y positivamente de la tasa a la cual la producción del bien sucio degrada al medioambiente.

5.2 Definición de Equilibrio competitivo con política fiscal

Introducimos un gobierno que tiene como único propósito lograr la asignación eficiente en la economía. Es decir, busca que se internalice la externalidad que genera la calidad del medioambiente. Para ello, introduce un subsidio a la utilización de bien limpio por parte de la firma productora del bien final. Esta política fiscal se financia con un impuesto de suma fija al agente representativo.

Un equilibrio competitivo en esta economía es una asignación $\{c_t, x_t, y_t, y_t^d, y_t^c, l_t^d, l_t^c, k_{t+1}, k_t^d, k_t^c, S_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, precios $\{p_t, p_t^d, p_t^c, w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ y política fiscal $\{\tau, T_t\}$tales que, dada la condición inicial $\{k_0\}$:

- El agente representativo maximiza su utilidad sujeto a la restricción presupuestaria
- Las firmas maximizan beneficios
- Los mercados se vacían
- El gobierno cumple su restricción presupuestaria:

$$T_t = \tau_t[p_t^c y_t^c]$$

Donde T_t es un impuesto de suma fija, medido en unidades de bienes de consumo, que se cobra a los consumidores para subsidiar $(\tau y_t^c p_t^c)$ a la firma productora del bien final.

5.3 Problema del agente representativo:

El agente resuelve:

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, S_t)$$

s.a.

$$c_t + x_t + T_t = l\, w_t + r_t k_t$$

$$k_{t+1} = (1+\delta)k_t + x_t$$

donde c_t es el consumo del bien final. Combinando (1) y (2) llegamos a la restricción presupuestaria:

$$c_t + T_t + k_{t+1} = l\, w_t + (r_t + 1 - \delta)k_t \qquad (91)$$

Derivando:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, S_t) - \beta^t \widetilde{\lambda_t}[c_t + T_t + k_{t+1} - w_t - (r_t + 1 - \delta)k_t]$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden: (92)

$$(c_t): u_c(c_t, S_t) = \widetilde{\lambda_t}$$

$$(k_{t+1}): \beta\, \widetilde{\lambda_{t+1}}(r_{t+1} + 1 - \delta) = \widetilde{\lambda_t} \quad (93)$$

$$(\widetilde{\lambda_t}\,): c_t + T_t + k_{t+1} = l\, w_t + (r_t + 1 - \delta)k_t$$

Condición de Transversalidad: $lim_{t\to\infty}\beta^t u_c(c_t, S_t)k_{t+1} = 0$ (94)

Utilizando las ecuaciones (3) y (4) llegamos a la ecuación de Euler:

$$u_c(c_t, S_t) = \beta\, u_c(c_{t+1}, S_{t+1})\,(r_{t+1} + 1 - \delta)$$

Siendo $u(c_t, S_t) = \varphi \log \log (c_t) + (1-\varphi)\log (S_t)$, la ecuación de Euler para el consumo es:

$$c_{t+1} = \beta\, c_t(r_{t+1} + 1 - \delta)$$

5.4 Problema de las firmas de bienes intermedios:

5.4.1 Problema de la firma del bien sucio:

Las firmas maximizan beneficios:

$$\max_{k_t^d, l_t^d} \sum_{t=0}^{\infty} p_t^d\, y_t^d - w_t l_t^d - r_t k_t^d$$

s.a. (95)

$$y_t^d = \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha}$$

Derivando

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^d \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha} - w_t l_t^d - r_t k_t^d$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(k_t^d): (\alpha)\left(p_t^d\right)\left(k_t^d\right)^{\alpha-1}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha} = r_t \quad (96)$$

$$(p_t^d) Pmg_t^{k^d} = r_t$$

$$(l_t^d): (1-\alpha)\left(p_t^d\right)\left(k_t^d\right)^{\alpha}(A^d)^{1-\alpha}\left(l_t^d\right)^{-\alpha} = w_t \quad (97)$$

$$(p_t^d)Pmg_t^{l^d} = w_t$$

5.4.2 Problema de la firma del bien limpio:

Las firmas maximizan beneficios:

$$\max_{k_t^d, l_t^d} \sum_{t=0}^{\infty} p_t^c \, y_t^c - w_t l_t^c - r_t k_t^c$$

s.a.

$$y_t^c = (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha} \tag{98}$$

Derivando

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^c \, (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha} - w_t l_t^d - r_t k_t^d$$

Llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(k_t^c): (\alpha)(p_t^c)(k_t^c)^{\alpha-1} \, (A^c l_t^c)^{1-\alpha} = r_t$$

$$\alpha \, (p_t^c)\left(\frac{A^c l_t^c}{k_t^c}\right)^{1-\alpha} = r_t \tag{99}$$

$$(l_t^c): (1-\alpha)(p_t^c)(k_t^c)^{\alpha} \, (A^c)^{1-\alpha}(l_t^c)^{-\alpha} = w_t$$

$$(1-\alpha)(p_t^c)\left(\frac{k_t^c}{l_t^c}\right)^{\alpha} \, (A^c)^{1-\alpha} = w_t \tag{100}$$

5.5 Problema de la firma del bien final:

La firma que produce el bien final maximiza beneficios:

$$\max_{y_t^d, y_t^c} \sum_{t=0}^{\infty} p_t y_t - p_t^d \, y_t^d - (1-\tau)p_t^c y_t^c$$

s.a.

$$y_t = \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{101}$$

Derivando:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} p_t \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - p_t^d\, y_t^d - (1-\ \tau) p_t^c y_t^c$$

Llgamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$(y_t^d): p_t \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} (y_t^d)^{\frac{-1}{\varepsilon}} =\ p_t^d$$

$$p_t \left(\frac{y_t}{y_t^d} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} =\ p_t^d \qquad (102)$$

$$(y_t^c): p_t \left[(y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} (y_t^c)^{\frac{-1}{\varepsilon}} =\ p_t^c(1-\ \tau)$$

$$p_t \left(\frac{y_t}{y_t^c} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} =\ p_t^c(1-\ \tau) \qquad (103)$$

Combinando (102) y (103) obtenemos:

$$\left(\frac{y_t^c}{y_t^d} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} =\ \frac{p_t^d}{p_t^c(1-\tau)} \qquad (104)$$

En la ecuación (104) podemos observar la brecha que genera el subsidio τ, entre la tasa marginal de transformación entre los bienes intermedios $\left(\frac{y_t^c}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ y los precios relativos. En resumen, se encarece relativaente el uso del bien intermedio sucio con respecto al uso del bien intermedio limpio.

Las ecuaciones de consistencia agregada del capital y trabajo, la restricción del gobierno y las ecuaciones (91) a (103) resuelven el el problema del Cuasi-Planificador.

6. Calibración

En la siguiente sección reportamos los resultados de la calibración computada, para el estado estacionario del equilibrio competitivo y el problema del Planificador.

A continuación, explicamos la elección de los parámetros iniciales. Tomamos $\alpha = \frac{1}{3}$ para la participación del capital en la economía, basándonos en la elección de

Acemoglu et al. para su calibración[3]. Para la participación del consumo en la utilidad del agente suponemos $\varphi = \frac{3}{4}$. Justificamos esta elección porque el agente asigna un mayor peso en su utilidad al consumo que a la calidad medioambiental. Tomamos $\beta = \frac{1}{1+\rho} = 0.96$ como parámetro de la tasa de descuento, donde es la tasa de impaciencia del agente. En su trabajo, Acemoglu utiliza un valor de $\rho = 0.001$ y de $\rho = 0.015$ basándose en el debate entre Stern y Nordhaus en la parametrización de la tasa de impaciencia para un horizonte de largo plazo. Como estamos considerando un menor plazo de tiempo, un plazo anual en concreto, creemos más acorde utilizar una tasa de impaciencia del 4.16%, asumiendo un agente más impaciente y que prefiere el consumo presente. Para la depreciación del stock de capital tomamos un valor de $\delta = 0.1$, basándonos en la parametrización de Nordhaus (2008)[4]. Asignamos un valor de $\varepsilon = 2$ para el parámetro de la elasticidad de sustitución, recordando que tomábamos un valor $\varepsilon > 1$ para indicar que los bienes intermedios son sustitutos entre sí. Por último, imponemos que la productividad del bien intermedio sucio sea mayor a la productividad del limpio, $A^d = 2$ y $A^c = 1$.
Los resultados de estado estacionario que arroja la solución de nuestro modelo para el problema del equilibrio competitivo y el problema del planificador se presentan a continuación en la Tabla 1.

STEADY STATE VALUES

		QUASI-PLANNER	PLANNER
Output	=	6.384	5.475
Capital	=	15.021	10.687
Consumption	=	4.882	4.407
Output clean	=	0.954	1.288
Output dirty	=	2.403	1.452
Labor clean	=	0.386	0.585
Labor dirty	=	0.614	0.415
Capital clean	=	5.806	6.248
Capital dirty	=	9.216	4.439
Environment	=	6.658	11.016
lambda	=	0.154	0.170
kappa	=	-	0.199

Tabla 1

A partir de los resultados comprobamos que la utilidad en el problema del planificador es mayor a la utilidad en el problema de equilibrio competitivo. Cuando el problema internaliza la externalidad que genera el medio ambiente, cae el consumo del agente y la calidad del medioambiente es mayor. La producción total cae y notamos que la brecha entre la producción de ambos bienes intermedios se achica. Notamos que la asignación de los recursos capital y trabajo entre los dos sectores también migra al sector limpio en mayor proporción en el problema del planificador. Esto se debe a que el planificador toma en cuenta la externalidad del medioambiente y asigna

[3] Acemoglu, Daron, Philippe Aghion, Leonardo Bursztyn, and David Hemous. 2012. *"The Environment and Directed Technical Change."* American Economic Review, 102 (1): 131-66.
[4] Nordhaus, William, D. 2007. "*A Review of the Stern Review on the Economics of Climate Change.*" Journal of Economic Literature, 45 (3): 686-702.

eficientemente los recursos de la economía, y lo vemos reflejado en una mayor utilidad para el agente.

Calibrando el modelo sin considerar la externalidad medioambiental podemos ver cómo evolucionan las variables convergiendo al estado estacionario del equilibrio competitivo (Cuasi-Planner):

Figura 1

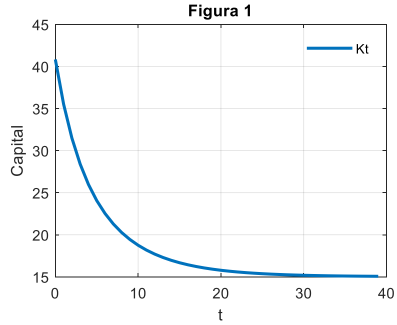


Figura 2

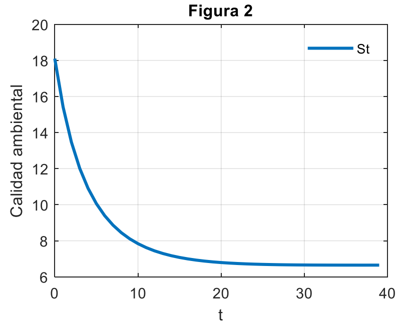


Figura 3

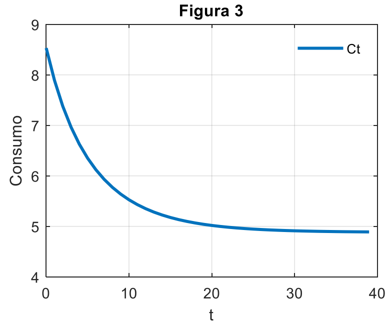


Figura 4

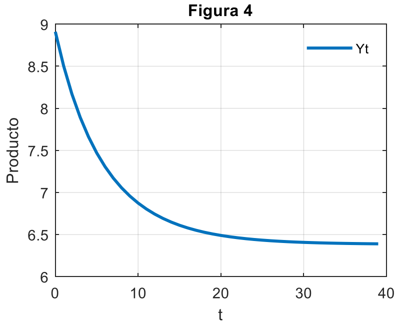


Figura 5

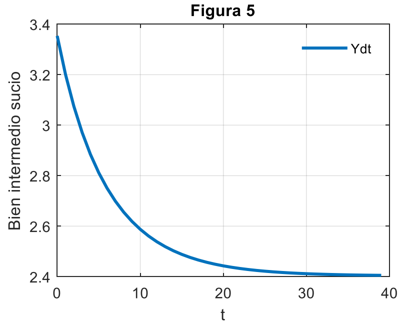


Figura 6

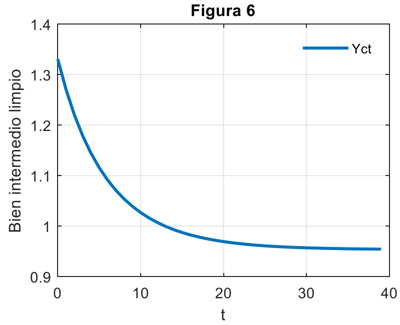


Figura 7

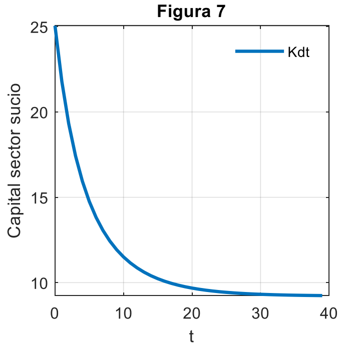


Figura 8

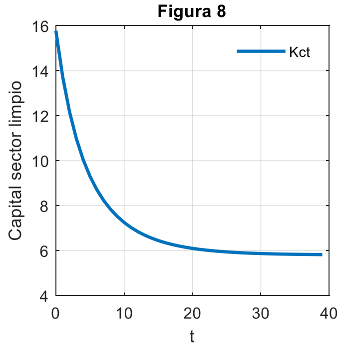


Figura 9

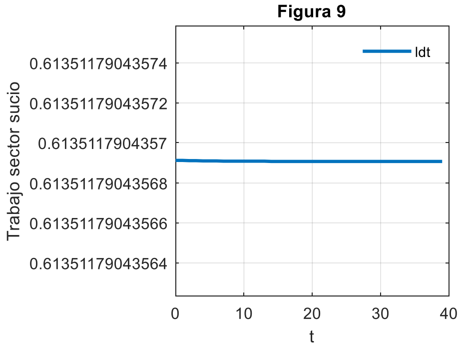
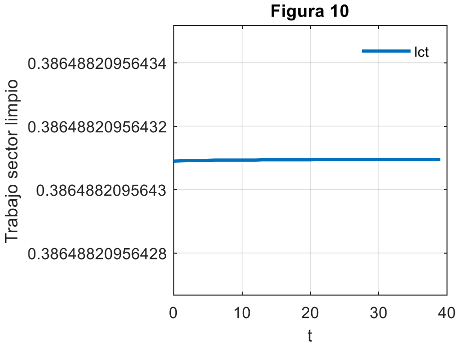


Figura 10



De los gráficos puede verificarse que en cada momento del tiempo se verifican las condiciones del equilibrio competitivo.

En segundo lugar, comparamos la evolución de las variables en el caso en que la elasticidad de sustitución entre los dos bienes intermedios, ε, es superior al caso estándar. Los siguientes gráficos muestran el caso estándar con ε = 2, representado en azul, y el caso con ε = 5, representado en naranja:

Figura 11

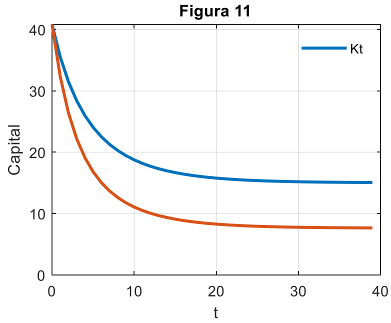


Figura 12

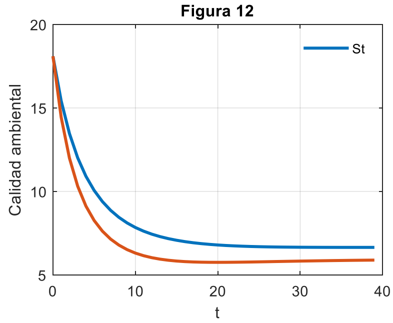


Figura 13

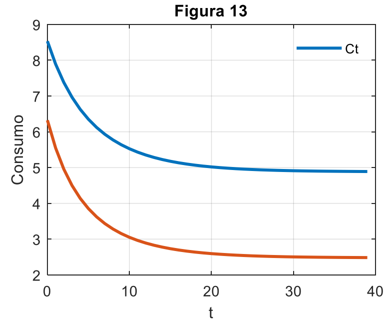


Figura 14

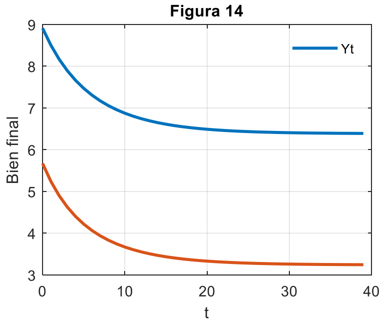


Figura 15

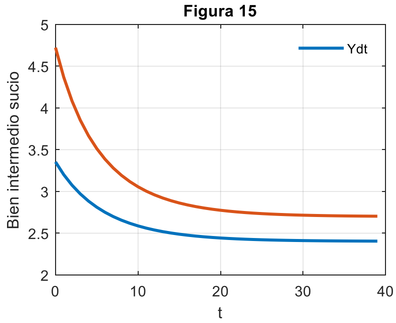


Figura 16

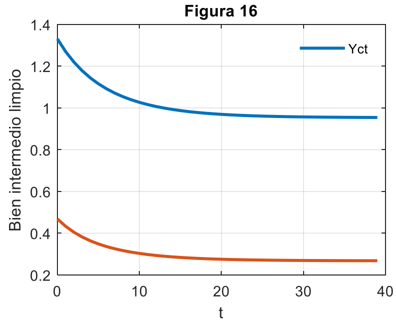


Figura 17

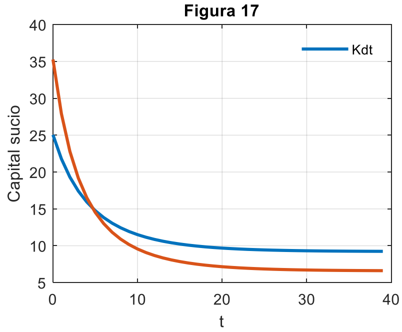


Figura 18

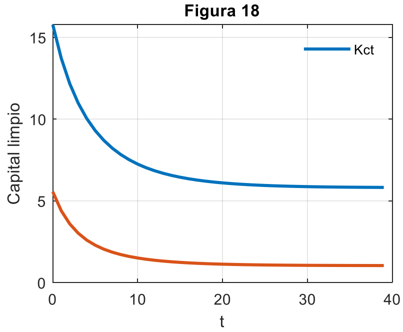


Figura 19

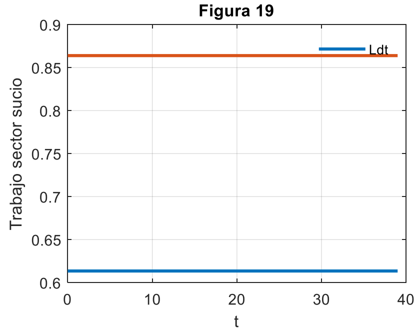
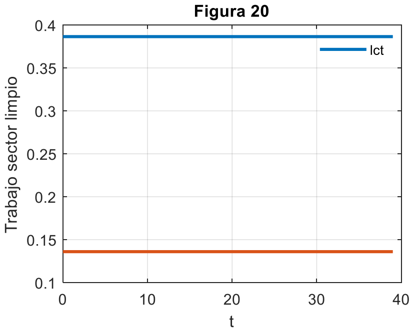


Figura 20



Como ε define la elasticidad de sustitución entre los bienes intermedios, al incrementarlo de 2 a 5 aumenta el nivel de sustitución entre el bien intermedio sucio y el bien intermedio limpio. Por lo tanto, como nos encontramos en el caso del equilibrio competitivo (equivalente al del cuasi-planner) sin política fiscal, se utilizará más del bien intermedio más productivo (el contaminante). Debido a esto, la producción del bien intermedio sucio se incrementa, empeorando así la calidad medioambiental, mientras que la producción del bien intermedio limpio cae. Sin embargo, como la producción del bien contaminante aumenta menos de lo que cae la producción del bien limpio, el resultado final es que la producción del bien final cae al igual que el consumo. Además, podemos ver que cambia la asignación de recursos entre los dos sectores: en ambos se emplea menos capital, mientras que hay una migración del empleo desde el sector limpio al sucio.

En tercer lugar, analizamos el caso en que la productividad en el sector limpio es más alta que en el caso estándar. En particular, consideramos $A^c = 1{,}5$, mientras que en el caso estándar $A^c = 1$. De esta manera, dejando todo lo demás constante, la productividad en el sector limpio relativa a la del sector sucio se incrementa. Los gráficos a continuación muestran la evolución de las variables en el escenario descripto ($A^c = 1{,}5$ en naranja, escenario base en azul):

Figura 21

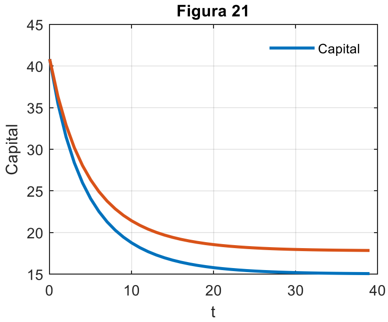


Figura 22

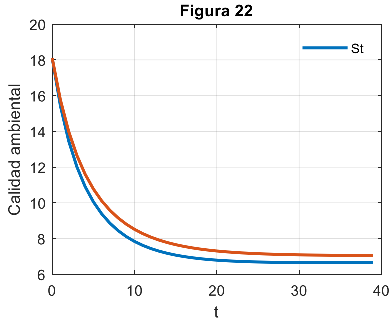


Figura 23

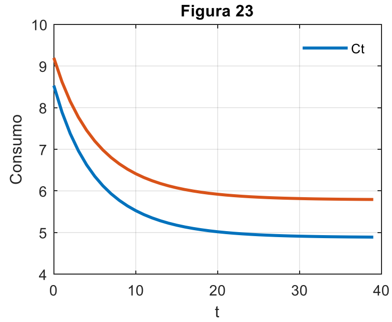


Figura 24

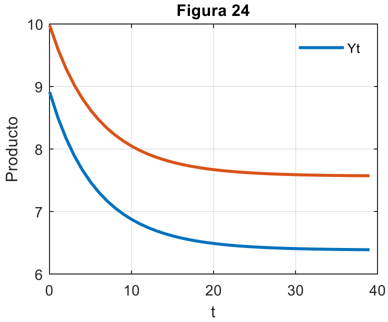


Figura 25

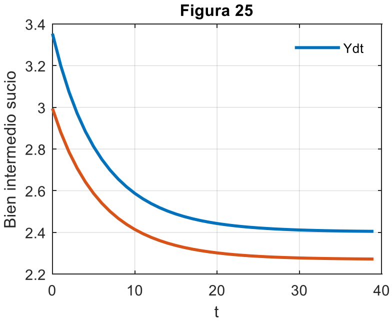


Figura 26

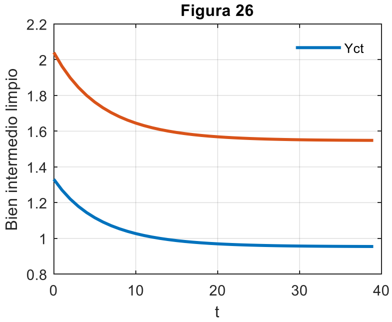


Figura 27

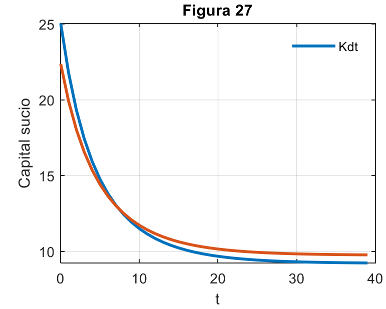


Figura 28

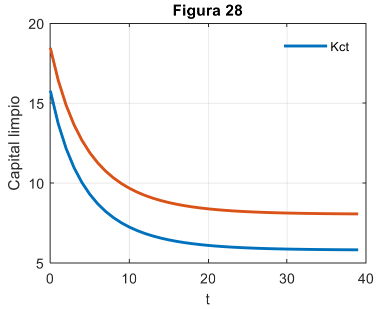


Figura 29

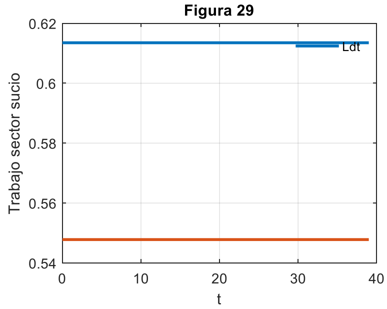
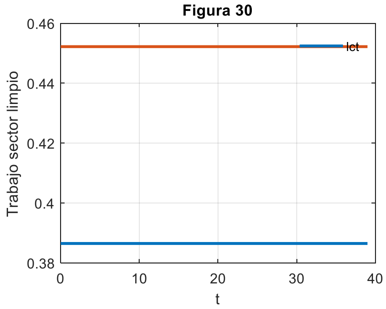


Figura 30



El shock implica una menor productividad del sector sucio relativa limpio. Por lo tanto, la producción del bien intermedio limpio aumenta comparada con el escenario base, mientras que la del sucio cae. Además, aumenta la utilidad del agente representativo debido al incremento en el consumo y en la calidad medioambiental. La mayor productividad del bien intermedio no contaminante genera que haya una migración del empleo hacia este sector y que también aumente la inversión en el sector limpio.

Por otro lado, tal como se observa en la Tabla 1, las variables de estado estacionario en el caso en que se considera la externalidad (problema del planificador) difieren del caso del equilibrio competitivo. En particular, la producción del bien limpio aumenta relativamente comparada con el caso del equilibrio competitivo, dado que el modelo plantea que el agente representativo deriva utilidad tanto del consumo como de la calidad ambiental. Contemplando esto, vamos a analizar de la misma manera la evolución de las variables del modelo en el caso en que se considera la externalidad. Los gráficos a continuación representan el caso estándar del planificador, calibrado con los valores detallados en la sección anterior, incluyendo el valor del impuesto óptimo:

Figura 31

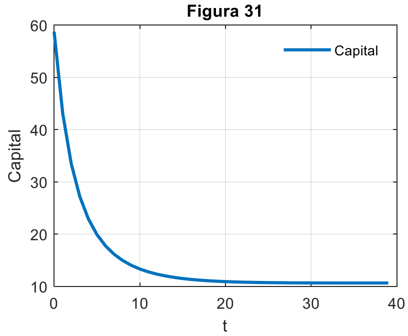


Figura 32

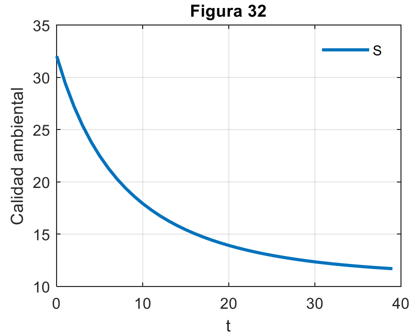


Figura 33

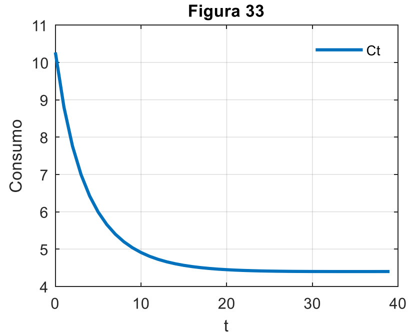


Figura 34

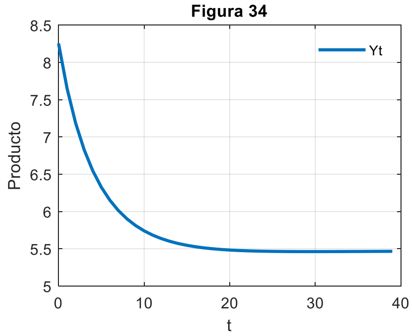


Figura 35

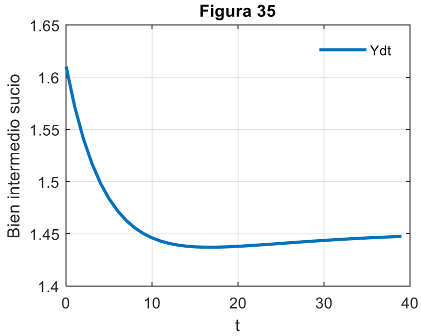


Figura 36

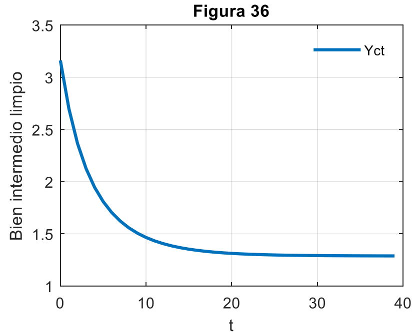


Figura 37

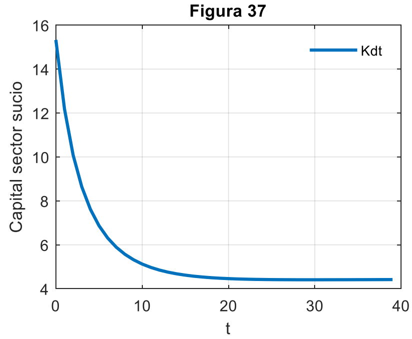


Figura 38

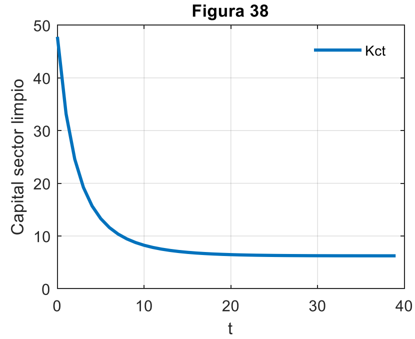


Figura 39

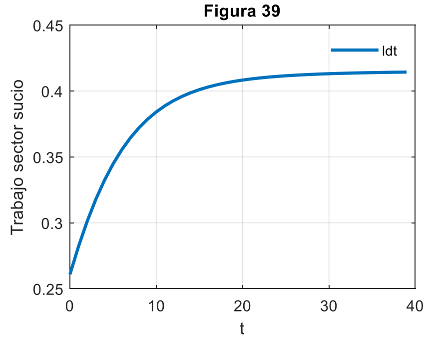


Figura 40

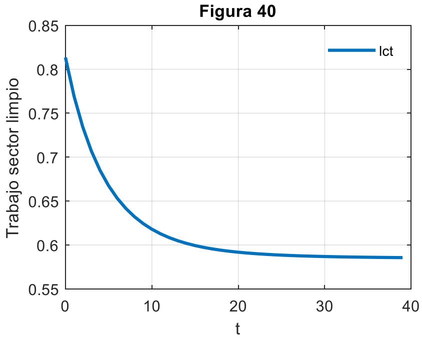
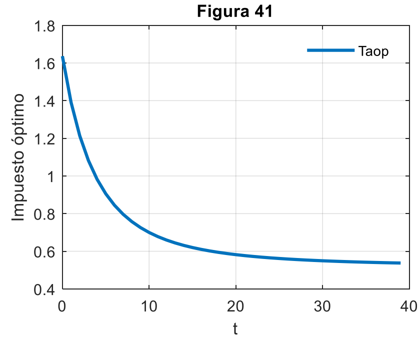
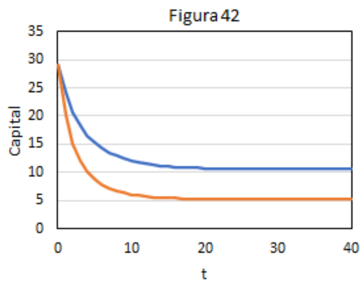


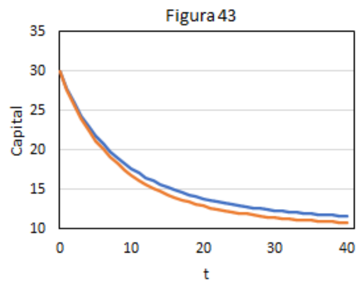
Figura 41

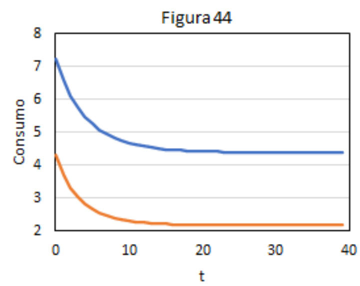


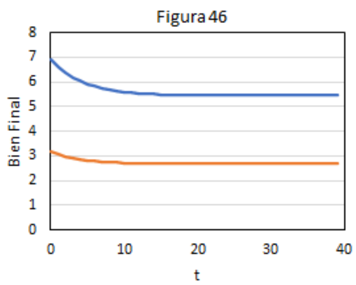
Notemos que el impuesto óptimo decrece con el tiempo.

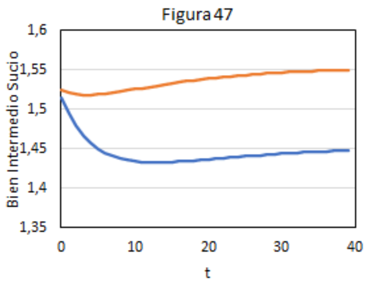
Ahora consideraremos las mismas alteraciones que en el caso del equilibrio competitivo para analizar como responden las variables. En primer lugar, analizamos el caso del planificador con una elasticidad de sustitución más alta (ε = 5). Los gráficos a continuación muestran la dinámica en este caso (en naranja) comparado con el caso estándar (en azul):

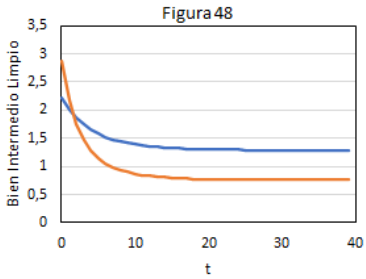


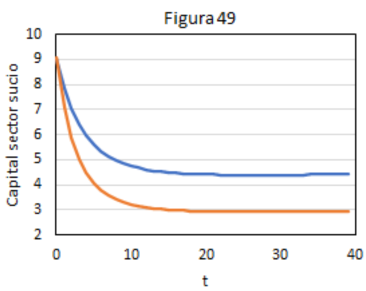


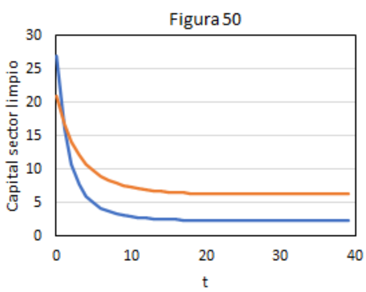


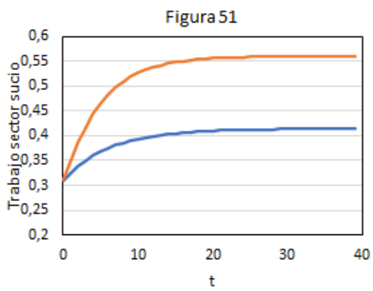


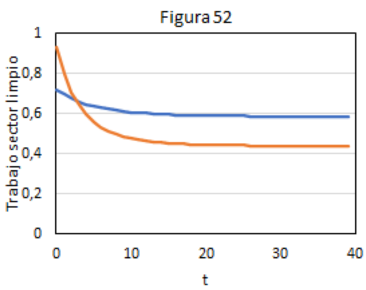


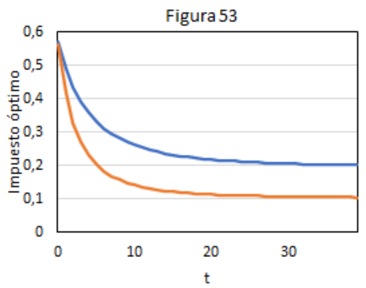












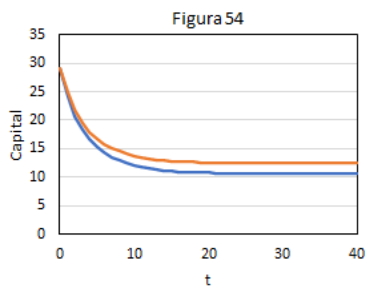
En este caso, vale la pena comparar con el equilibrio competitivo. Analizando la tabla 2 podemos ver que, con una elasticidad de sustitución mayor, el caso del planner implica un aumento de 185% en la producción del bien limpio con respecto al caso del equilibrio competitivo, así como una reducción de 42% en la producción del bien sucio. En tanto, en el caso estándar considerando elasticidad de sustitución = 2, el producto del bien intermedio limpio en estado estacionario del planner era un 35% más alto al del equilibrio competitivo, mientras que el del bien sucio era un 39,6% inferior. Esto quiere decir que, en el caso en que la elasticidad de sustitución es mayor, es posible aumentar más la producción del bien limpio a partir de un impuesto sobre el bien intermedio sucio.

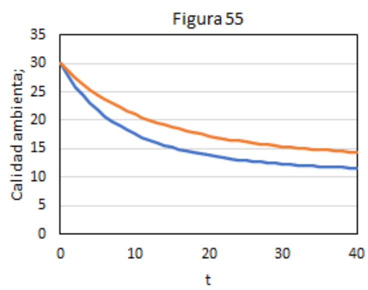
STEADY STATE VALUES

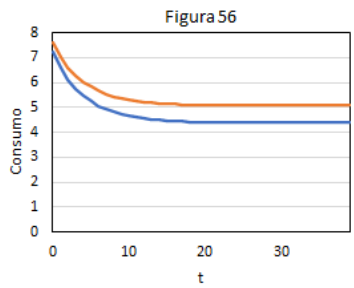
		QUASI-PLANNER	PLANNER
Output	=	3.241	2.722
Capital	=	7.625	5.285
Consumption	=	2.478	2.194
Output clean	=	0.268	0.763
Output dirty	=	2.699	1.553
Labor clean	=	0.136	0.438
Labor dirty	=	0.864	0.562
Capital clean	=	1.038	2.316
Capital dirty	=	6.588	2.969
Environment	=	5.927	10.300
lambda	=	0.303	0.342
kappa	=	-	0.203

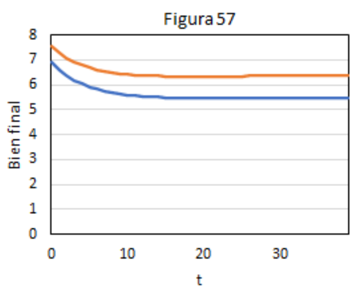
Tabla 2

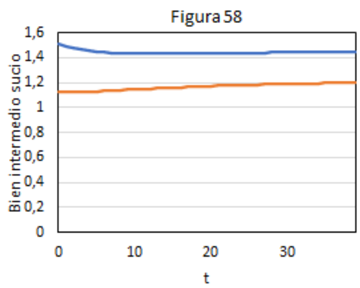
Por último, analizamos el shock de productividad en el caso del planificador, considerando ahora $A^c = 1{,}5$ (estándar en azul, $A^c = 1{,}5$ en naranja):











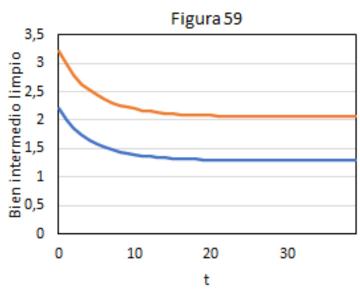


Figura 60

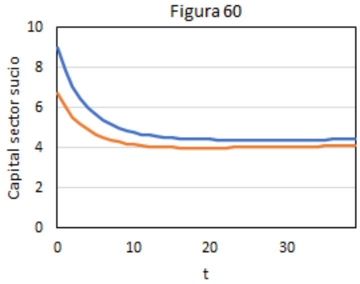


Figura 61

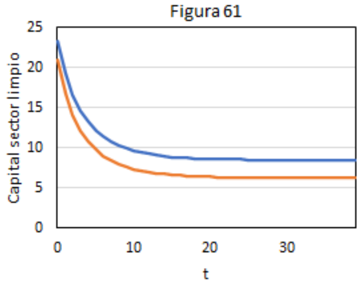


Figura 62

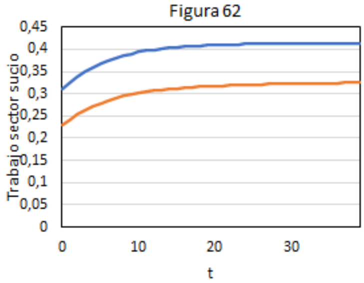


Figura 63

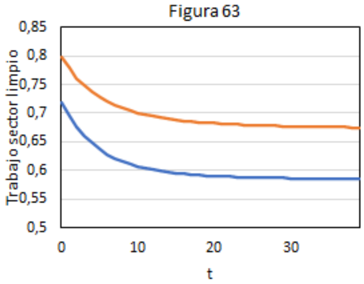
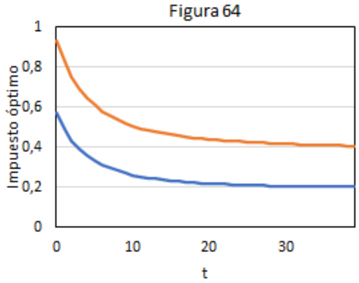


Figura 64



Como se puede observar, un shock que incrementa la productividad en el sector limpio relativa a la del sector sucio, implica un nivel mayor de producción del bien intermedio limpio en el estado estacionario, así como una reducción del nivel producido del bien intermedio sucio. En total, la producción del bien final, el consumo y la calidad ambiental son más altos en estado estacionario comparados con el caso estándar.

7. Conclusión

En nuestro trabajo modelamos una economía que se caracteriza por ser afectada por una externalidad medioambiental. Caracterizamos el equilibrio competitivo sin tener en cuenta la externalidad, el problema del planificador que resuelve la asignación óptima de recursos de la economía y finalmente introdujimos un gobierno que subsidia a la firma productora del bien final en la utilización del bien intermedio limpio. A partir de esto, pudimos verificar que existe una política óptima tal que la asignación de equilibrio es idéntica a la que surge de resolver el problema del planificador central.

En este sentido, un punto importante es que la efectividad de la política en lograr este resultado dependerá en gran parte de la elasticidad de sustitución entre ambos bienes intermedios, contaminante y no contaminante. En este caso, la introducción de un impuesto al bien intermedio contaminante aumentaría su precio relativo al bien no contaminante, por lo que, siendo que estos son sustitutos, la firma productora del bien final incrementaría su demanda del bien limpio relativamente al bien sucio. Además, dado que lo que se afecta es el precio relativo, esta política es equivalente a imponer un subsidio al bien intermedio limpio.

Estudiando los resultados obtenidos en este modelo, vemos que varias experiencias de países confirman la efectividad de esta política, incluyendo los casos de Finlandia y Suecia[5], aunque el análisis empírico de la política esta fuera del alcance de este estudio.

8. Anexo

8.1 Loglinealización:

Para calibrar el modelo vamos a primero loglinealizar las condiciones de primer orden del Problema del Planificador sin tener en cuenta la política fiscal. Además, teniendo en cuenta la restricción de calidad medioambiental:

$$S_{t+1} = S^{*} + \left(1 - \mu\, y_t^d\right) S_t$$

El sistema de ecuaciones loglinealizado queda:

$$\widehat{\lambda_t} + \widehat{c_t} = 0 \tag{1´}$$

$$\widehat{\lambda_{t+1}} + \beta\alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}} \left[\frac{1}{\varepsilon}\widehat{y_{t+1}} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\widehat{y_{t+1}^c} - \widehat{k_{t+1}^c}\right] - \widehat{\lambda_t} = 0 \tag{2´}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\widehat{k_t^d} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\widehat{k_t^c} + \widehat{y_t^c} - \widehat{y_t^d} = 0 \tag{3´}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\widehat{l_t^d} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\widehat{l_t^c} + \widehat{y_t^c} - \widehat{y_t^d} = 0 \tag{4´}$$

$$\bar{c}\widehat{c_t} + \bar{k}\widehat{k_{t+1}} - \bar{y}\widehat{y_t} - (1 - \delta)\bar{k}\widehat{k_t} = 0 \tag{5´}$$

$$\left(\overline{y^d}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\widehat{y_t^d} + \left(\overline{y^c}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\widehat{y_t^c} - (\bar{y})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\widehat{y_t} = 0 \tag{6´}$$

(7´)

[5] Puede consultarse:
Andersson, Julius J. 2019. "Carbon Taxes and CO2 Emissions: Sweden as a Case Study." American Economic Journal: Economic Policy, 11 (4): 1-30.
Mideksa, Torben K. 2021. “Pricing for a Cooler Planet: An Empirical Analysis of the Effect of Taxing Carbon”. Cesifo Working Papers.

$$\alpha\widehat{k_t^d} + (1-\alpha)\widehat{l_t^d} - \widehat{y_t^d} = 0$$

$$\alpha\widehat{k_t^c} + (1-\alpha)\widehat{l_t^c} - \widehat{y_t^c} = 0 \tag{8´}$$

$$\bar{l^c}\widehat{l_t^c} + \bar{l^d}\widehat{l_t^d} = 0 \tag{9´}$$

$$\bar{k^c}\,\widehat{k_t^c} + \bar{k^d}\widehat{k_t^d} - \bar{k}\widehat{k_t} = 0 \tag{10´}$$

$$\bar{S}\widehat{S_t}\left(1-\mu\overline{y^d}\right) - \bar{S}\mu\overline{y^d}\widehat{y_t^d} - \bar{S}\widehat{S_{t+1}} = 0$$

Cancelando $\bar{S}$:

$$\widehat{S_t}(1-\mu\overline{y^d}) - \mu\overline{y^d}\widehat{y_t^d} - \widehat{S_{t+1}} = 0 \tag{11´}$$

8.2 Sistema de ecuaciones en el Problema del Planificador que tiene en cuenta la externalidad:

$$(c_t): \frac{\varphi}{c_t} = \lambda_t$$

$$(k_{t+1}): \beta\,[\lambda_{t+1}(1-\delta) + \omega_{t+1}^k] = \lambda_t$$

$$(y_t): \eta_t^y \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}(y_t)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda_t$$

$$(y_t^d): \eta_t^y \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(y_t^d\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^d + \kappa_t\mu S_t$$

$$(y_t^c): \eta_t^y \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}(y_t^c)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^c$$

$$(l_t^d): \eta_t^d(1-\alpha)\frac{y_t^d}{l_t^d} = \omega_t^l$$

$$\eta_t^d Pmg_t^{l^d} = \omega_t^l$$

$$(l_t^c): \eta_t^c(1-\alpha)\frac{y_t^c}{l_t^c} = \omega_t^l$$

$$\eta_t^c Pmg_t^{l^c} = \omega_t^l$$

$$(k_t^d): \eta_t^d(\alpha)\frac{y_t^d}{k_t^d} = \omega_t^k$$

$$\eta_t^d Pmg_t^{k^d} = \omega_t^k$$

$$(k_t^c): \eta_t^c \alpha \frac{y_t^c}{k_t^c} = \omega_t^k$$

$$\eta_t^c Pmg_t^{l^c} = \omega_t^k$$

$$(S_{t+1}): \kappa_t = \beta\left[\frac{1-\varphi}{S_t} + \kappa_{t+1}^s(1-\mu y_{t+1}^d)\right]$$

$$(\lambda_t): c_t + k_{t+1} - y_t - (1-\delta)k_t = 0$$

$$(\eta_t^y): (y_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$(\eta_t^d): y_t^d = (k_t^d)^\alpha (A^d l_t^d)^{1-\alpha}$$

$$(\eta_t^c): y_t^c = (k_t^c)^\alpha (A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

$$(\omega_t^l): l = l_t^d - l_t^c$$

$$(\omega_t^k): k_t = k_t^d - k_t^c$$

$$(\kappa_t): S_{t+1} = \left[S^* + (1-\mu\, y_t^d)S_t\right]$$

Podemos simplificar la tercera ecuación:

$$\eta_t^y = \lambda_t \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}(y_t)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Reemplazando η_t^y en la 4ta y 5ta ecuación:

$$(c_t): \frac{\varphi}{c_t} = \lambda_t$$

$$(k_{t+1}): \beta\left[\lambda_{t+1}(1-\delta) + \omega_{t+1}^k\right] = \lambda_t$$

$$\eta_t^y = \lambda_t \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} (y_t)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\lambda_t \left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^d + \kappa_t \mu S_t$$

$$\lambda_t \left(\frac{y_t}{y_t^c}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^c$$

$$(l_t^d): \eta_t^d (1 - \alpha) \frac{y_t^d}{l_t^d} = \omega_t^l$$

$$(l_t^c): \eta_t^c (1 - \alpha) \frac{y_t^c}{l_t^c} = \omega_t^l$$

$$(k_t^d): \eta_t^d (\alpha) \frac{y_t^d}{k_t^d} = \omega_t^k$$

$$(k_t^c): \eta_t^c \alpha \frac{y_t^c}{k_t^c} = \omega_t^k$$

$$(\lambda_t): c_t + k_{t+1} - y_t - (1 - \delta) k_t = 0$$

$$(\eta_t^y): (y_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$(\eta_t^d): y_t^d = (k_t^d)^{\alpha} (A^d l_t^d)^{1-\alpha}$$

$$(\eta_t^c): y_t^c = (k_t^c)^{\alpha} (A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

$$(\omega_t^l): l = l_t^d - l_t^c$$

$$(\omega_t^k): k_t = k_t^d - k_t^c$$

$$(\kappa_t): S_{t+1} = S^* + (1 - \mu\, y_t^d) S_t$$

$$(S_{t+1}): \kappa_t = \beta \left[\frac{1 - \varphi}{S_t} + \kappa_{t+1}^s (1 - \mu y_{t+1}^d)\right]$$

Nos deshacemos de ω_t^l y ω_t^k:

$$(c_t): \frac{\varphi}{c_t} = \lambda_t$$

$$\beta \left[\lambda_{t+1}(1-\delta) + \eta_{t+1}^c \alpha \frac{y_{t+1}^c}{k_{t+1}^c}\right] = \lambda_t$$

$$\lambda_t \left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^d + \kappa_t \mu S_t$$

$$\lambda_t \left(\frac{y_t}{y_t^c}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^c$$

$$\eta_t^d \frac{y_t^d}{k_t^d} = \eta_t^c \frac{y_t^c}{k_t^c}$$

$$\eta_t^d \frac{y_t^d}{l_t^d} = \eta_t^c \frac{y_t^c}{l_t^c}$$

$$(\lambda_t): c_t + k_{t+1} - y_t - (1-\delta)k_t = 0$$

$$(\eta_t^y): (y_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$(\eta_t^d): y_t^d = (k_t^d)^\alpha (A^d l_t^d)^{1-\alpha}$$

$$(\eta_t^c): y_t^c = (k_t^c)^\alpha (A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

$$(\omega_t^l): l = l_t^d - l_t^c$$

$$(\omega_t^k): k_t = k_t^d - k_t^c$$

$$(\kappa_t): S_{t+1} = S^* + (1 - \mu\, y_t^d) S_t$$

$$(S_{t+1}): \kappa_t = \beta \left[\frac{1-\varphi}{S_t} + \kappa_{t+1}^s (1 - \mu y_{t+1}^d)\right]$$

Dividiendo las ecuaciones 5 y 6, podemos reescribir el sistema como:

$$(c_t): \frac{\varphi}{c_t} = \lambda_t$$

$$\beta \left[\lambda_{t+1}(1-\delta) + \eta_{t+1}^c \alpha \frac{y_{t+1}^c}{k_{t+1}^c}\right] = \lambda_t$$

$$\lambda_t \left(\frac{y_t}{y_t^d}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^d + \kappa_t \mu S_t$$

$$\lambda_t \left(\frac{y_t}{y_t^c}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \eta_t^c$$

$$\eta_t^d \frac{y_t^d}{k_t^d} = \eta_t^c \frac{y_t^c}{k_t^c}$$

$$\frac{l_t^d}{k_t^d} = \frac{l_t^c}{k_t^c}$$

$$(\lambda_t): c_t + k_{t+1} - y_t - (1-\delta)k_t = 0$$

$$(\eta_t^y): (y_t)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (y_t^d)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (y_t^c)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$(\eta_t^d): y_t^d = (k_t^d)^\alpha (A^d l_t^d)^{1-\alpha}$$

$$(\eta_t^c): y_t^c = (k_t^c)^\alpha (A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

$$(\omega_t^l): l = l_t^d - l_t^c$$

$$(\omega_t^k): k_t = k_t^d - k_t^c$$

$$(\kappa_t): S_{t+1} = S^* + (1 - \mu\, y_t^d) S_t$$

$$(S_{t+1}): \kappa_t = \beta \left[\frac{1-\varphi}{S_t} + \kappa_{t+1}^s (1 - \mu y_{t+1}^d)\right]$$

Usando las ecuaciones 3 y 4 para reemplazar todos los multiplicadores η_t^c y η_t^d:

$$(c_t): \frac{\varphi}{c_t} = \lambda_t$$

$$\beta\, \lambda_{t+1}\left[(1-\delta) + \alpha(y_{t+1})^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\left(y_{t+1}^c\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{k_{t+1}^c}\right] = \lambda_t$$

$$(y_t)^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\left(y_t^d\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{k_t^d} - \frac{\kappa_t}{\lambda_t}\mu S_t\frac{y_t^d}{k_t^d} = (y_t)^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\left(y_t^c\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{k_t^c}$$

$$\frac{l_t^d}{k_t^d} = \frac{l_t^c}{k_t^c}$$

$$(\lambda_t): c_t + k_{t+1} - y_t - (1-\delta)k_t = 0$$

$$(\eta_t^y): \left(y_t\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \left(y_t^d\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \left(y_t^c\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\left(\eta_t^d\right): y_t^d = \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha}$$

$$\left(\eta_t^c\right): y_t^c = (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

$$\left(\omega_t^l\right): l = l_t^d - l_t^c$$

$$(\omega_t^k): k_t = k_t^d - k_t^c$$

$$(\kappa_t): S_{t+1} = S^* + \left(1-\mu\, y_t^d\right)S_t$$

$$(S_{t+1}): \kappa_t = \beta\left[\frac{1-\varphi}{S_t} + \kappa_{t+1}^s(1-\mu y_{t+1}^d)\right]$$

Finalmente, reescribimos el sistema como:

$$\frac{\varphi}{c_t} = \lambda_t$$

$$\beta\, \lambda_{t+1}\left[(1-\delta)\ +\ \alpha(y_{t+1})^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\left(y_{t+1}^{c}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{k_{t+1}^{c}}\right] =\ \lambda_t$$

$$\left(y_t^d\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\kappa_t}{\lambda_t}\mu S_t y_t^d \left(y_t\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} + \left(y_t^c\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\frac{k_t^d}{k_t^c}$$

$$\frac{l_t^d}{k_t^d} = \frac{l_t^c}{k_t^c}$$

$$c_t + k_{t+1} = y_t - (1-\delta)k_t$$

$$\left(y_t\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} =\ \left(y_t^d\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \left(y_t^c\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$y_t^d\ =\ \left(k_t^d\right)^{\alpha}\left(A^d l_t^d\right)^{1-\alpha}$$

$$y_t^c\ =\ (k_t^c)^{\alpha}(A^c l_t^c)^{1-\alpha}$$

$$l = l_t^d -\ l_t^c$$

$$k_t = k_t^d -\ k_t^c$$

$$S_{t+1} = S^* + \left(1-\mu\, y_t^d\right)S_t$$

$$\kappa_t = \beta\ \left[\frac{1-\varphi}{S_t} + \kappa_{t+1}^{s}(1-\mu y_{t+1}^{d})\right]$$

8.3 Estado estacionario del Problema del Planner:

$$\frac{\varphi}{\bar{c}}\ =\ \bar{\lambda}$$

$$1 = \beta\ \left[(1-\delta)\ +\ \alpha(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{k^c}}\right]$$

$$(\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\ =\ \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\lambda}}\mu\bar{S}\overline{y^c}(\bar{y})^{-\frac{1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

$$\bar{S} = \frac{S^*}{\mu\overline{y^d}}$$

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{\bar{S}}\frac{\beta(1-\varphi)}{(1-\beta(1-\mu\overline{y^d}))}$$

Usando la ante última ecuación nos deshacemos de todos los $\underline{S}$. Entonces, el sistema de ecuaciones queda:

$$\frac{\varphi}{\bar{c}} = \bar{\lambda}$$

$$1 = \beta\left[(1-\delta) + \alpha(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{k^c}}\right]$$

$$(\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\lambda}}\frac{S^*}{(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{S^*}\,\frac{\beta(1-\varphi)\mu\overline{y^d}}{(1-\beta(1-\mu\overline{y^d}))}$$

Luego, la última ecuación implica que $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\overline{y^d})$. Además, $\bar{\lambda}$ es una función $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\bar{c})$. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones puede ser reducido a:

$$1 = \beta\left[(1-\delta) + \alpha(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{k^c}}\right]$$

$$\overline{y^d}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\bar{\kappa}(\overline{y^d})}{\bar{\lambda}(\bar{c})}\,\frac{S^*}{(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\,(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

La cuarta ecuación implica que $\bar{c} = \bar{c}(\bar{y}, \bar{k})$, lo cual a su vez implica que $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\bar{y}, \bar{k})$Entonces, el sistema de ecuaciones queda:

$$1 = \beta \left[(1-\delta) + \alpha(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{(\overline{\mathrm{y}^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{\mathrm{k}^c}} \right]$$

$$\overline{y^d}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\bar{\kappa}(\overline{y^d})}{\bar{\lambda}(\bar{y}, \bar{k})} \frac{S^*}{(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \frac{\overline{l^d}}{\overline{l^c}}$$

$$\bar{c} = \bar{y} - \delta\bar{k}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = (\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

Por lo tanto, tenemos un sistema de 8 ecuaciones y 8 incógnitas: $\bar{y}, \overline{y^c}, \overline{y^d}$, $\overline{k^c}, \overline{k^d}, \overline{l^c}, \overline{l^d}, \bar{k}$. Ahora, la tercera ecuación implica que:

$$\overline{l^c} \frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}} = \overline{l^d}$$

Y considerando la ecuación de vaciamiento de mercado de trabajo:

$$l = \overline{l^d} + \overline{l^c}$$

La ecuación queda:

$$l = \overline{l^c}\left[1 + \frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\right]$$

$$l = \overline{l^c}\left[\frac{\overline{k^d} + \overline{k^c}}{\overline{k^c}}\right]$$

Por lo tanto,

$$\overline{l^c} = l\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k^c} + \overline{k^d}}\right]$$

$$\overline{l^d} = l\left[\frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c} + \overline{k^d}}\right]$$

Pero la condición de vaciamiento del mercado de capital implica que:

$$\overline{l^c} = l\left[\frac{\overline{k^c}}{\overline{k}}\right]$$

$$\overline{l^d} = l\left[\frac{\overline{k^d}}{\overline{k}}\right]$$

Por lo tanto, podemos reescribir el sistema de ecuaciones como:

$$1 = \beta\ \left[(1-\delta)\ +\ \alpha(\overline{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{\mathrm{k}^c}}\right]$$

$$\overline{y^d}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\overline{\kappa}(\overline{y^d})}{\overline{\lambda}(\overline{y},\overline{k})}\ \frac{S^*}{(\overline{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\ (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \ (\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = \ (A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = \ (A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$\overline{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

$$\overline{l^c} = l\left[\frac{\overline{k^c}}{\bar{k}}\right]$$

$$\overline{l^d} = l\left[\frac{\overline{k^d}}{\bar{k}}\right]$$

Las últimas dos ecuaciones determinan $\overline{l^c}$ y $\overline{l^d}$. Luego, el sistema de ecuaciones puede ser reducido a:

$$1 = \beta\left[(1-\delta) \; + \; \alpha(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{(\overline{\mathrm{y}^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{\mathrm{k}^c}}\right]$$

$$\overline{y^d}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\bar{\kappa}(\overline{y^d})}{\bar{\lambda}(\bar{y},\bar{k})}\frac{S^*}{(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{\overline{k^d}}{\overline{k^c}}\,(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\bar{y}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \;(\overline{y^d})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

$$\overline{y^d} = \;(A^d)^{1-\alpha}(\overline{k^d})^{\alpha}(\overline{l^d})^{1-\alpha}$$

$$\overline{y^c} = \;(A^c)^{1-\alpha}(\overline{k^c})^{\alpha}(\overline{l^c})^{1-\alpha}$$

$$\bar{k} = \overline{k^d} + \overline{k^c}$$

Ahora, notemos que la última ecuación implica que $\bar{k} = \;\bar{k}(\overline{k^d},\overline{k^c})$, por lo que $\overline{y^d} = \overline{y^d}(\overline{k^d},\overline{k^c})$, e $\overline{y^c} = \overline{y^c}(\overline{k^d},\overline{k^c})$, Luego, la ecuación 3 implica que $\bar{y} = \;\bar{y}(\overline{k^d},\overline{k^c})$. Por lo tanto, los multiplicadores también son funciones de $(\overline{k^d},\overline{k^c})$:

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\overline{k^d},\overline{k^c})$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\overline{k^d},\overline{k^c})$$

Dado todo esto, podemos reducir el estado estacionario del planner a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas $\left(\overline{k^d},\overline{k^c}\right)$:

$$1 = \beta\left[(1-\delta) \; + \; \alpha(\bar{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{(\overline{\mathrm{y}^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\overline{\mathrm{k}^c}}\right]$$

$$(\overline{y^d}(\overline{k^d},\overline{k^c}))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} = \frac{\overline{\kappa}(\overline{k^d},\overline{k^c})}{\overline{\lambda}(\overline{k^d},\overline{k^c})} \frac{S^*}{(\overline{y}(\overline{k^d},\overline{k^c}),)^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}} (\overline{y^c}(\overline{k^d},\overline{k^c}))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

Una vez que obtenemos los valores para $(\overline{k^d},\overline{k^c})$, podemos obtener todo el estado estacionario.

8.4 Loglinealización del Problema del Planner:

El sistema de ecuaciones loglinealizadas del Planner son:

$$\widehat{\lambda_t} + \widehat{c_t} = 0$$

$$\widehat{\lambda_{t+1}} + (1-\beta(1-\delta)) \left[\frac{1}{\varepsilon}\widehat{y_{t+1}} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\widehat{y_{t+1}^c} - \widehat{k_{t+1}^c}\right] - \widehat{\lambda_t} = 0$$

$$\frac{\overline{\kappa}}{\overline{\lambda}}\frac{\mu\bar{S}}{(\overline{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}}\overline{y^d}\left[\widehat{\kappa_t} - \widehat{\lambda_t} + \widehat{S_t} - \frac{1}{\varepsilon}\widehat{y_t}\right] + \frac{\overline{k^d}}{\overline{\overline{k^c}}}(\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\left[\widehat{k_t^d} - \widehat{k_t^c} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\widehat{y_t^c}\right] + \overline{y^d}\left[\frac{\overline{\kappa}}{\overline{\lambda}}\frac{\mu\bar{S}}{(\overline{y})^{\frac{1}{\varepsilon}}} - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\overline{y^d}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right]\widehat{y_t^d} = 0$$

$$\widehat{k_t^d} - \widehat{k_t^c} + \widehat{l_t^c} - \widehat{l_t^d} = 0$$

$$\bar{c}\widehat{c_t} + \bar{k}\widehat{k_{t+1}} - \bar{y}\widehat{y_t} - (1-\delta)\bar{k}\widehat{k_t} = 0$$

$$\left(\overline{y^d}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\widehat{y_t^d} + (\overline{y^c})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\widehat{y_t^c} - (\overline{y})^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\widehat{y_t} = 0$$

$$\alpha\widehat{k_t^d} + (1-\alpha)\widehat{l_t^d} - \widehat{y_t^d} = 0$$

$$\alpha\widehat{k_t^c} + (1-\alpha)\widehat{l_t^c} - \widehat{y_t^c} = 0$$

$$\overline{l^c}\widehat{l_t^c} + \overline{l^d}\widehat{l_t^d} = 0$$

$$\overline{k^c}\,\widehat{k_t^c} + \overline{k^d}\widehat{k_t^d} - \bar{k}\widehat{k_t} = 0$$

$$\bar{S}\widehat{S_t}\left(1-\mu\overline{y^d}\right) - \bar{S}\mu\overline{y^d}\widehat{y_t^d} - \bar{S}\widehat{S_{t+1}} = 0$$

$$-\frac{1-\varphi}{\bar{S}\bar{\kappa}}\widehat{S_{t+1}} + \left(1-\mu\overline{y^d}\right)\widehat{\kappa_{t+1}} - \mu\overline{y^d}\widehat{y_{t+1}^d} - \frac{1}{\beta}\widehat{\kappa_t} = 0$$