

Departamento de Economía

Tipo de documento: Tesis de Grado



Licenciatura en Economía

Automatización y comercio: un modelo de dos países

Autorías: Barbiero, Juan Ignacio; Daroca, Santiago; Fernández, Santiago; Grifasi, Delfina; Servetto Basterra, Juan Bautista

Fecha: 2025

¿Cómo citar este trabajo?

Barbiero, J., et al. (2025). "Automatización y comercio: un modelo de dos países". [Tesis de Grado. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella

<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13646>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la **Universidad Torcuato Di Tella** bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

Dirección: <https://repositorio.utdt.edu>

Universidad Torcuato Di Tella

Tesis de grado - Licenciatura en Economía

Automatización y comercio:

un modelo de dos países

Barbiero, Juan Ignacio; Daroca, Santiago; Fernández, Santiago;
Grifasi, Delfina; Servetto Basterra, Juan Bautista

Tutor: Manuel Macera

Departamento de Economía

Agosto, 2025

Contents

1	Introducción	2
2	El Modelo	4
2.1	Funciones de producción y tecnología	5
2.1.1	Propiedades	6
2.2	Igualación de salarios y rentas de capital	7
2.3	Umbral Tecnológico	8
2.4	Demanda de insumos	9
2.5	Cambio tecnológico	9
2.6	Consumidor	10
3	Equilibrio Competitivo con Comercio	11
3.1	Caracterización del equilibrio	12
3.1.1	Definición de los agregados κ_m , Φ_m y $\alpha(P)$	13
3.2	Equilibrios y nivel de automatización	14
3.2.1	¿Pueden los dos países fijar el mismo corte de tareas?	14
3.2.2	Tres configuraciones de equilibrio	14
4	Estática comparada	15
4.1	Estática comparada con respecto a I	15
4.1.1	Indicadores clave	16
4.1.2	Derivadas parciales	17
4.2	Análisis numérico	18
5	Conclusión	29
6	Bibliografía	30
7	Apéndice A	31
8	Apéndice B	34

Abstract

Este trabajo investiga cómo el avance tecnológico impacta de manera diferente en distintos países. Nuestro objetivo es analizar si el progreso tecnológico reduce o amplía las brechas entre las distintas economías, considerando las particularidades de sus mercados laborales, sus tecnologías y sus factores de producción.

Para abordar esta cuestión, utilizamos el modelo de Acemoglu-Restrepo como base, y lo complementamos con las ideas básicas de comercio internacional. Esta combinación nos permite comparar dos economías —una desarrollada e intensiva en capital, y otra emergente e intensiva en trabajo— y estudiar cómo las diferencias en la productividad y composición de tareas condicionan la absorción de los shocks tecnológicos. Aprendemos que los efectos de la automatización no son homogéneos, dependiendo críticamente de la estructura ocupacional de cada nación.

1 Introducción

Desde tiempos inmemoriales, el ser humano ha perseguido el avance tecnológico, desde las primeras herramientas rudimentarias de caza, pasando por las técnicas agrícolas, la imprenta, la máquina de vapor o la electricidad, hasta llegar a nuestros días, con los últimos grandes avances en inteligencia artificial. Lo que une a todos estos hitos es la búsqueda insaciable de mejorar nuestra calidad de vida. En tiempos modernos es posible pensar esta búsqueda en términos de nuevas tecnologías que nos ayuden a realizar las tareas de una manera más eficiente.

Durante siglos, la producción agrícola dependía casi exclusivamente de la mano de obra, y debido a una gran demanda de alimentos, era un sector que empleaba a la mayor parte de la población. Con la Revolución Industrial y la aparición de la maquinaria agrícola, partiendo de la máquina de arado y sus sucesores, se hizo mucho más eficiente todo el proceso productivo, generando niveles de producción antes impensados. A su vez, estos avances generaron una fuerte caída en la demanda por trabajo agrícola, lo que originó las grandes olas migratorias del campo a la ciudad.

Otro gran cambio tecnológico que revolucionó el mercado laboral comenzó en la década de 1970, en los albores de la revolución computacional, donde debido a la introducción de la electrónica y los sistemas computarizados, una infinidad de procesos asociados a la producción se vieron mejorados. Esto trajo consigo un proceso de gran polarización del empleo, ya que estas nuevas herramientas diferenciaban en gran medida a aquellos preparados para utilizarlas y mejorarlas de aquellos que no lo estaban. De esta forma una gran porción de aquel trabajo no calificado quedó obsoleto, pero los avances de la informática rápidamente generaron nuevas tareas para absorber cada vez más demanda laboral. Estos ejemplos históricos muestran una tendencia común: las tecnologías disruptivas no reemplazaron por completo la mano de obra humana, sino que aumentaron la productividad y, con el tiempo, impulsaron la recuperación o incluso el crecimiento de la demanda

laboral.

En este sentido, la robótica avanzada y la inteligencia artificial representan un cambio de magnitud difícil de ignorar. A diferencia de tecnologías anteriores, estas tienen la capacidad de reemplazar tanto tareas manuales como cognitivas, incluso aquellas que tradicionalmente se consideraban “resguardadas” de la automatización. Esto abre interrogantes profundos sobre el futuro del trabajo: ¿Estamos frente a un escenario donde el aumento de la desigualdad será inevitable si las tareas automatizadas ganan protagonismo? Ya han habido estudios sobre este problema. Uno de los aportes más influyentes en la literatura reciente sobre tecnología y empleo es el trabajo de Daron Acemoglu y Pascual Restrepo. En una serie de artículos, los autores desarrollan un marco teórico que permite analizar cómo los cambios tecnológicos afectan el mercado de trabajo sobre el empleo, los salarios y la distribución del ingreso, no de manera agregada, sino a través del prisma de las tareas. Su propuesta representa un giro conceptual importante respecto a la visión tradicional que vinculaba el empleo con las ocupaciones completas, sin considerar la heterogeneidad de funciones que existen dentro de cada puesto de trabajo. Los autores proponen que la tecnología no afecta el trabajo de forma uniforme: mientras que algunas tecnologías reemplazan tareas que antes hacían los humanos, otras crean nuevas tareas o mejoran la productividad de los trabajadores.

La idea central es que el efecto neto de la tecnología sobre el empleo y los salarios depende del balance entre estas dos fuerzas: la sustitución de trabajo y la creación de nuevas tareas y ocupaciones. Si la automatización avanza más rápido que la capacidad de la economía para generar nuevas tareas, se pueden perder empleos y deteriorar los salarios. En cambio, si la creación de tareas predomina, la tecnología puede ser una fuente de crecimiento inclusivo. El valor de este modelo reside justamente en esto. Nos permite estudiar con claridad cómo una mejora tecnológica (por ejemplo, una caída en el costo del capital o un aumento en la eficiencia de las máquinas) desplaza el umbral de automatización, afectando la distribución del ingreso. Si el proceso de automatización avanza sin que se generen nuevas tareas, se reduce la participación del trabajo en el ingreso total y se amplía la desigualdad. En cambio, si el progreso tecnológico se traduce en la creación de nuevas tareas que complementen el trabajo humano, los efectos pueden ser más equilibrados e inclusivos.

Sin embargo, este paper se cierra a pensar en una sola economía, ya sea por pensar en un solo país o por pensar a la economía como un todo. Creemos que este enfoque puede pasar por alto algo clave: es posible que un avance tecnológico no impacte de la misma manera en todos los países. Esto se debe a las diferencias en la composición del empleo: la proporción relativa de trabajadores más o menos productivos en un país condiciona la forma en que cada economía absorbe y responde a los shocks tecnológicos. Para poder comprender de forma completa las implicancias de estos shocks a nivel internacional, y poder descomponer los efectos en las distintas economías, es necesario incorporar el foco de comercio internacional.

En resumen, esta tesis busca comprender cómo el avance tecnológico impacta de forma diferencial en distintas economías. Partimos de la hipótesis de que los efectos de la automatización no

son homogéneos, sino que dependen en gran medida de la estructura ocupacional de cada país y de la naturaleza de las tareas que predominan en su mercado laboral.

Para capturar estas diferencias, proponemos un modelo que compara dos economías estilizadas: una desarrollada, intensiva en capital, y otra emergente, intensiva en trabajo. La idea es mantener constantes las funciones de producción y suponer que lo que varía entre países es la productividad relativa del trabajo en cada tipo de tarea. Esta simplificación nos permite estudiar cómo un mismo shock tecnológico (por ejemplo, una mejora en la capacidad de automatización) puede tener consecuencias distintas según la composición de tareas en cada país.

El objetivo final es aportar herramientas teóricas para analizar si los avances tecnológicos actuales tienden a reducir o a profundizar las brechas de desigualdad entre países, y en qué medida esas asimetrías están determinadas por las características estructurales de sus mercados laborales.

2 El Modelo

Consideramos un mundo integrado por dos países, Home (H) y Foreign (F). El primero produce únicamente el bien 1, intensivo en trabajo, y el segundo produce únicamente el bien 2, intensivo en capital. Esta asignación sectorial fija simplifica la exposición y, al mismo tiempo, refleja escenarios en los que la especialización productiva responde a diferencias históricas profundas o a barreras tecnológicas que resultan costosas de revertir. Así, toda la dinámica que analizaremos se desarrolla dentro de cada sector ya existente, sin que aparezcan cambios de producto cruzados entre países.

La producción de cada bien descansa en un continuo de tareas indexadas en el intervalo $[N - 1, N]$. En ambos países todas las tareas pueden llevarse a cabo con trabajo, pero solo las situadas por debajo de un umbral I admiten la alternativa de automatizarse con capital. Un aumento exógeno de I representa, por lo tanto, un avance tecnológico que amplía el conjunto de tareas susceptibles de robotización. Para preservar la relevancia económica del trabajo en las fases más avanzadas del proceso productivo, la productividad laboral $\gamma_l(i)$ se incrementa estrictamente con la complejidad de la tarea; además, la trayectoria de (i) difiere entre H y F, de modo que cada país enfrenta una curva de eficiencia del trabajo propia y, potencialmente, un ritmo distinto de captura de beneficios tecnológicos a lo largo del continuo.

Las empresas operan en mercados perfectamente competitivos. Toman como dados los precios de capital y trabajo y, en cada punto del continuo, eligen el insumo más barato para ejecutar la tarea correspondiente. Como el precio que se paga por una unidad de tarea coincide con su coste marginal, la suma de los ingresos generados por la venta del bien final cubre exactamente los pagos a los factores, sin dejar margen para rentas puras. La automatización emerge, entonces, del precio relativo de los factores: cuando el precio de usar capital en una tarea cae por debajo del costo de emplear trabajo, la firma sustituye un insumo por el otro. Este mecanismo conecta de manera directa el avance de la frontera I con la demanda relativa de factores dentro de cada país.

Cada economía está habitada por un consumidor representativo que posee toda la dotación nacional de capital y ofrece su trabajo de forma inelástica. Sus ingresos provienen, por tanto, de las rentas del capital que posee y del salario que percibe por su tiempo laboral. Con ellos adquiere canastas del bien 1 o del bien 2 según un sistema de preferencias homotéticas, idéntico en ambas naciones. Las decisiones de consumo, al depender únicamente de los precios y de la renta percibida, enlazan la esfera de la producción —donde se determina el coste de cada bien— con la esfera de la distribución —donde se asigna el ingreso entre los dos factores y, en consecuencia, entre los hogares de ambos países.

En conjunto, el modelo traza un puente claro entre la lógica microeconómica de la sustitución tarea por tarea y la composición macroeconómica de la producción mundial. El grado en que cada país amplía su umbral de automatización, la forma de su curva de productividad laboral y la estructura competitiva de los mercados determinan, de manera conjunta, cómo se reorganizan la demanda de factores y la asignación de recursos. Los capítulos siguientes formalizarán estas relaciones y cuantificarán los efectos de un desplazamiento del umbral tecnológico, las productividades del trabajo, etc. sobre el empleo, los salarios y la producción nacional, iluminando así las implicancias distributivas de la difusión tecnológica en un contexto de especialización internacional rígida.

2.1 Funciones de producción y tecnología

La producción de cada bien se realiza combinando una variedad continua de tareas según la siguiente función de producción de elasticidad de sustitución constante (CES):¹

$$Y_m^j = \left(\int_{N-1}^N y_m^j(i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

Donde Y_m^j es la producción total del bien m en el país j , $y_m^j(i)$ es la producción de la tarea i utilizada, y θ es la elasticidad de sustitución entre las tareas.

Especificar de esta forma la función de producción nos permite capturar varios aspectos importantes de la producción moderna. En primer lugar, al ser CES nos permite que las tareas sean sustitutos imperfectos, reflejando el hecho de que las tareas no son perfectamente intercambiables, más allá de que diferentes tareas puedan contribuir a la producción del bien final.

Segundo, el parámetro θ , el cuál va de $(0, \infty)$, captura la facilidad con la que una tarea puede ser sustituida por otra: un valor alto de θ implica que las tareas son fácilmente sustituibles, mientras que un θ bajo implica que las tareas tienen un rol más específico en el proceso productivo. El rango de integración $[N-1, N]$ merece una explicación especial. N es el límite superior, el cuál representa la frontera tecnológica de tareas disponibles: un aumento de \mathbf{N} corresponde a la creación de nuevas tareas, típicamente más complejas y especializadas. Fijamos $\mathbf{N}-1$ como cota inferior del intervalo

¹Por conveniencia denotaremos con m a cada bien y con j a cada país, por lo que $m \in \{1, 2\}$ y $j \in \{H, F\}$

de tareas porque esa elección mantiene la medida total en una unidad, simplifica la notación sin sacrificar generalidad y, además, permite que la aparición de nuevas tareas —modelada como un desplazamiento de dicho límite— vuelva obsoleto a un subconjunto de las existentes.

Cada tarea puede ser realizada utilizando diferentes combinaciones de factores, dependiendo de si la tarea puede o no ser automatizada:

$$y_m^j(i) = \begin{cases} \gamma_k k^j(i) + \gamma_l^m(i) \ell^j(i) & \text{si } i \in [N-1, I] \\ \gamma_l^m(i) \ell^j(i) & \text{si } i \in (I, N] \end{cases}$$

Donde $k_m(i)$ y $\ell_m(i)$ representan las cantidades de capital y trabajo utilizadas en la tarea i , γ_k y γ_l son las productividades del capital y trabajo en la tarea i .

Esto último refleja una característica muy importante de la tecnología moderna: las tareas más simples (aquellas con un índice $i \leq I$) pueden ser automatizadas, es decir, pueden ser realizadas tanto con trabajo como con capital, mientras que las tareas más complejas ($i > I$) requieren de la intervención humana debido a su complejidad cognitiva o creativa.

La función $y_m^j(i)$ en la rama de las tareas automatizables ($i \leq I$) indica que el capital y el trabajo son sustitutos perfectos en el nivel de cada tarea individual. Esta especificación simplifica considerablemente el análisis y es consistente con la idea de que, para tareas lo suficientemente simple, las máquinas pueden reemplazar completamente a los trabajadores. En equilibrio, cada tarea automatizable será realizada únicamente por el factor que tenga el menor costo unitario.

Para generar la intensidad factorial de cada bien mencionada previamente, especificamos que los bienes difieren en su productividad relativa del trabajo.

Supuesto 1 Para todo $i \in [N-1, N]$ se cumple

$$\gamma_l^1(i) > \gamma_l^2(i).$$

Esta condición nos asegura que, para cualquier nivel dado de complejidad de tarea, el trabajo es más productivo para crear el bien 1, mientras que el capital es más productivo para la creación del bien 2. Como consecuencia, el bien 1 será relativamente más intenso en el factor trabajo, y el bien 2 será relativamente más intenso en el factor capital. Recordemos que esta diferenciación es la que permite generar el patrón de especialización deseado: países abundantes en trabajo tienen una ventaja comparativa en la producción del bien 1, mientras que países abundantes en capital la tienen en el bien 2.

2.1.1 Propiedades

Proposición 1 La tecnología de producción Y_m^j presenta CRS.

PROOF: Ver Apéndice A. (7)

El hecho de que los rendimientos sean constantes a escala (CRS) en la tecnología de producción cumple un rol central en la coherencia y la parsimonia del modelo. Bajo competencia perfecta, esta propiedad impone que el precio de cada tarea se iguale a su costo marginal, garantizando beneficios económicos nulos y evitando la introducción de márgenes monopólicos que distorsionarían la asignación de recursos.

La homogeneidad de grado uno facilita la igualación internacional de precios factoriales cuando capital y trabajo son perfectamente móviles. Con rendimientos crecientes o decrecientes, la relocalización de factores alteraría sus productividades marginales y podría impedir dicha convergencia.

Proposición 2 *La oferta de bienes (Y_1^H, Y_2^F) , es perfectamente elástica cuando $P_m = CMG_m$*

PROOF:

Ver apéndice A. 7

Proposición 3 *La demanda de factores para la tarea i , se escribe de la siguiente manera:*

$$y_m^j(i) = \left(\frac{P_m}{p_m(i)} \right)^\theta Y_m^j$$

PROOF:

Ver apéndice A. 7

2.2 Igualación de salarios y rentas de capital

Antes de introducir la condición de corte que determina el umbral de automatización, es conveniente justificar por qué en equilibrio los precios factoriales son comunes a ambas economías. El supuesto clave es:

Supuesto 2 *Movilidad internacional perfecta de factores. El capital financiero puede desplazarse sin fricción entre Home y Foreign y los trabajadores pueden migrar libremente.*

Bajo este supuesto y los expuestos anteriormente, cualquier situación con $R^H \neq R^F$ o $W^H \neq W^F$ es inestable: los propietarios de capital trasladarían su inversión al país con mayor retorno y los trabajadores migrarían hacia el mercado con salario más alto. El proceso continúa hasta que las diferencias desaparecen, de modo que

$$R^H = R^F \equiv R, \quad W^H = W^F \equiv W$$

El resultado coincide con el teorema de igualación de precios factoriales (*factor-price equalisation*) de la teoría del comercio internacional, adaptado aquí a un contexto de tareas y automatización. Esta convergencia es la base para definir el costo unitario de cada tarea.

Proposición 4 Con tecnología CRS idéntica, competencia perfecta y movilidad sin fricciones de capital y trabajo, el equilibrio satisface $R^H = R^F$ y $W^H = W^F$.

PROOF:

Ver Apéndice A.

2.3 Umbral Tecnológico

El umbral tecnológico I^2 representa el estado actual de la tecnología, y a su vez determina qué tareas pueden ser automatizadas. Como cada tarea se produce de manera competitiva, su precio $p_m(i)$, se debe igualar al mínimo costo de producción. Así mismo, en cada país y sector, las firmas deciden si automatizan una tarea comparando los costos relativos definidos por lo siguiente:

$$p_m(i) = \begin{cases} \min \left\{ \frac{R}{\gamma_k}; \frac{W}{\gamma_l^m(i)} \right\} & \text{si } i \in [N-1, I] \\ \frac{W}{\gamma_l^m(i)} & \text{si } i \in [I, N] \end{cases}$$

Donde R representa la renta del capital y W es el salario. Para aquellas tareas $i < I$, la firma compara el costo efectivo del trabajo en relación al que presenta el capital. Por lo que si $\frac{R}{\gamma_k} < \frac{W}{\gamma_l^m(i)}$, la tarea i será automatizada, y cuando $\frac{R}{\gamma_k} > \frac{W}{\gamma_l^m(i)}$, la tarea no será automatizada, sino que se realizará con trabajo.

Dada la estructura impuesta en el modelo y sobre γ_l , para cada país, va a existir un único I'_m tal que:

$$\frac{W}{R} = \frac{\gamma_l(I'_m)}{\gamma_k}$$

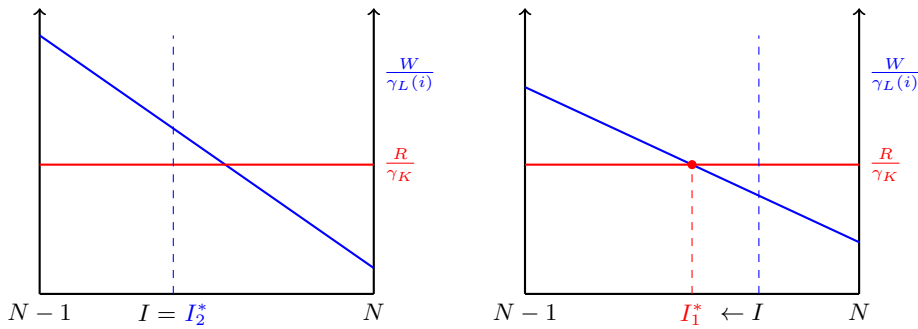


Figure 1: Dinámica de I^*

Si la frontera tecnológica disponible satisface $I > I'_m$, la empresa dispone de capacidad para automatizar todas las tareas que resultan óptimas según su problema de minimización de costos; la restricción tecnológica es, por tanto, no vinculante y variaciones marginales en I no modifican la combinación óptima de insumos.

²Este umbral tecnológico es igual para ambas tecnologías de producción.

Por el contrario, cuando $I < I'_m$ la restricción se vuelve activa: la firma debe ejecutar con trabajo una parte de las tareas que, en ausencia de dicho límite, sustituiría por capital. En este régimen, el grado de automatización queda determinado exógenamente por I y no por la condición de igualación de costos, introduciendo una distorsión en la asignación de factores y afectando tanto al nivel de costos como a los precios relativos del sector.

Por lo expuesto existe un único umbral de automatización³ de equilibrio definido por:

$$I_m^* = \min\{I, I'_m\}$$

2.4 Demanda de insumos

La cantidad de capital y trabajo requerida en cada tarea i depende de dos umbrales: (i) el umbral *tecnológico* I , que delimita hasta dónde es factible automatizar; (ii) el umbral *de costo* endógeno I'_m , donde se igualan los costos unitarios de capital y trabajo.

Dada esta convención y el nivel de producción Y_m^j , la demanda de factores por tarea resultante de la minimización de costos:

$$k^j(i) = \begin{cases} \left(\frac{P_j}{R}\right)^\theta \gamma_k^{\theta-1} Y_m^j & \text{si } i \in [N-1, I_m^*] \\ 0 & \text{si } i \in [I_m^*, N] \end{cases}$$

$$\ell^j(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in [N-1, I_m^*] \\ \left(\frac{P_j}{W}\right)^\theta \gamma_l^m(i)^{\theta-1} Y_m^j & \text{si } i \in [I_m^*, N] \end{cases}$$

Así mismo, realizamos el siguiente supuesto en base a los precios de los bienes finales.

Supuesto 3 Definimos el precio del bien 2 como numerario de la economía, y por ende,

$$P_1 = P \wedge P_2 = 1$$

2.5 Cambio tecnológico

El progreso técnico en el marco de tareas propuesto se manifiesta a lo largo de dos márgenes conceptualmente distintos pero empíricamente simultáneos.

El *primer margen* corresponde a la **automatización**: un aumento en el umbral I amplía el subconjunto de tareas que pueden ser realizadas con capital (robots, software, IA), de modo que actividades previamente ejecutadas por trabajo pasan a ser servidas por la tecnología más barata.

El *segundo margen* es la **creación de nuevas tareas**: un aumento en N expande el intervalo de tareas $[N-1, N]$, incorporando ocupaciones de mayor complejidad que, por diseño, requieren más intensamente trabajo humano en la fase inicial de adopción. Este fenómeno genera un efecto

³Notar que bajo este esquema pueden llegar a ser distintos el umbral de automatización y el tecnológico.

de “reinstalación”. Además, al ampliar el espacio de producción, el crecimiento de N tiende a elevar la productividad total de los factores y, con ello, el nivel de bienestar agregado.

Ambos márgenes interactúan: la automatización desplaza trabajo, mientras que la creación de nuevas tareas lo reinstala. El signo neto sobre salarios y empleo depende de la elasticidad de sustitución θ , de la pendiente relativa de las curvas de productividad $\gamma_i^m(i)$ y de la velocidad a la que el capital puede adoptar las tareas adicionales.

2.6 Consumidor

La forma en que se comporta el consumidor es una parte fundamental de nuestro modelo, ya que determina los patrones de demanda y la distribución del ingreso entre bienes en cada país. Nuestra economía mundial está compuesta por dos países (H y F), donde cada uno cuenta con un consumidor representativo que maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria. El problema del consumidor representativo es el siguiente:

$$\max_{(c_1^j; c_2^j)} \left(z^\rho (c_1^j)^{1-\rho} + (1-z)^\rho (c_2^j)^{1-\rho} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \quad \text{s.a.} \quad P c_1^j + c_2^j = W L^j + R K^j$$

Donde c_1^j y c_2^j representan el consumo de los bienes 1 y 2 respectivamente en el país j , P es el precio relativo del bien 1 respecto al bien 2, W es el salario por unidad de trabajo, R es la renta por unidad de capital, y L^j y K^j son las dotaciones totales de trabajo y capital.

La función de utilidad que utilizamos es una función de elasticidad de sustitución constante (CES) con parámetros $z \in (0, 1)$ que representa la participación del bien 1 en las preferencias, y $\rho^4 \in (0, \infty)$ que determina la elasticidad de sustitución entre los bienes. Esta especificación funcional garantiza que las preferencias sean homotéticas, lo cual es algo importantísimo, ya que asegura que las diferencias en patrones de consumo no constituyan una fuente de ventaja comparativa entre países.

Proposición 5 *Las condiciones de primer orden son condiciones necesarias y suficientes para caracterizar el problema del consumidor, y su solución viene dada por*

$$c_1^{j,D} = \frac{z(WL^j + RK^j)}{P^{\frac{1}{\rho}} (zP^{\frac{\rho-1}{\rho}} + (1-z))}$$

$$c_2^{j,D} = \frac{(1-z)(WL^j + RK^j)}{zP^{\frac{\rho-1}{\rho}} + (1-z)}$$

PROOF:

Ver apéndice A. (7)

⁴Definimos $\rho = \frac{1}{\sigma}$, de esta manera ρ es la inversa del parámetro habitual de la CES.

Las demandas tienen diversas propiedades importantes. En primer lugar, ambas son homogéneas de grado uno en el ingreso total ($WL^j + RK^j$), una confirmación de que las preferencias son homotéticas. Segundo, la elasticidad de sustitución entre los bienes viene dada por $\frac{1}{\rho}$, donde un ρ cercano a cero implica alta sustituibilidad entre los bienes, mientras que un ρ cercano a uno implica baja sustituibilidad. Tercero, el parámetro z determina la intensidad de preferencia por cada bien: un z más alto indica mayor preferencia relativa por el bien 1, mientras que un z más bajo una mayor preferencia relativa por el bien 2.

Dado que los parámetros z y ρ son los mismos para H y F , nos aseguramos que las diferencias en patrones de comercio surjan exclusivamente de las diferencias en dotaciones factoriales y no de diferencias en gustos o preferencias.

El ingreso total de cada país se va a determinar endógenamente en equilibrio, a través de los mercados de factores. Dada la libre movilidad de factores entre países, los precios W y R serán iguales en equilibrio para los dos países, pero los ingresos totales diferirán según las dotaciones factoriales de cada país. Esta característica captura de manera realista cómo las diferencias en dotaciones de capital y trabajo se traducen en diferencias en poder adquisitivo y patrones de consumo, incluso cuando las preferencias son idénticas.

3 Equilibrio Competitivo con Comercio

Un equilibrio competitivo con comercio es una asignación $\{c_1^H, c_2^H, c_1^F, c_2^F, Y_1^H, Y_2^F, L_1^H, K_1^H, L_2^F, K_2^F\}$, precios $\{P, W, R\}$ y umbrales de automatización $\{I_1^*, I_2^*\}$ tales que, dadas las dotaciones $\{L^H, K^H, L^F, K^F\}$:

1. **Consumo:** Dado los precios, $\{c_1^j, c_2^j\}$ resuelve el problema del consumidor representativo del país $j = \{H, F\}$:

$$\max_{c_1^j, c_2^j} U(c_1^j, c_2^j) \quad \text{s.a.} \quad Pc_1^j + c_2^j = WL^j + RK^j$$

2. **Producción:** Dado los precios, $\{L^j, K^j, Y_i^j\}$ resuelve el problema de la firma en el país j :

$$\min_{L^j, K^j} WL^j + RK^j \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} Y_m^j = F_m(L^j, K^j, i) \\ \pi_m = 0 \end{cases}$$

3. **Se vacian los mercados:**

Bienes de consumo:

$$\frac{z(WL^H + RK^H)}{P^{\frac{1}{\rho}}(zP^{\frac{\rho-1}{\rho}} + (1-z))} + \frac{z(WL^F + RK^F)}{P^{\frac{1}{\rho}}(zP^{\frac{\rho-1}{\rho}} + (1-z))} = Y_1^H$$

$$\frac{(1-z)(WL^H + RK^H)}{zP^{\frac{\rho-1}{\rho}} + (1-z)} + \frac{(1-z)(WL^F + RK^F)}{zP^{\frac{\rho-1}{\rho}} + (1-z)} = Y_2^F$$

Insumos de factores:

$$(I_1^* - N + 1) \gamma_k^{\theta-1} \left(\frac{P}{R}\right)^\theta Y_1^H + (I_2^* - N + 1) \gamma_k^{\theta-1} \left(\frac{1}{R}\right)^\theta Y_2^F = K^H + K^F$$

$$\left(\frac{P}{W}\right)^\theta Y_1^H \int_{I_1^*}^N \gamma_L^1(i)^{\theta-1} di + \left(\frac{1}{W}\right)^\theta Y_2^F \int_{I_2^*}^N \gamma_L^2(i)^{\theta-1} di = L^H + L^F$$

4. Se cumplen las *price ideal index condition*:

$$P = \left(\int_{N-1}^{I_1^*} \left(\frac{\mathbf{R}}{\gamma_k}\right)^{1-\theta} di + \int_{I_1^*}^N \left(\frac{\mathbf{W}}{\gamma_L^1(i)}\right)^{1-\theta} di \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

$$1 = \left(\int_{N-1}^{I_2^*} \left(\frac{\mathbf{R}}{\gamma_k}\right)^{1-\theta} di + \int_{I_2^*}^N \left(\frac{\mathbf{W}}{\gamma_L^2(i)}\right)^{1-\theta} di \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

5. I'_m es determiando por las *cutoff condition*:

$$\frac{R}{\gamma_k} = \frac{W}{\gamma_L^1(I'_1)}$$

$$\frac{R}{\gamma_k} = \frac{W}{\gamma_L^2(I'_2)}$$

6. I_m^* es determiando por

$$I_1^* = \min\{I, I'_1\}$$

$$I_2^* = \min\{I, I'_2\}$$

3.1 Caracterización del equilibrio

El equilibrio competitivo se describe por un sistema de cinco ecuaciones que vinculan el umbral tecnológico efectivo, los precios de los factores y la condición de vaciamiento de factores. En primer lugar, el umbral que efectivamente se automatiza en cada sector es el mínimo entre el límite exógeno de la tecnología (I) y el punto donde se igualan los costos unitarios de capital y trabajo:

$$I_1^* = \min\{I, I'_1\}, \quad I_2^* = \min\{I, I'_2\}. \quad (1)$$

A partir de la minimización de costos y de la igualdad de beneficios bajo rendimientos constantes a escala, puede derivarse la relación entre el salario real y el precio relativo del bien 1:

$$W(P) = \left(\frac{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1}{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad (2)$$

mientras que la renta del capital viene dada por:

$$R(P) = \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}}{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}. \quad (3)$$

Finalmente, el equilibrio en los mercados de factores requiere que la relación capital-trabajo demandada, implícita en las reglas de uso óptimo de insumos, iguale la dotación mundial:

$$\left(\frac{W(P)}{R(P)} \right)^\theta \frac{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} = \frac{K^M}{L^M}. \quad (4)$$

Las ecuaciones mostradas previamente constituyen un sistema que nos permite encontrar las incógnitas $\{P, W, R, I_1^*, I_2^*\}$, y por ende todas las expresiones de equilibrio de la economía. Resolverlo permite determinar los precios de equilibrio y, en consecuencia, las cantidades producidas y consumidas en cada país.

Proposición 6 (Existencia y unicidad del precio relativo) *Sea $\{I_1^*, I_2^*\}$ el par de umbrales efectivos de automatización definidos en (1). Bajo los supuestos de movilidad perfecta de factores, competencia perfecta y rendimientos constantes a escala establecidos, la ecuación (4) admite una única solución $P^* \in (P_\kappa, P_\Phi)$. En consecuencia, el precio relativo del bien 1 en equilibrio está bien definido y es único.*

PROOF:

Ver apéndice B. (8)

3.1.1 Definición de los agregados κ_m , Φ_m y $\alpha(P)$

Los términos κ_m , Φ_m y $\alpha(P)$ sintetizan, en forma compacta, la intensidad factorial y la demanda relativa de los bienes en equilibrio:

$$\kappa_m = (I_m^* - N + 1) \gamma_k^{\theta-1}$$

$$\Phi_m = \int_{I_m^*}^N \gamma_l^m(i)^{\theta-1} di$$

$$\frac{Y_2^F}{Y_1^H} = \frac{1-z}{z} P^{1/\rho} \equiv \alpha(P)$$

Dada estas expresiones podemos decir que κ_m mide el uso marginal de capital por unidad de producción del bien m en las tareas que son efectivamente automatizadas ($i \in [N-1, I_m^*]$). Dado que la productividad del capital γ_k no varía con i , el agregado se reduce al largo del intervalo automatizado multiplicado por $\gamma_k^{\theta-1}$.

La expresión Φ_m corresponde al uso marginal de trabajo por unidad de producción del bien m en las tareas que siguen siendo realizadas por trabajo ($i \in [I_m^*, N]$). La integral captura que la productividad laboral $\gamma_l^m(i)$ aumenta con la complejidad de la tarea.

Y por último, $\alpha(P)$ recoge la proporción de gasto (o, en equilibrio, producción) destinada al bien intensivo en capital frente al intensivo en trabajo.

Con estas definiciones, las ecuaciones quedan plenamente parametrizadas por los objetos tecnológicos $\gamma_k, \gamma_i^m(i)$ y por los parámetros de preferencias ρ y z .

3.2 Equilibrios y nivel de automatización

3.2.1 ¿Pueden los dos países fijar el mismo corte de tareas?

No. La condición de indiferencia entre trabajo y capital en la tarea frontera de cada país es

$$\frac{W}{R} = \frac{\gamma_L^1(I'_1)}{\gamma_k} = \frac{\gamma_L^2(I'_2)}{\gamma_k}, \quad (5)$$

Como la curva de país 1 está siempre por encima de la de país 2 y ambas crecen con i , para igualar un mismo cociente $\frac{W}{R}$ el país 1 debe evaluarla en un índice *más bajo*, entonces

$$I'_2 > I'_1$$

En consecuencia, los dos países *no* pueden escoger exactamente el mismo nivel de automatización.

3.2.2 Tres configuraciones de equilibrio

Dado que el umbral efectivo de automatización en cada país está determinado por $I_m^* = \min\{I, I'_m\}$, surgen tres posibles equilibrios según la relación entre el umbral tecnológico exógeno I y los umbrales endógenos I'_1 e I'_2 , definidos por la condición de indiferencia entre trabajo y capital:

$$\frac{W}{R} = \frac{\gamma_i^1(I'_1)}{\gamma_k} = \frac{\gamma_i^2(I'_2)}{\gamma_k}.$$

Dado que por construcción se cumple que $\gamma_i^1(i) > \gamma_i^2(i)$ para todo $i \in [N-1, N]$ y que ambas funciones son estrictamente crecientes en i , se deduce que

$$I'_2 > I'_1.$$

Por lo tanto, los dos países no pueden fijar exactamente el mismo umbral de automatización. A partir de esta observación, identificamos tres configuraciones posibles:

1. **Límite no vinculante para ninguno:** $I > I'_2 > I'_1$. Ambos países automatizan hasta sus cortes óptimos sin estar restringidos por la frontera tecnológica. En este caso, $I_1^* = I'_1$ e $I_2^* = I'_2$.

2. **Sólo el país 2 está limitado:** $I'_1 < I < I'_2$. El país 1 automatiza hasta su corte óptimo, $I_1^* = I'_1$, mientras que el país 2 está restringido por la frontera tecnológica, de modo que $I_2^* = I$.
3. **Ambos países topados por la misma barrera:** $I < I'_1 < I'_2$. Ninguno de los dos países alcanza su umbral endógeno. Ambos automatizan hasta donde les permite la tecnología disponible, es decir, $I_1^* = I_2^* = I$.

El caso (ii) es el más interesante para analizar, ya que refleja cómo las diferencias en la productividad relativa de trabajo y capital condicionan la capacidad de absorber tecnología. El país más productivo (país 1) alcanza su umbral de automatización deseado, mientras que el país menos productivo (país 2) se ve restringido por la frontera tecnológica global.

Este régimen se caracteriza por:

$$I_1^* = I'_1 \quad \text{y} \quad I_2^* = I,$$

con la condición de que:

$$I'_1 < I < I'_2.$$

Bajo esta configuración, una expansión del umbral I afecta únicamente al país 2, dado que el país 1 ya ha automatizado todas las tareas que le resulta óptimo automatizar. Esta asimetría tiene consecuencias distributivas, ya que el país 2 puede estar enfrentando una asignación ineficiente de factores por no poder sustituir tareas de bajo nivel con capital, aun cuando le resultaría rentable hacerlo.

El equilibrio general de la economía —determinado por el sistema de ecuaciones (1) a (4)— incorpora esta restricción a través del impacto de I_2^* sobre los agregados κ_2 y Φ_2 , que modifican la condición de vaciamiento de factores:

$$\left(\frac{W(P)}{R(P)} \right)^\theta \cdot \frac{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} = \frac{K_M}{L_M}.$$

Como κ_2 y Φ_2 dependen directamente de $I_2^* = I$, este equilibrio responde de manera directa al avance tecnológico en el país menos productivo. Sin embargo, en la siguiente sección analizaremos todos los casos para una mejor comprensión de lo que sucede en el modelo.

4 Estática comparada

4.1 Estática comparada con respecto a I

En este apartado analizamos las consecuencias de una variación del umbral tecnológico I , con este en el intervalo $(0, 1)$. El ejercicio permite evaluar la reacción de ambas economías y, en

particular, la respuesta de las variables $\frac{W}{R}, P, I_1^*, I_2^*$, bajo los escenarios descritos en la Sección

3.2.2.

Proposición 7 *Una modificación del umbral tecnológico afecta a la economía de esta manera,*

1. $I < I'_1 < I'_2$,

$$\frac{dP}{dI} = -\frac{\frac{\theta}{1-\theta} (P^{1-\theta} \Delta_2 + \Delta_1(I)) + \alpha(P) \Psi_2 + P^\theta \Psi_1(I)}{\frac{dT}{dP}} \quad \frac{dI_1^*}{dI} = 1 \quad \frac{dI_2^*}{dI} = 1$$

2. $I'_1 < I < I'_2$,

$$\frac{dP}{dI} = \frac{\varsigma \alpha(P) \Psi_2 + \frac{\Delta_2}{1-\theta} (P \Psi_1(I_1^*) + \varsigma \theta P^{1-\theta})}{\det J} \quad \frac{dI_2^*}{dI} = 1$$

$$\frac{dI_1^*}{dI} = \frac{1}{\det J} \left(\frac{\theta}{1-\theta} P^{1-\theta} \Delta_2 \chi (P^{-\theta} - 1) + \left(\frac{1}{\rho} - \theta \right) \frac{\alpha \Delta_2}{1-\theta} \left[\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha)(P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha)} \right] - \alpha(P) \Psi_2 \chi \right)$$

3. $I'_1 < I'_2 < I$,

$$\frac{dP}{dI} = 0 \quad \frac{dI_1^*}{dI} = 0 \quad \frac{dI_2^*}{dI} = 0$$

Donde $\det J = T_P C_{I_1} - C_P T_{I_1} < 0$

PROOF:

Ver apéndice B.

En los apartados que siguen analizamos por qué, en el caso 2, el efecto del parámetro I sobre el modelo queda indeterminado y precisamos los mecanismos que generan dicha ambigüedad. Asimismo, en la Sección 4.2 mostramos cómo estas conclusiones se confirman al parametrizar el modelo en el software, lo que permite ilustrar numéricamente el alcance de las variaciones en I .

En las secciones siguientes mostraremos que la variación de P resulta indeterminada porque depende del balance entre fuerzas opuestas, de modo que el precio puede exhibir tramos ascendentes y descendentes; en cambio, el cambio en I es siempre negativo.

4.1.1 Indicadores clave

Sea $x \in \{I, I_1^*\}$, y

$$\Delta_1(x) = \left(\frac{\gamma_l^1(x)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} - \frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} \right) = \begin{cases} \neq 0 & \text{si } x = I \\ = 0 & \text{si } x = I_1^* \end{cases} \quad \Delta_2 = \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} - \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} \right) = \begin{cases} > 0 & \text{si } \theta > 1 \\ < 0 & \text{si } \theta < 1 \end{cases}$$

De mismo modo definimos

$$\Psi_1(x) = \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^1(x)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right) > 0, \quad \Psi_2 = \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right) > 0$$

Además, se emplean los factores de la siguiente manera

$$\varsigma = \frac{(\gamma_I^1(I_1^*))'}{\gamma_I^1(I_1^*)} > 0, \quad \chi = \left(\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1)(\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta})} \right) > 0$$

4.1.2 Derivadas parciales

$$C_{I_1} = \frac{1}{1-\theta} \Delta_1(I_1^*) - \varsigma = -\varsigma < 0 \quad C_I = \frac{P^{1-\theta}}{1-\theta} \Delta_2 < 0$$

Un incremento en I_1^* o en I disminuye la rentabilidad marginal de seguir automatizando en el país H, bien sea de manera directa (primer indicador) o a través del efecto precio (segundo indicador).

$$T_{I_1} = \frac{\theta}{1-\theta} \Delta_1(I_1^*) + P^\theta \Psi_1(I_1^*) = P^\theta \Psi_1(I_1^*) > 0 \quad T_I = \frac{\theta}{1-\theta} P^{1-\theta} \Delta_2 + \alpha(P) \Psi_2$$

En ambos casos, mayores umbrales —ya sea endógeno u exógeno— exigen una producción adicional para absorber la nueva composición de factores.

El abreviado Δ_2 determina la conveniencia de automatizar en el país F, sin embargo para todo valor de θ , este genera un impacto negativo en T_I , y su signo queda indeterminado y dependerá de las intensidades de ambos términos presentes.

El indicador Δ_1 cuantifica la brecha entre el costo marginal del trabajo y el del capital en la tarea frontera del país H; en equilibrio esa brecha debe desaparecer, de modo que $\Delta_1(I_1^*) = 0$ asegura la igualdad de costos que caracteriza a la asignación eficiente. Por su parte, Δ_2 evalúa la rentabilidad de una automatización marginal en el país 2 al comparar las productividades marginales de ambos factores en su frontera de tareas: si $\theta > 1$ —lo que implica tareas fácilmente sustituibles—se verifica $\Delta_2 > 0$ y la automatización adicional resulta conveniente; cuando $\theta < 1$ ocurre lo contrario y la sustitución deja de ser rentable. Finalmente, Ψ_1 y Ψ_2 recogen las productividades marginales agregadas de los factores en los dos países. Ambas son estrictamente positivas, pero difieren en su determinación: Ψ_2 depende del umbral exógeno I que restringe a la economía del país F, mientras que Ψ_1 está gobernada por el umbral endógeno I_1^* del país H. Así, estos parámetros sintetizan cómo la eficiencia marginal del uso combinado de capital y trabajo reacciona ante cambios en los niveles de automatización impuestos (o elegidos) en cada economía.

4.2 Análisis numérico

En esta sección examinamos cómo la parametrización del modelo altera el equilibrio. Para los dos escenarios ilustrados en las figuras siguientes se emplean los siguientes valores de referencia:

$$\rho = 0.99, \quad K^H = L^F = K^F = L^H = 1.5, \quad \gamma_k = 0.6, \quad N = 1$$

y la función de productividad laboral

$$\gamma_L^m(i) = e^{A_m i} - 1, \quad A_1 = 1.5, \quad A_2 = 1.2.$$

Este ejercicio de estática comparada tiene por objetivo determinar cómo variaciones en el umbral tecnológico I afectan las decisiones óptimas de ambas economías del modelo en términos de retornos y demandas de los factores, producto y nivel de *automatización*⁵. En particular, se evalúa el impacto sobre P , I_1^* (y I_2^* cuando corresponda), $\frac{W}{R}$, W , R , así como sobre Y_1^H, Y_2^F , y demás magnitudes endógenas relevantes.

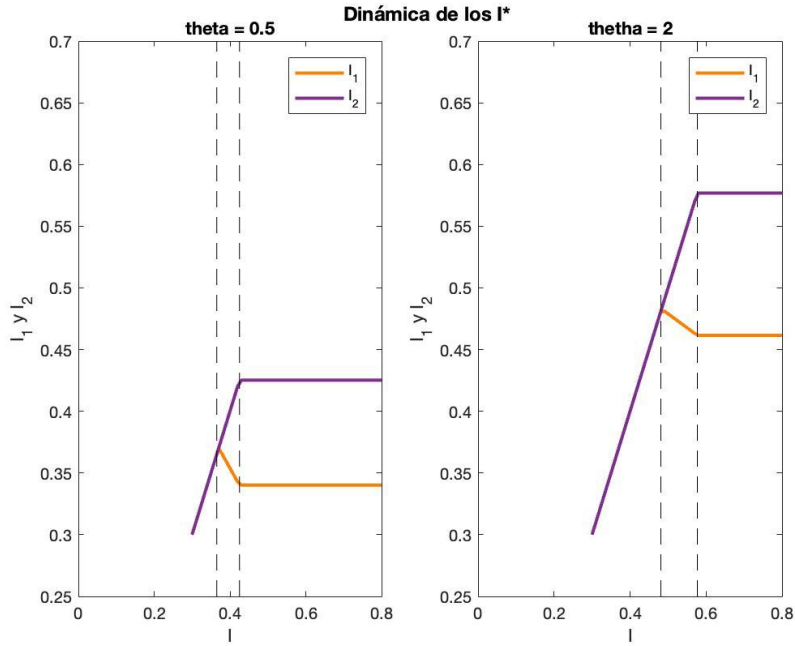


Figure 2: Efecto en I^* según θ .

La Figura 2 exhibe un patrón no monótono en el grado de automatización: ante un aumento inicial de I se observa una *sobre-automatización* (fase 1), seguida por un proceso de *desautomatización* (fase 2)⁶. Este comportamiento es coherente con lo mostrado en la Sección 4.1, donde un incremento en I se traduce proporcionalmente en un mayor I_m^* durante la fase 1. A lo largo de

⁵Entendemos por “automatización” al peso relativo de trabajo y capital en la producción del bien final, inducido por la reasignación de tareas entre factores.

⁶Las tres fases se detallan en la Sección 3.2.2.

esta primera etapa se cumple que $\frac{W}{R} \geq \frac{\gamma_L(I_m^*)}{\gamma_K}$; la igualdad se alcanza en la primera línea punteada indicada en la figura. Superado ese umbral comienza el proceso de *desautomatización*: el mismo mecanismo se revierte porque, mientras $\frac{W}{R}$ continúa descendiendo (véase Figura 3), el país H se ve forzado a “desautomatizar” parte de su producción, en tanto que el país F mantiene el impulso tecnológico. En términos analíticos, esto se refleja en el signo del término T_I : la automatización adicional pasa a ser perjudicial para la economía de H , hasta el punto de inducir un retroceso en su nivel óptimo (un T_I suficientemente negativo).

El segundo aspecto destacado de la figura es el rol de la *complementariedad vs. sustituibilidad* entre factores. Con una elasticidad de sustitución baja (θ pequeño), las tareas son altamente complementarias: el sistema necesita “balancear” ambos factores, lo que presiona a la baja el cociente $\frac{W}{R}$ y limita el stock de capital efectivo en producción; en consecuencia, el umbral automatizable es menor. Por el contrario, con una mayor sustituibilidad (θ alto), desplazar tareas hacia el capital implica una pérdida de eficiencia mucho menor: el capital puede absorber una fracción creciente del proceso productivo, el umbral de tareas automatizables se expande y el nivel de automatización se sostiene (o incluso se profundiza) aun cuando los precios relativos se ajustan.

La Figura 3 muestra que la razón $\frac{W}{R}$ descende de forma monótona a lo largo de las fases 1 y 2, para luego estabilizarse en un nivel prácticamente constante en la fase 3. Esa monotonicidad, sin embargo, no implica una pendiente uniforme: se observan quiebres claros (marcados por las líneas punteadas) que reflejan cambios en la intensidad del ajuste, primero durante la sobre-automatización inicial general y luego al iniciarse la desautomatización del país H .

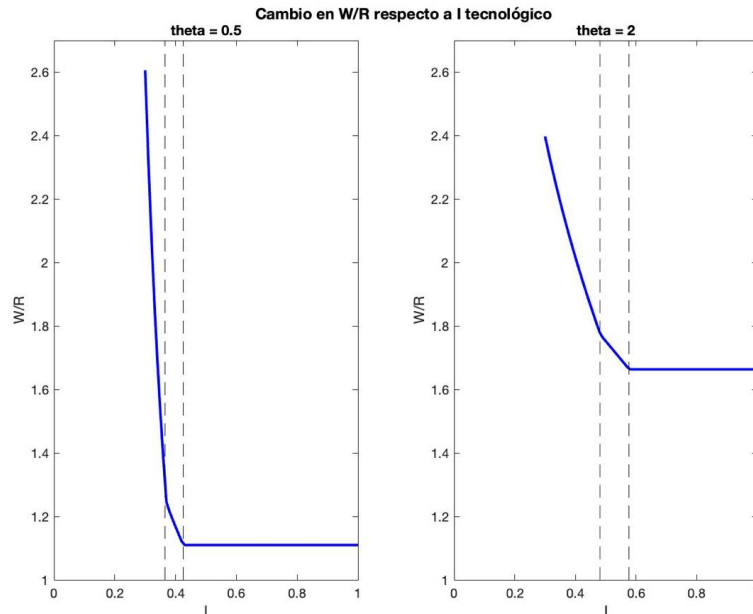


Figure 3: Efecto en $\frac{W}{R}$ según θ .

Mirando por separado W y R (Fig. 4 y Fig. 5), el mecanismo se aclara. En la fase 1, el

corrimiento masivo de tareas hacia el capital eleva su retorno: R aumenta (o se mantiene elevado) mientras la demanda por trabajo cae y presiona a W a la baja; el cociente $\frac{W}{R}$ se contrae con fuerza. Tras la primera línea punteada, ya en la fase 2, R deja de crecer a niveles previos y comienza a moderarse, mientras que W no recupera terreno (o lo hace muy marginalmente). El resultado es una pendiente negativa más suave: los precios relativos siguen moviéndose en contra del trabajo, pero el ajuste marginal es menor que durante la sobre-automatización inicial.

El papel de la elasticidad de sustitución θ afecta la magnitud de estos movimientos. Con θ baja (tareas altamente complementarias), una pequeña caída en $\frac{W}{R}$ alcanza para frenar la reasignación hacia el capital: el sistema necesita “balancear” ambos factores, el umbral automatizable I_m^* se contrae y la pendiente de $\frac{W}{R}$ se suaviza rápidamente. En cambio, con θ alta (tareas fácilmente sustituibles), el capital puede reemplazar al trabajo con escasa pérdida de eficiencia: el descenso de $\frac{W}{R}$ no afecta el proceso con la misma fuerza, el umbral se expande y la automatización persiste (o incluso se profundiza) antes de estabilizarse.

Que la pendiente de R sea positiva obedece a que, en niveles bajos de I , el capital es relativamente abundante y su retorno está deprimido; el aumento de I reasigna tareas hacia K , reduce esa holgura y lo vuelve progresivamente escaso, empujando R al alza. El salario W sigue la lógica inversa: la demanda por trabajo se contrae, se genera holgura y su precio cae (o apenas se recupera), reforzando así la caída de $\frac{W}{R}$.

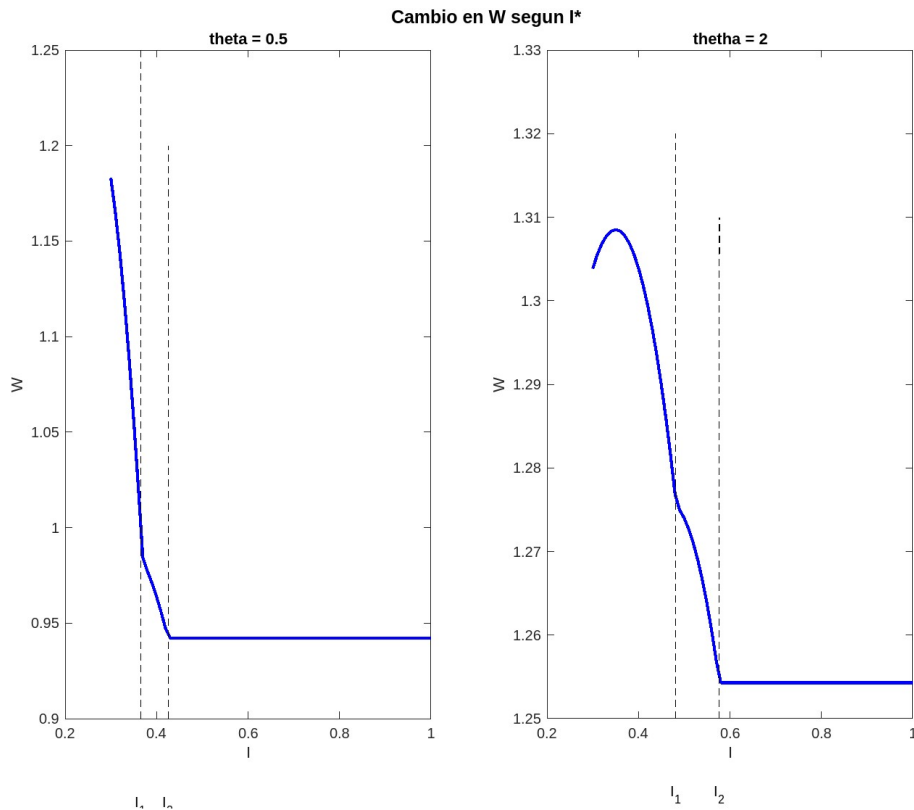


Figure 4: Efecto en W según θ .

Las Figuras 6 y 7 muestran, para cada país, la diferencia *dotación – demanda* de capital y trabajo ($K^j - K^{D,j}$, $L^j - L^{D,j}$). Valores negativos indican *escasez* (la demanda supera a la dotación) y valores positivos reflejan *holgura*. Los quiebres señalados por las líneas punteadas coinciden con las transiciones entre fases descritas anteriormente, de modo que la lectura de estos “excesos” permite vincular directamente la reasignación de tareas con los cambios en W , R y el grado de automatización.

Un primer punto a destacar es que los excesos (o holguras) de un factor en un país se reflejan de manera *espejo* en el otro: cuando H enfrenta escasez de capital (o de trabajo), F tiende a exhibir holgura de ese mismo factor, y viceversa. Por ello, sin pérdida de generalidad, concentramos el análisis en el país H ; la interpretación para F sigue de forma análoga con los signos invertidos.

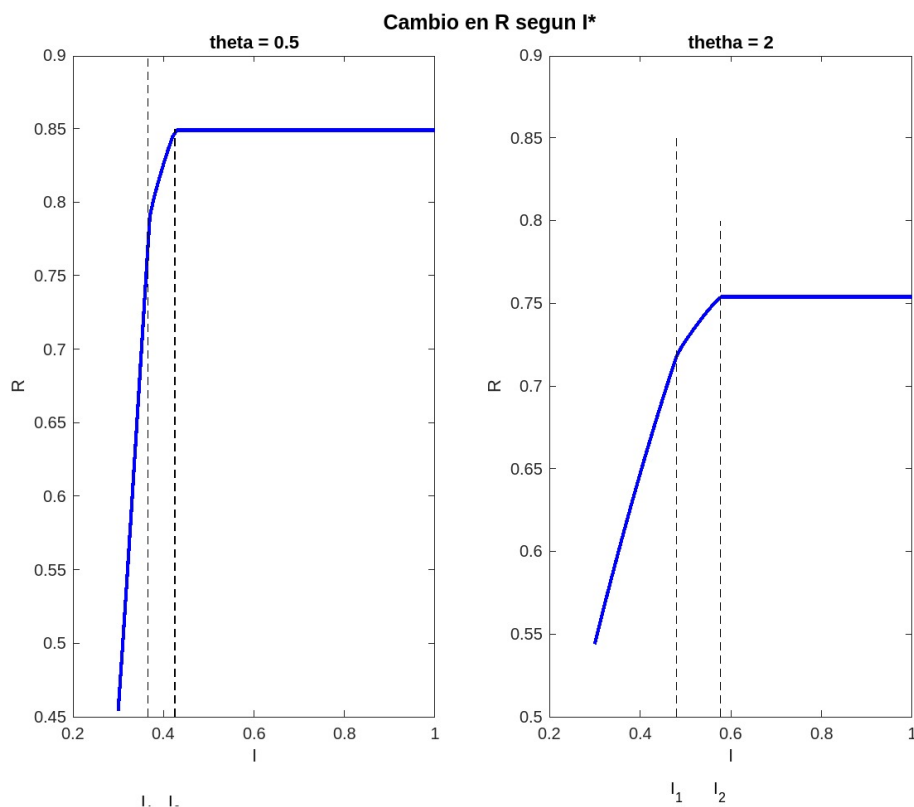


Figure 5: Efecto en R según θ .

En la **fase 1**, el mismo aumento de I genera respuestas opuestas en las demandas de factores según la elasticidad de sustitución θ . Con θ *baja* (tareas altamente complementarias), el shock abarata el uso del capital y el producto Y_1^H efectivamente crece; sin embargo, el ajuste es marcadamente *factor-ahorrador*: cae la cantidad de K y de L requerida por unidad de output. Como la expansión de Y_1^H (véase Figura 9) no alcanza para compensar esa fuerte reducción en intensidades, la demanda total de ambos factores disminuye y la brecha ($K^H - K^{D,H}$) se reduce y ($L^H - L^{D,H}$) aumenta en valor absoluto. Con θ *alta* (tareas fácilmente sustituibles), el abaratamiento marginal

se traduce en una expansión más pronunciada del producto y la sustitución hacia el capital no exige “arrastrar” proporcionalmente al trabajo; la demanda de K aumenta con fuerza y, por arrastre, también la de L . En consecuencia, los “excesos” se invierten: allí donde el factor es usado intensivamente aparece escasez (valores negativos) y donde no lo es, holgura.

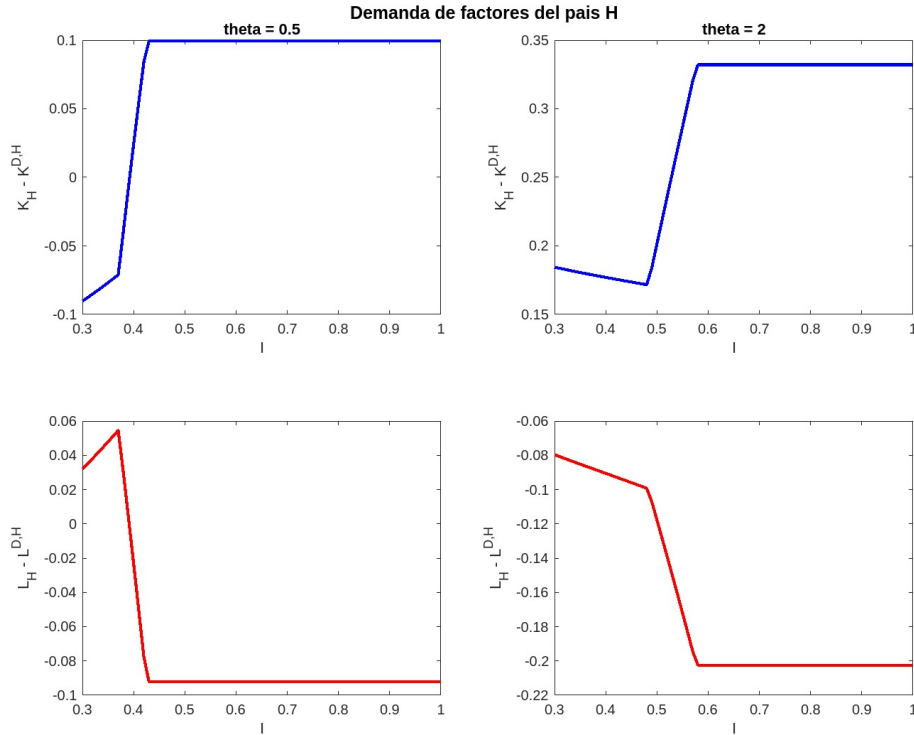


Figure 6: Efecto en las demandas en H según θ .

En la **fase 2** se observa un patrón común: la caída de $\frac{W}{R}$ y el mayor costo marginal de seguir automatizando las tareas remanentes provocan que parte de ellas regrese al trabajo. No obstante, la intensidad de este retorno depende de θ y del hecho de que el país H es particularmente eficiente en el uso de L . Con θ baja, la fuerte complementariedad obliga a reactivar rápidamente el trabajo: $L^H - L^{D,H}$ salta de holgura a escasez, mientras $K^H - K^{D,H}$ queda en holgura tras el ajuste inicial. El comportamiento del producto en esta etapa requiere una explicación específica que se presenta a continuación. Con θ alta, la corrección resulta más tenue: el capital se mantiene holgado ($K^H - K^{D,H} > 0$) durante todo el tramo y el trabajo sigue siendo el factor escaso ($L^H - L^{D,H} < 0$), profundizando dicha escasez tras la transición. La desautomatización, por tanto, es parcial y aún sostiene el producto, aunque con menor impulso que en la fase 1.

En esta misma **fase 2**, Y_1^H primero cae y luego vuelve a crecer cuando θ es baja. Al cruzar la primera línea punteada, parte de las tareas previamente automatizadas retorna al trabajo: ello eleva el costo marginal inmediato (son las tareas más costosas de revertir) y el ajuste entre factores resulta lento porque la producción del bien 1 requiere combinar K y L casi en proporciones fijas. Esa transición difícil entre un uso intensivo de capital y uno más intensivo en trabajo reduce transitoriamente el producto. A medida que la reasignación avanza, la combinación factorial se

reacomoda hacia la estructura en la que H es más eficiente (mayor uso de L), el costo promedio desciende nuevamente e Y_1^H recupera terreno y vuelve a crecer. Con θ alta, en cambio, la sustitución entre factores es mucho más fluida; la transición entre tecnologías no genera ese aumento transitorio de costos, por lo que Y_1^H no presenta la misma caída inicial (o es mucho más atenuada) y el perfil resulta esencialmente creciente.

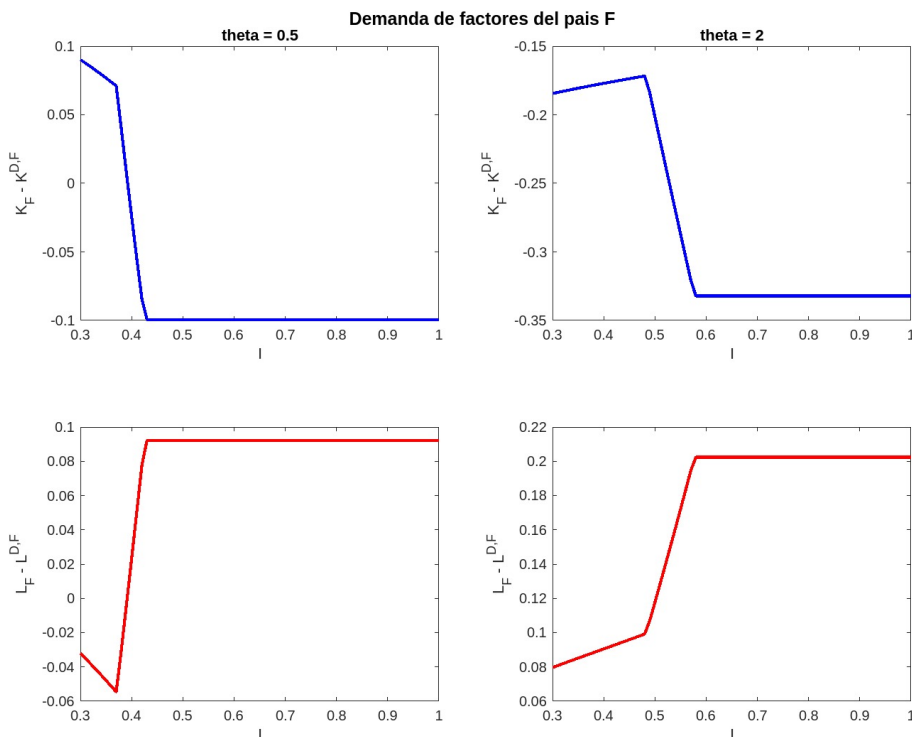


Figure 7: Efecto en las demandas en F según θ .

El precio relativo P aumenta a lo largo de todo el rango de I (Figura 8), pero la *velocidad* de ese aumento varía según θ y según cómo se abren o cierran las brechas entre Y_1^H y Y_2^F (Figuras 9 y 10). En el tramo inicial (hasta la primera línea punteada de la Figura 8) la pendiente es claramente positiva y más empinada cuando θ es baja: allí Y_1^H crece poco (e incluso muestra un “bache” visible en el panel izquierdo de 9) mientras Y_2^F se expande con fuerza, de modo que la oferta relativa del bien 1 sigue siendo mayor pero la diferencia entre ambas ofertas *no* se reduce; al contrario, la estructura de costos hace que el mercado requiera un P aún más alto para absorber el excedente relativo de H . Con θ alta, en cambio, la transición tecnológica es más fluida: Y_1^H y Y_2^F crecen de manera más pareja (panel derecho de 9 y 10), por lo que P sigue siendo creciente, pero su pendiente es más suave y estable. Tras la segunda línea punteada, cuando ambas curvas de producto se estabilizan y la brecha entre ellas deja de moverse significativamente, la curva de P se aplana: el precio deja de necesitar ajustes grandes porque las nuevas proporciones de costos y cantidades ya “despejan” el mercado mundial. En suma, P es siempre creciente porque el bien 1 permanece relativamente más abundante que el bien 2, pero el ritmo al que sube refleja cuán desbalanceadas (y volátiles) son esas ofertas.

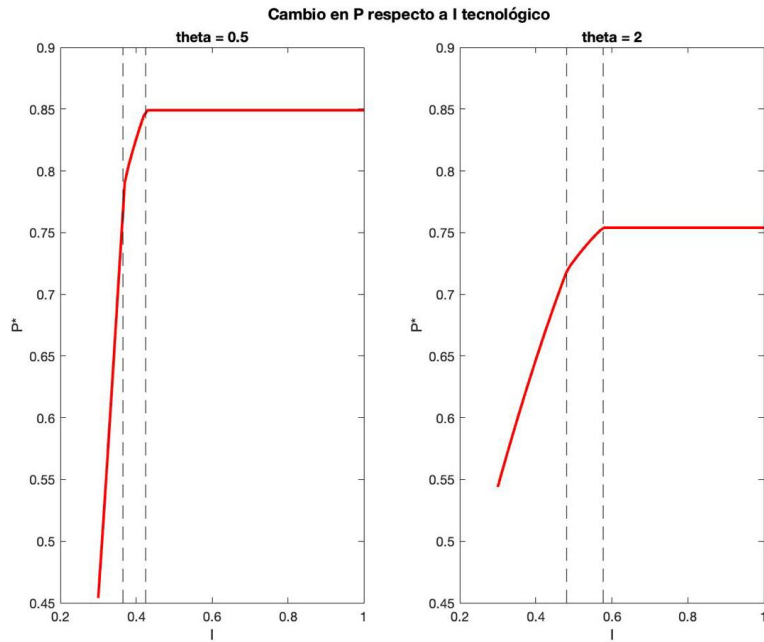


Figure 8: Efecto en P según θ .

En el caso de H , el producto del bien 1 (Y_1^H) aumenta con el shock en I , pero la forma de esa trayectoria es muy sensible a θ . Con θ baja (tareas fuertemente complementarias), el incremento inicial es acotado e incluso aparece un descenso transitorio cuando se deshace parte de la automatización más costosa de revertir: el costo marginal sube momentáneamente y la producción requiere recombinar K y L casi en proporciones fijas. Una vez completada esa reasignación, H vuelve a explotar su eficiencia relativa en trabajo, el costo promedio desciende y Y_1^H se recupera hasta estabilizarse. Con θ alta (tareas fácilmente sustituibles), la transición tecnológica es mucho más fluida: la sustitución entre factores evita el “bache” y Y_1^H crece prácticamente de manera monótona, mostrando únicamente desaceleraciones suaves cuando la composición de su producción se reajusta y entra en un proceso de *desautomatización*.

En el caso de F , el producto del bien 2 (Y_2^F) parte de niveles inferiores y se expande de manera sostenida tras el aumento de I , porque el abaratamiento relativo del capital incide directamente en su tecnología intensiva en K . No obstante, el ritmo de esa expansión está fuertemente condicionado por θ . Con θ baja (tareas complementarias), la producción no puede escalar indefinidamente: el capital se abarata, pero la necesidad de combinarlo con trabajo limita el salto. Y_2^F crece, aunque lo hace de forma contenida y sin cerrar la brecha con Y_1^H . Con θ alta (tareas fácilmente sustituibles), la reasignación hacia el capital es mucho más eficiente: Y_2^F acelera con mayor vigor y su trayectoria es prácticamente monótona. Aun así, Y_2^F permanece rezagado respecto de Y_1^H ; esa brecha persistente de ofertas es la que termina traducéndose en un P siempre creciente.

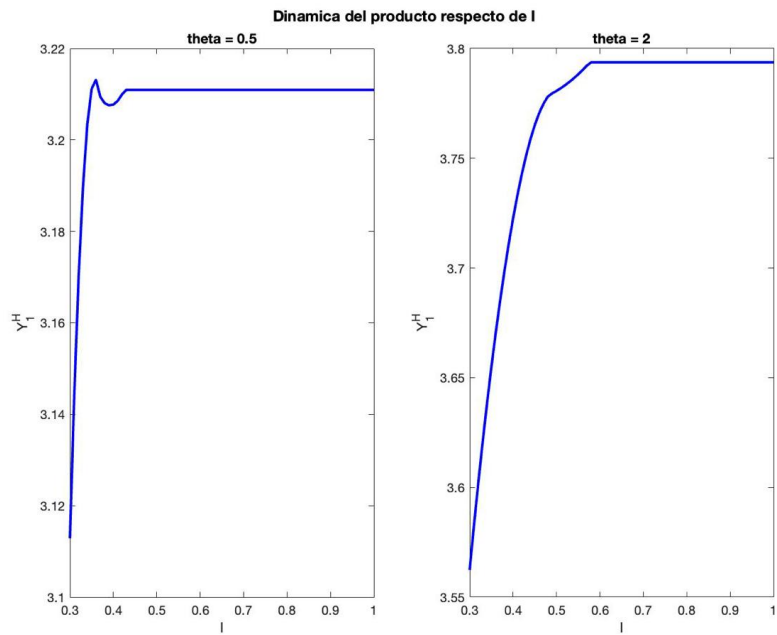


Figure 9: Efecto en Y_1^H según θ .

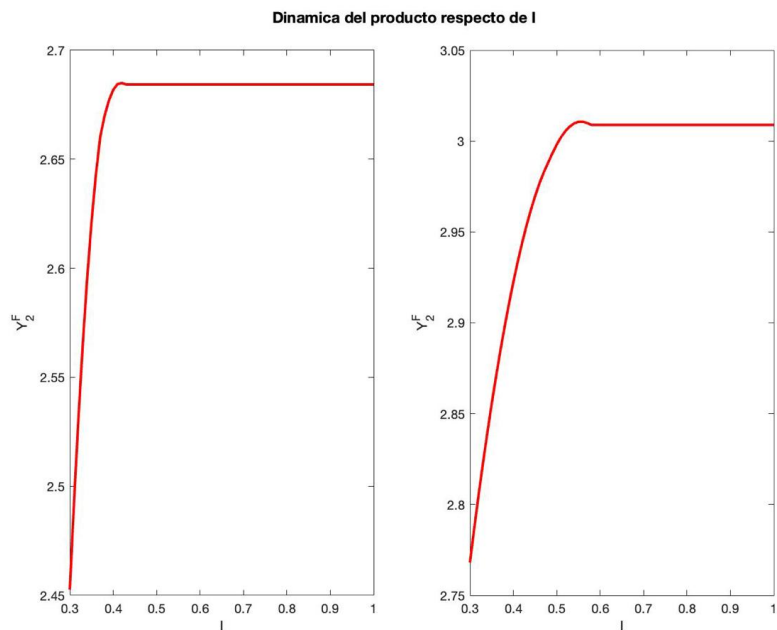


Figure 10: Efecto en Y_2^F según θ .

Para cerrar el ejercicio de estática comparada, resta analizar la participación del trabajo en cada bien (*labour share*), que resume en una sola magnitud los efectos combinados sobre precios factoriales e intensidades de uso de factores.

Definimos la participación laboral del bien m en el país j como

$$LS_m^j \equiv \frac{W L_m^j}{P_m Y_m^j},$$

donde P_m es el precio del bien (en nuestro caso, $P_1 = P$ para H y $P_2 = 1$ para F). Usando la condición de cero beneficios ($P_m Y_m^j = W L_m^j + R K_m^j$), esta definición es equivalente a

$$LS_m^j = \frac{W L_m^j}{W L_m^j + R K_m^j} = \frac{1}{1 + \frac{R}{W} \frac{K_m^j}{L_m^j}}.$$

De esta forma, la dinámica del LS_m^j frente a un cambio en I combina dos canales: (i) el efecto precio, vía la razón factorial $\frac{W}{R}$, y (ii) el efecto cantidad, vía la intensidad relativa $\frac{K_m^j}{L_m^j}$, ambos determinados por la reasignación de tareas inducida por el shock tecnológico.

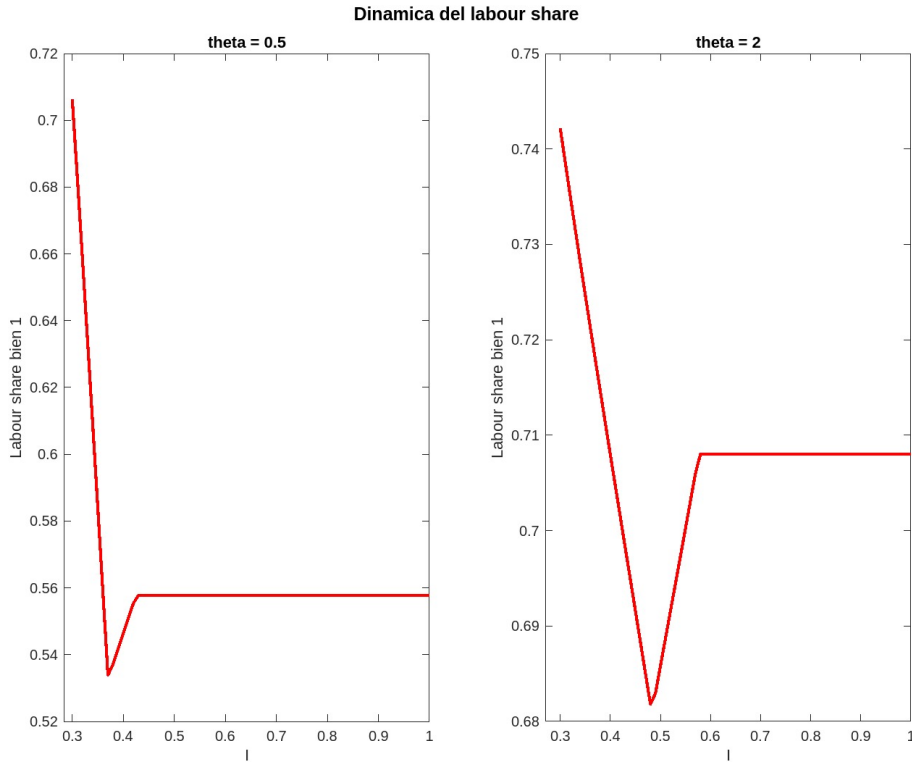


Figure 11: Efecto en *Labour Share* país H según θ .

Para el bien 1 producido en H , la participación laboral LS_1^H disminuye con el aumento de I y luego se estabiliza, mostrando un leve rebote (Figura 11). En el caso de $\theta = 0.5$, este perfil surge de la combinación de los dos términos presentes en $LS_1^H = \left[1 + \frac{R}{W} \frac{K_1^H}{L_1^H}\right]^{-1}$. Por el lado de los precios, la razón factorial $\frac{W}{R}$ cae de manera sostenida (Figura 3), lo que reduce el peso del trabajo en el denominador y empuja hacia abajo el LS_1^H . Por el lado de las cantidades, la reasignación de tareas altera la intensidad relativa $\frac{K_1^H}{L_1^H}$: en el tramo inicial, el corrimiento de tareas hacia el capital hace que el uso efectivo de L caiga respecto de su dotación y que el de K disminuya pero

en menor medida (Figura 7), de modo que $\frac{K_1^H}{L_1^H}$ sube y refuerza la caída del share. Cuando θ es bajo, la fuerte complementariedad entre factores obliga a revertir parcialmente la automatización en la fase siguiente; $L^H - L^{D,H}$ pasa de holgura a escasez mientras $K^H - K^{D,H}$ finaliza holgado, lo que implica una reducción de $\frac{K_1^H}{L_1^H}$ y explica el pequeño repunte de LS_1^H .

Con θ alta, la sustitución es más fluida pero el patrón tampoco es monótono: el LS_1^H muestra un valle y un posterior rebote (véase el panel derecho de la Figura 11). La caída inicial responde al mismo mecanismo que con θ baja: disminuye $\frac{W}{R}$ y aumenta la intensidad relativa del capital en las tareas marginales, de modo que $\frac{R}{W} \frac{K_1^H}{L_1^H}$ crece y el share cae. El repunte posterior, en cambio, se explica porque la reasignación de tareas hacia el trabajo se intensifica (obsérvese en la Figura 7 que $L^H - L^{D,H}$ se vuelve más negativo mientras $K^H - K^{D,H}$ permanece holgado), lo que reduce $\frac{K_1^H}{L_1^H}$; simultáneamente, el efecto precio deja de empujar en contra con la misma fuerza. En consecuencia, el producto $\frac{R}{W} \frac{K_1^H}{L_1^H}$ del denominador de $LS_1^H = [1 + \frac{R}{W} \frac{K_1^H}{L_1^H}]^{-1}$ disminuye y el share laboral rebota. En síntesis, el perfil de LS_1^H combina la caída de $\frac{W}{R}$ con los cambios en la mezcla factorial: con θ baja el rebote es principalmente un fenómeno “de cantidades” (retorno marcado de tareas a L), mientras que con θ alta surge de un ajuste más suave en precios y la reducción, de la intensidad $\frac{K}{L}$.

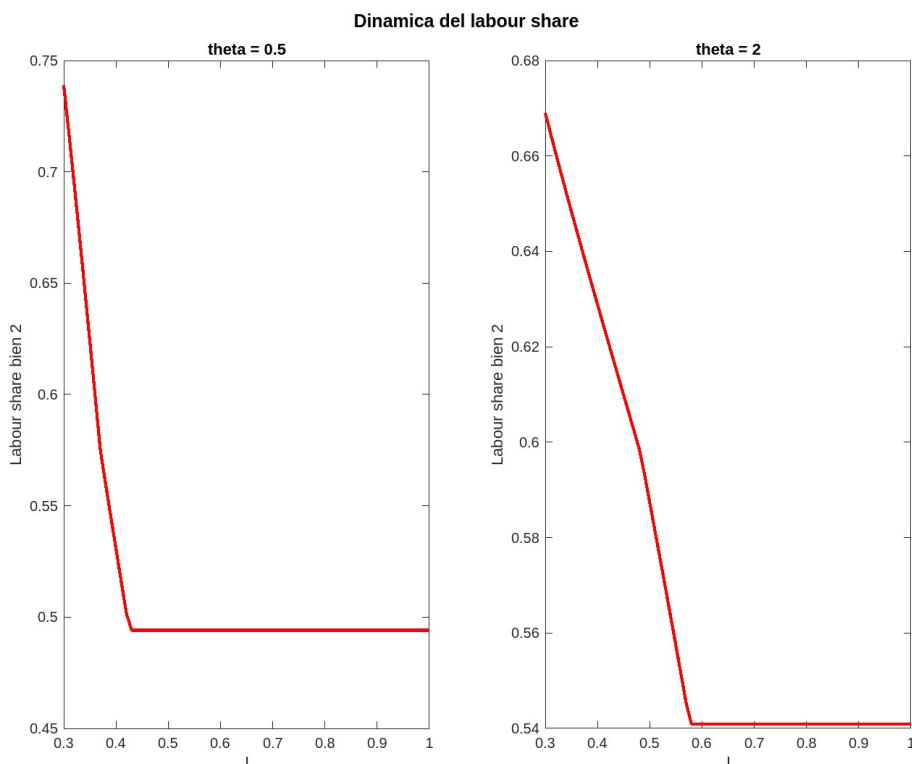


Figure 12: Efecto en *Labour Share* país F según θ .

Para el bien 2 producido en F , la participación laboral $LS_2^F = \frac{WL_2^F}{Y_2^F} = [1 + \frac{R}{W} \frac{K_2^F}{L_2^F}]^{-1}$ cae de manera prácticamente monótona con el aumento de I y se estabiliza en un nuevo nivel más bajo (Figura 12). El movimiento es consistente con lo que muestran los “excesos” de factores en F (Figura 6): el capital se vuelve persistentemente escaso ($K^F - K^{D,F} < 0$) mientras el trabajo queda

holgado ($L^F - L^{D,F} > 0$). Esa combinación implica un aumento sostenido de la intensidad relativa K_2^F/L_2^F y, simultáneamente, la caída de $\frac{W}{R}$ eleva $\frac{R}{W}$; ambos canales empujan el denominador de LS_2^F hacia arriba y, por ende, su valor hacia abajo.

La forma precisa de la curva depende de θ . Con θ baja (panel izquierdo), la caída inicial es abrupta: la complementariedad entre factores restringe la expansión “balanceada” del trabajo y el ajuste viene casi enteramente por el lado del capital, por lo que K_2^F/L_2^F salta y el LS_2^F se desploma antes de quedar plano. Con θ alta (panel derecho), la sustitución es más gradual: la reasignación hacia K se intensifica de forma sostenida y el share desciende lentamente hasta alcanzar la meseta final. En ningún caso aparece el rebote que observamos en LS_1^H : en F no hay una fase de desautomatización que devuelva tareas al trabajo; el capital permanece como factor dominante y el trabajo conserva su holgura.

En síntesis, el comportamiento de LS_2^F cierra el mismo círculo que recorrimos para el resto de las variables: el shock en I reduce $\frac{W}{R}$, vuelve más intensivo en capital al bien 2 y consolida una menor participación del trabajo.

5 Conclusión

El principal objetivo a lo largo de esta tesis fue construir un marco teórico que permita estudiar los efectos de los cambios tecnológicos en el contexto de dos países con estructuras distintas que comercian entre sí. Combinando el modelo enfocado en tareas de Acemoglu-Restrepo con la teoría del comercio internacional, modelamos dos países con distintas productividades laborales y dotaciones factoriales, pudiendo ver así los shocks que se producen en el empleo, salarios y distribución del ingreso.

Una de las conclusiones más relevantes de nuestro análisis sobre el trabajo es que los efectos de automatización no son homogéneos, sino que dependen de la productividad del trabajo para cada tarea y de la composición ocupacional de cada país, es decir, la cantidad de trabajadores y la complejidad de tareas en que se especializan. En nuestro modelo, esto se traduce en umbrales endógenos de automatización distintos para cada país, en particular el que produce el bien intensivo en capital está igual o más automatizado que el otro. Esto se da porque el país F cuenta con una productividad del trabajo menor en tareas simples, por lo que puede automatizar más profundamente, a diferencia del país H que tiene una mayor productividad del trabajo, es más eficiente y no requiere de un umbral alto de automatización.

En el análisis de equilibrio general y estática comparada encontramos que un avance tecnológico que amplía el conjunto de tareas automatizables provoca una caída en la relación W/R , debilitando la posición relativa del trabajo frente al capital. Esto implica una reducción de la participación laboral en el ingreso y un aumento de la desigualdad funcional. Además, el impacto sobre la producción y los precios relativos no es lineal, depende de la elasticidad de sustitución entre tareas, identificando así fases de sobre-automatización seguidas por procesos de des-automatización parcial, en particular cuando las tareas son altamente complementarias.

A su vez, los cambios tecnológicos afectan de forma asimétrica a las cantidades producidas por cada país. El país H logra expandir inicialmente su producción, pero puede enfrentar un estancamiento o retroceso si el proceso de automatización se vuelve ineficiente, en cambio, el país F puede sostener una trayectoria de crecimiento si logra acceder a tareas que antes no podía automatizar, aunque sea con menores beneficios salariales y mayor concentración del ingreso en manos del capital.

En conjunto, estos resultados muestran que el progreso tecnológico no garantiza beneficios generalizados y que sus efectos dependen de las condiciones estructurales de cada economía. El modelo permite entender cómo las diferencias en productividad del trabajo, composición de tareas y dotaciones factoriales condicionan el impacto de la automatización sobre la distribución del ingreso y asignación de recursos. Esta perspectiva contribuye a una comprensión más detallada del cambio tecnológico en un entorno internacional, donde los efectos distributivos pueden ser desiguales incluso ante shocks comunes.

Como extensión natural de esta investigación, queda abierta la posibilidad de incorporar dinámicas

intertemporales, rigideces en la movilidad de factores o restricciones institucionales que podrían enriquecer el análisis. Estas variantes permitirían estudiar trayectorias de convergencia o divergencia tecnológica a lo largo del tiempo y profundizar en el vínculo entre automatización, estructura productiva y desigualdad global.

6 Bibliografía

Acemoglu, Daron and Pascual Restrepo (2018). “The Race between Man and Machine: Implications of Technology for Growth, Factor Shares, and Employment”. In: *American Economic Review* 108.6, pp. 1488–1542. DOI: [10.1257/aer.20160696](https://doi.org/10.1257/aer.20160696).

Acemoglu, Daron and Pascual Restrepo (2019). “Automation and New Tasks: How Technology Displaces and Reinstates Labor”. In: *Journal of Economic Perspectives* 33.2, pp. 3–30. DOI: [10.1257/jep.33.2.3](https://doi.org/10.1257/jep.33.2.3).

7 Apéndice A

Proposición 1: La tecnología de producción Y_m^j presenta CRS

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_m^j(K^j(i); L^j(i)) &= \left[\int_{N-1}^I (\gamma_k k^j(i) + \gamma_l^m(i) \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di + \int_I^N (\gamma_l^m(i) \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \\ \Rightarrow Y(\lambda K^j(i); \lambda L^j(i)) &= \left[\int_{N-1}^I (\gamma_k \lambda k^j(i) + \gamma_l^m(i) \lambda \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di + \int_I^N (\gamma_l^m(i) \lambda \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \\ \Rightarrow Y(\lambda K^j(i); \lambda L^j(i)) &= \left[\int_{N-1}^I \lambda^{\frac{\theta-1}{\theta}} (\gamma_k k^j(i) + \gamma_l^m(i) \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di + \int_I^N \lambda^{\frac{\theta-1}{\theta}} (\gamma_l^m(i) \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \\ \Rightarrow Y(\lambda K^j(i); \lambda L^j(i)) &= \left[\lambda^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_{N-1}^I (\gamma_k k^j(i) + \gamma_l^m(i) \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di + \int_I^N (\gamma_l^m(i) \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right) \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \\ \Rightarrow Y(\lambda K^j(i); \lambda L^j(i)) &= \lambda^{\frac{\theta-1}{\theta} - \frac{\theta}{\theta-1}} \underbrace{\left(\int_{N-1}^I (\gamma_k k^j(i) + \gamma_l^m(i) \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di + \int_I^N (\gamma_l^m(i) \ell^j(i))^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right)}_{=Y(K^j(i); L^j(i))} \\ &\Rightarrow Y(\lambda K^j(i); \lambda L^j(i)) = \lambda \times Y(K^j(i); L^j(i)) \end{aligned}$$

■

Proposición 2: La oferta de bienes (Y_1^H, Y_2^F) , es perfectamente elástica cuando $P_m = CMG_m$.

$$\begin{aligned} \min_{y_j^m(i)} \int_{N-1}^N p_m(i) y_j^m(i) di \quad \text{s.a.} \quad Y = 1 \\ \mathcal{L} = \int_{N-1}^N p_m(i) y_j^m(i) di - \lambda_m \left[\left(\int_{N-1}^N y_j^m(i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}} - 1 \right] \end{aligned}$$

CPO:

$$\{y_j^m(i)\} : p_m(i) - \lambda_m \frac{\theta}{\theta-1} \left(\int_{N-1}^N y(t)^{\frac{\theta-1}{\theta}} dt \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}-1} \frac{\theta-1}{\theta} y_j^m(i)^{-\frac{1}{\theta}} = 0$$

$$p_m(i) - \lambda_m y_j^m(i)^{-\frac{1}{\theta}} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow y_j^m(i) = \left(\frac{\lambda_m}{p_m(i)} \right)^\theta \\
&\Rightarrow \left(\int_{N-1}^N \left(\frac{\lambda_m}{p_m(i)} \right)^{\theta-1} di \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}} = 1 \\
&\Rightarrow \lambda_m^{\theta-1} \int_{N-1}^N p_m(i)^{1-\theta} di = 1 \\
&\Rightarrow \lambda_m = \left(\int_{N-1}^N p_m(i)^{1-\theta} di \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \rightarrow CMG_m \text{ de } Y_m^j
\end{aligned}$$

Como hay CRS, sabemos que la función de costos se puede escribir de la siguiente manera:

$$C(Y_m^j) = c_m \cdot Y_m^j \quad \text{donde } c_m = CMG_M$$

De la maximización de beneficios sabemos que:

$$\pi = (P_m - c_m) \cdot Y_m^j \quad (6)$$

Esto infiere que si P_m difiere de c_m el problema de la firma no tendría solución interior. Por lo que,

$$\Rightarrow P_m = \left(\int_{N-1}^N p_m(i)^{1-\theta} di \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

■

Proposición 3: Recordando de la demostración anterior que:

$$y_m^j(i) = \left(\frac{\lambda}{p(i)} \right)^\theta \wedge \lambda_m = P_m$$

Utilizando también que la función de producción presenta CRS, tenemos que y_m^j puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$y_m^j(i) = \left(\frac{P_j}{p(i)} \right)^\theta Y_m^j \quad \blacksquare$$

Proposición 4:

Supóngase $R^H > R^F$. Los inversores obtendrían una rentabilidad neta mayor en H y trasladarían capital desde F hasta que la sobreabundancia de capital redujera R^H y la escasez en F elevara R^F , contradiciendo la desigualdad inicial. Un argumento análogo vale para $R^H < R^F$. Con los salarios ocurre lo mismo: si $W^H < W^F$, los trabajadores migran de H a F hasta que la oferta laboral adicional en F abarata W^F y la escasez en H encarece W^H . Dados CRS y competencia, los flujos cesan sólo cuando $R^H = R^F$ y $W^H = W^F$. ■

Proposición 5:

Para resolver este problema de optimización, construimos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \left[z^\rho (c_1^j)^{1-\rho} + (1-z)^\rho (c_2^j)^{1-\rho} \right]^{\frac{1}{1-\rho}} - \mu (Pc_1^j + c_2^j - WL^j - RK^j)$$

Las condiciones de primer orden son:

Respecto a c_1^j :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1^j} = \frac{1}{1-\rho} \left(u(c_1^j, c_2^j) \right)^{\frac{1}{1-\rho}-1} \cdot z^\rho (1-\rho) (c_1^j)^{-\rho} = \mu P$$

Respecto a c_2^j :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2^j} = \frac{1}{1-\rho} \left(u(c_1^j, c_2^j) \right)^{\frac{1}{1-\rho}-1} \cdot (1-z)^\rho (1-\rho) (c_2^j)^{-\rho} = \mu$$

Respecto a μ (restricción presupuestaria):

$$Pc_1^j + c_2^j = WL^j + RK^j$$

Dividiendo la primera condición por la segunda, obtenemos la condición de optimalidad que iguala la tasa marginal de sustitución con el precio relativo:

$$\left(\frac{z}{1-z} \right)^\rho \left(\frac{c_2^j}{c_1^j} \right)^\rho = P$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos las funciones de demanda óptimas para cada bien:

Demanda del bien 1:

$$c_1^j = \frac{z(WL^j + RK^j)}{P^{1/\rho} [zP^{(\rho-1)/\rho} + (1-z)]}$$

Demanda del bien 2:

$$c_2^j = \frac{(1-z)(WL^j + RK^j)}{zP^{(\rho-1)/\rho} + (1-z)}$$

■

8 Apéndice B

Proposición 6:

De las ecuaciones (2) y (3) podemos ver que el precio debe pertenecer al siguiente intervalo,

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} < P < \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

Donde definimos

$$P_\kappa = \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \quad P_\Phi = \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Como la ecuación esta definida implícitamente sobre P , usamos el teorema de la función implícita para ver la existencia y unicidad del equilibrio.

Sea

$$F(P, W, R, \Phi, \kappa) \equiv \left(\frac{W(P)}{R(P)}\right)^\theta \frac{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} - \frac{K^M}{L^M}$$

Por construcción, F es continua en el intervalo abierto (P_κ, P_Φ) pues todas las expresiones que la componen— $W(P)$, $R(P)$, $\alpha(P)$ —lo son allí.

Existencia: Cuando $P \rightarrow P_\Phi$, tenemos que

$$R(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_\Phi} 0$$

Mientras que $W(P)$ se mantiene acotado,

$$\implies F(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_\Phi} \infty$$

En el extremo opuesto, cuando tenemos que $P \rightarrow P_\kappa$,

$$W(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_\kappa} 0$$

En este, $R(P)$ se mantiene acotado

$$\implies F(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_\kappa} -\frac{K^M}{L^M}$$

Dados estos límites y la continuidad de F , el teorema del valor intermedio garantiza la existencia de al menos un $P^* \in (P_\kappa, P_\Phi)$ tal que $F(P^*) = 0$.

Unicidad: Es necesario que $F'(P)$ sea estrictamente creciente en $P^* \in (P_\kappa, P_\Phi)$. Para analizar la monotonicidad de esta función basta únicamente con el signo de la derivada del log del primer término.

Definamos

$$A \equiv \left(\frac{W(P)}{R(P)}\right)^\theta$$

$$B \equiv \frac{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)}$$

Por ende, podemos expresar nuestra funcion $T(P)$ como

$$T(P) \equiv \ln A + \ln B$$

$$\frac{d \ln A}{dP} = \theta \left(\frac{d \ln W}{dP} - \frac{d \ln R}{dP} \right)$$

$$\frac{d \ln B}{dP} = \frac{\kappa_1 \theta P^{\theta-1} + \kappa_2 \alpha'}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha} - \frac{\Phi_1 \theta P^{\theta-1} + \Phi_2 \alpha'}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha}$$

Juntando estas dos expresiones llegamos a que

$$\frac{dT(P)}{dP} = \theta \left(\frac{d \ln W}{dP} - \frac{d \ln R}{dP} \right) + \left(\frac{1}{\rho} - \theta \right) \alpha P^{\theta-1} \left[\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha)(P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha)} \right]$$

Para analizar el signo de esta derivada es fundamental entender las siguientes expresiones,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\alpha}{\rho P} > 0 \quad (7)$$

$$\frac{d \ln W}{dP} = \frac{\kappa_2 P^{-\theta}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} > 0$$

$$\frac{d \ln R}{dP} = \frac{-\Phi_2 P^{-\theta}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} < 0$$

Caso $\theta < \frac{1}{\rho}$

En este caso $\frac{dT(P)}{dP} > 0$

Caso $\theta < \frac{1}{\rho}$

Bajo este caso, la derivada inicialmente se encuentra indeterminada. Para que $\frac{dT(P)}{dP} > 0$, tiene que ocurrir

$$\theta \left(\frac{d \ln W}{dP} - \frac{d \ln R}{dP} \right) > \left(\theta - \frac{1}{\rho} \right) \alpha P^{\theta-1} \left[\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha)(P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha)} \right]$$

Utilizando un análisis de software vemos que esto ocurre. ■

Proposición 7

A lo largo de esta demostración usaremos que,

$$T(P, I_1^*; I) = \frac{\theta}{1-\theta} \ln \left(\frac{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} \right) + \ln \left(\frac{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right)$$

$$C(P, I_1^*; I) = \frac{1}{1-\theta} \ln \left(\frac{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} \right) - \ln (\gamma_l^1(I_1^*)) + \ln (\gamma_k)$$

CASO 1:

En este caso, $I_1^* = I_2^* = I$. Usando el Teorema de la Función Implícita en (4).

$$\frac{dP}{dI} = -\frac{\frac{dT}{dI}}{\frac{dT}{dP}}$$

De la proposición 6 sabemos que $\frac{dT}{dP} > 0$, por lo que el signo dependerá de $-\frac{dT}{dI}$.

$$\frac{dT}{dI} = \frac{\theta}{1-\theta} P^{1-\theta} \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} - \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} \right) + \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{\gamma_l^1(I)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} - \frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} \right) + \dots$$

$$\dots + \alpha(P) \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right) + P^\theta \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^1(I)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right)$$

$$\frac{dT}{dI} = \frac{\theta}{1-\theta} (P^{1-\theta} \Delta_2 + \Delta_1(I)) + \alpha(P) \Psi_2 + P^\theta \Psi_1(I)$$

Donde

$$\Delta_1(I) = \left(\frac{\gamma_l^1(I)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} - \frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} \right) < 0 \quad \Psi_1(I) = \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^1(I)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right) > 0$$

CASO 2:

El límite exógeno I actúa sobre el país F ($I_2^* = I$) mientras que I_1^* y P se determinan endógenamente. El sistema de equilibrio es:

$$\mathbf{F}(P, I_1^*, I) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T(P, I_1^*, I) \\ C(P, I_1^*, I) \end{pmatrix}$$

Alrededor del equilibrio, se cumple que

$$JdX + \partial_I F dI = 0$$

Donde

$$J = \begin{pmatrix} T_P & T_{I_1^*} \\ C_P & C_{I_1^*} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad X = (P, I_1^*)^T$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix} \frac{dP}{dI} \\ \frac{dI_1^*}{dI} \end{pmatrix} = -J^{-1} \partial_I F dI$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dP}{dI} \\ \frac{dI_1}{dI} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} T_{I_1^*} C_I - C_{I_1^*} T_I \\ T_P C_I - C_P T_I \end{pmatrix}$$

$$T_P = \theta P^{-\theta} \left(\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1)(\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta})} \right) + \left(\frac{1}{\rho} - \theta \right) \alpha P^{\theta-1} \left[\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha)(P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha)} \right] > 0$$

$$T_{I_1^*} = \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{\gamma_l^1(I_1^*)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} - \frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} \right) + P^\theta \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^1(I_1^*)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right)$$

$$T_I = \frac{\theta}{1-\theta} P^{1-\theta} \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} - \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} \right) + \alpha(P) \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right)$$

$$C_P = \left(\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1)(\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta})} \right) > 0$$

$$C_{I_1^*} = \frac{1}{1-\theta} \left(\frac{\gamma_l^1(I_1^*)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} - \frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} \right) - \frac{(\gamma_l^1(I_1^*))'}{\gamma_l^1(I_1^*)}$$

$$C_I = \frac{P^{1-\theta}}{1-\theta} \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} - \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} \right)$$

$$\Delta_1(I_1^*) = \left(\frac{\gamma_l^1(I_1^*)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} - \frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} \right) = 0 \quad \Psi_2 = \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1} - \frac{\gamma_l^2(I)^{\theta-1}}{\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta}} \right) = \begin{cases} > 0 & \text{si } \theta > 1 \\ < 0 & \text{si } \theta < 1 \end{cases} \quad \Psi_1(I_1^*) = \left(\frac{\gamma_k^{\theta-1}}{P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha(P)} + \frac{\gamma_l^1(I_1^*)^{\theta-1}}{P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha(P)} \right)$$

$$\varsigma = \frac{(\gamma_l^1(I_1^*))'}{\gamma_l^1(I_1^*)} \quad \chi = \left(\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(\kappa_2 P^{1-\theta} - \kappa_1)(\Phi_1 - \Phi_2 P^{1-\theta})} \right)$$

$$C_{I_1^*} = \frac{1}{1-\theta} \Delta_1 - \varsigma = -\varsigma < 0$$

$$C_I = \frac{P^{1-\theta}}{1-\theta} \Delta_2 < 0$$

$$T_{I_1^*} = \frac{\theta}{1-\theta} \Delta_1 + P^\theta \Psi_1 = P^\theta \Psi_1 > 0$$

$$T_I = \frac{\theta}{1-\theta} P^{1-\theta} \Delta_2 + \alpha(P) \Psi_2$$

$$T_P = \theta P^{-\theta} \chi + \left(\frac{1}{\rho} - \theta \right) \alpha P^{\theta-1} \left[\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha)(P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha)} \right] > 0$$

$$C_P = \chi > 0$$

$$T_{I_1^*} C_I = \frac{P}{1-\theta} \Delta_2 \Psi_1 < 0$$

$$C_{I_1^*} T_I = -\varsigma \left(\frac{\theta}{1-\theta} P^{1-\theta} \Delta_2 + \alpha(P) \Psi_2 \right)$$

$$T_P C_I = \frac{\theta}{1-\theta} P^{1-2\theta} \Delta_2 \chi + \left(\frac{1}{\rho} - \theta \right) \frac{\alpha \Delta_2}{1-\theta} \left[\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha)(P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha)} \right] < 0$$

$$C_P T_I = \left(\frac{\theta}{1-\theta} P^{1-\theta} \Delta_2 + \alpha(P) \Psi_2 \right) \chi$$

$$T_{I_1^*} C_I - C_{I_1^*} T_I = \varsigma \alpha(P) \Psi_2 + \frac{\Delta_2}{1-\theta} (P \Psi_1 + \varsigma \theta P^{1-\theta})$$

$$T_P C_I - C_P T_I = \frac{\theta}{1-\theta} P^{1-2\theta} \Delta_2 \chi + \left(\frac{1}{\rho} - \theta \right) \frac{\alpha \Delta_2}{1-\theta} \left[\frac{\kappa_2 \Phi_1 - \kappa_1 \Phi_2}{(P^\theta \kappa_1 + \kappa_2 \alpha)(P^\theta \Phi_1 + \Phi_2 \alpha)} \right] - \left(\frac{\theta}{1-\theta} P^{1-\theta} \Delta_2 + \alpha(P) \Psi_2 \right) \chi$$

$$\det J = T_P C_{I_1^*} - C_P T_{I_1^*} < 0$$

$$\frac{dP}{dI} = \frac{\text{indeterminado}}{< 0}$$

$$\frac{dI_1^*}{dI} = \frac{\text{indeterminado}}{< 0}$$

CASO 3:

En las funciones $F(P, I_1^*, I_2^*)$, $C(P, I_1^*, I_2^*)$, $G(P, I_1^*, I_2^*)$, tanto I_1^* como I_2^* , se determinan endógenamente y por ende, no dependen de I. Esto genera que para las 3 funciones implícitas que determinan el sistema, sus derivadas parciales contra I sean 0, de esta manera, el modelo en este caso no se ve afectado por cambios en el umbral exógeno. ■