

Departamento de Economía

Tipo de documento: Tesis de Grado



*Licenciatura en Economía*

# Valuación de una reserva petrolífera con opciones reales: una calibración para Vaca Muerta

**Autorías:** Devoto, María del Pilar; Gutiérrez, Rocío María; Rozenblum, Martín Andrés; Schwartz, Ramiro; Tivano, María Emilia

**Fecha:** 2025

## ¿Cómo citar este trabajo?

Devoto, M., et al. (2025). "Valuación de una reserva petrolífera con opciones reales: una calibración para Vaca Muerta". [Tesis de Grado. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella

<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13653>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la **Universidad Torcuato Di Tella** bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Internacional  
**Dirección:** <https://repositorio.utdt.edu>

**Universidad Torcuato Di Tella**

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

TESIS DE LIC. EN ECONOMÍA

VALUACIÓN DE UNA RESERVA  
PETROLÍFERA CON OPCIONES REALES:  
UNA CALIBRACIÓN PARA VACA  
MUERTA

Autores: María del Pilar Devoto, Rocío María Gutiérrez,  
Martín Andrés Rozenblum, Ramiro Schvartz, María Emilia Tivano

Tutor: Martín Sola

Agosto 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Dos enfoques: <i>Discounted Cash Flows</i> y <i>Option Valuation</i></b>	<b>3</b>
2.1	Ventajas del enfoque de Opciones Reales (OV) . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Modelo</b>	<b>5</b>
3.1	Las etapas y el <i>framework</i> . . . . .	5
3.2	Opción de desarrollo y extracción . . . . .	6
3.2.1	El valor de una Reserva Desarrollada . . . . .	6
3.2.2	El valor de una reserva no desarrollada y la regla óptima de desarrollo	8
<b>4</b>	<b>Calibración para Vaca Muerta</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Interpretación de los resultados</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Estática comparativa</b>	<b>19</b>
<b>8</b>	<b>Extensiones: <i>Time to Build</i>.</b>	<b>21</b>
8.1	Modelo de inversión bajo incertidumbre cuando hay time to build . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Conclusión</b>	<b>26</b>
<b>10</b>	<b>Apéndice</b>	<b>27</b>
<b>11</b>	<b>Referencias</b>	<b>30</b>

## Abstract

Esta tesis estudia la decisión de inversión en proyectos de desarrollo energético bajo incertidumbre, aplicando el enfoque de opciones reales al caso argentino de Vaca Muerta. Se modela la reserva como una opción compuesta, enfocándose en la etapa de desarrollo y utilizando métodos numéricos para resolver el problema de optimización intertemporal. El modelo permite determinar de manera endógena el momento óptimo de inversión, incorporando el valor de la opción de esperar ante cambios en los precios del petróleo. La calibración se realiza con datos específicos de Vaca Muerta, incluyendo costos de desarrollo y características del mercado local. Los resultados muestran que incluso cuando el valor descontado de la reserva es inferior al costo de desarrollo, la opción de esperar puede tener un valor significativo. El trabajo contribuye a la discusión sobre políticas de desarrollo de hidrocarburos no convencionales y ofrece una herramienta cuantitativa relevante para evaluar inversiones bajo incertidumbre.

## 1 Introducción

El desarrollo y la explotación de recursos naturales, como el petróleo y el gas, plantean desafíos importantes para la toma de decisiones de inversión bajo incertidumbre. En contextos donde la producción requiere fuertes desembolsos iniciales y enfrenta incertidumbre significativa sobre precios futuros, regulaciones ambientales y costos tecnológicos, resulta importante identificar no solo si conviene invertir, sino también cuándo hacerlo. Este trabajo aborda ese problema aplicando el enfoque de opciones reales al caso de Vaca Muerta, una de las formaciones de hidrocarburos más relevantes a nivel mundial.

Vaca Muerta es una de las principales apuestas de Argentina para fortalecer su sector energético, pero su explotación implica grandes inversiones. Bajo estas condiciones, modelar la reserva como una opción de inversión, que puede ejercerse en el futuro cuando las condiciones sean favorables, permite capturar de forma más precisa el valor económico del proyecto. En esta tesis, se presenta un modelo teórico para estimar el momento óptimo de inversión, calibrado con datos del mercado energético argentino y características técnicas del yacimiento. Este trabajo se enfoca exclusivamente en el problema del momento óptimo de inversión en una reserva petrolífera, modelado como una opción real. No se consideran en detalle otras dimensiones relevantes del proceso de desarrollo, como los aspectos regulatorios, fiscales, financieros o contractuales específicos del caso argentino. Asimismo, se asume que el precio del petróleo es el principal factor de incertidumbre, dejando de lado otras fuentes como el

riesgo político o la evolución tecnológica. Estas simplificaciones permiten centrar el análisis en la dinámica intertemporal de la decisión de inversión y su sensibilidad a los parámetros económicos clave.

En lo que sigue, el trabajo se organiza en cinco secciones. En primer lugar, se discute el enfoque tradicional de valuación mediante flujos de fondos descontados (también conocido como *net present value*) y se exponen sus principales limitaciones en contextos de alta incertidumbre y decisiones irreversibles, motivando el uso de opciones reales. A continuación, se presenta el modelo teórico de Paddock, Siegel y Smith (1988) para la valuación de reservas petroleras como opciones reales, detallando las etapas. En la cuarta sección, se describe el proceso de calibración del modelo para el caso argentino, para Vaca Muerta, incluyendo la estimación de parámetros clave como la volatilidad del precio del petróleo, el costo de desarrollo por barril y el costo de oportunidad de la espera, entre otros. La quinta sección introduce una extensión del modelo con *time to build*, donde se incorpora explícitamente el tiempo requerido para construir la capacidad productiva, y se analizan sus implicancias sobre la regla óptima de inversión. Por último, se discuten los resultados obtenidos, se evalúa la sensibilidad de las decisiones de inversión ante cambios en los parámetros y se proponen líneas futuras de investigación.

## **2 Dos enfoques: *Discounted Cash Flows* y *Option Valuation***

El enfoque de *Discounted Cash Flows* (DCF) es utilizado debido a sus sólidas bases teóricas: si los flujos futuros se estiman correctamente, su valor presente neto (VPN), descontado a una tasa apropiada y neto del costo de adquisición, representa el valor económico del activo. Sin embargo, Paddock, Siegel y Smith (1988) argumentan que este método presenta graves dificultades prácticas, especialmente en el contexto de valuación de reservas de petróleo no desarrolladas. Los autores identifican cinco debilidades principales.

### **(i) *Falta de un criterio objetivo para decidir cuándo invertir.***

El momento óptimo para desarrollar la reserva no está determinado por el método DCF, lo que lleva a decisiones arbitrarias.

### **(ii) *Incertidumbre sobre la evolución futura del precio del petróleo.***

El enfoque DCF requiere proyectar una trayectoria específica de precios futuros, lo que introduce subjetividad. Cada agente puede utilizar sus propias expectativas o supuestos, generando valuaciones inconsistentes entre distintos agentes. Además, como esta trayectoria es determinista, el DCF no captura el valor económico asociado a la volatilidad de precios. En contraste, el enfoque de OV modela la incertidumbre de forma explícita mediante un proceso estocástico para el valor de la reserva. Esto permite representar de manera más rigurosa la flexibilidad que tiene la empresa para esperar a condiciones más favorables. Así, todos los agentes enfrentan un marco de incertidumbre común, y el valor de la opción incorpora directamente la volatilidad como una fuente de valor, en lugar de ignorarla.

**(iii) Selección subjetiva de la tasa de descuento.**

El DCF requiere elegir una tasa ajustada por riesgo. Esta elección es crítica, pero muy sensible a supuestos y heurísticas (como, por ejemplo, optar por usar una tasa del 20% para la exploración y otra del 10% para el desarrollo). Además, la tasa debería depender del *timing* de la inversión, lo cual agrava el problema.

**(iv) Complejidad computacional**

Las aplicaciones DCF, especialmente las simulaciones Monte Carlo, eran muy complejas y costosas computacionalmente para 1988. Actualmente, esta desventaja no se mantiene vigente.

**(v) Información limitada al momento de la licitación.**

La falta de datos precisos sobre geología y costos implica que distintas empresas realicen valuaciones con distribuciones subjetivas, lo que aumenta la varianza de las ofertas (también afecta a OV).

## 2.1 Ventajas del enfoque de Opciones Reales (OV)

El enfoque de OV modela el derecho a desarrollar la reserva como una opción financiera. Esto permite reducir drásticamente los requerimientos de información, ya que para resolver la ecuación diferencial central que caracteriza el problema, sólo se necesitan estimar dos parámetros: la **desviación estándar** de la tasa de cambio del valor de la reserva desarrollada ( $\sigma$  en las ecuaciones (3) y (4)); y la **tasa libre de riesgo real** ( $r$ ).

Además, el enfoque OV **evita modelar la etapa de extracción** pues, en lugar de simu-

lar flujos futuros, se toma como referencia el valor de mercado de reservas desarrolladas comparables. A su vez, **opera en un marco de valuación neutral al riesgo**, y por ende, **prescinde de una tasa de descuento ajustada por riesgo**. Sólo se usa la tasa libre de riesgo, eliminando una fuente de subjetividad.

Aspecto	Enfoque DCF	Enfoque Opciones Reales (OV)
Timing de inversión	Arbitrario o simulado	Determinado endógenamente
Tasa de descuento	Subjetiva, ajustada por riesgo	Tasa libre de riesgo
Proyección de precios	Requiere una trayectoria puntual de precios futuros (determinista)	Modela la incertidumbre de precios mediante un proceso estocástico
Etapas de extracción	Modelada explícitamente	Implícita vía precios de reserva desarrollada

Table 1: Comparación entre DCF y opciones reales

En resumen, el enfoque de opciones reales reduce sustancialmente los requerimientos de información y las fuentes de subjetividad del DCF, a la vez que introduce una mejor representación de la flexibilidad y el valor de esperar.

### 3 Modelo

#### 3.1 Las etapas y el *framework*

Para desarrollar cualquier reserva petrolífera ya explorada, el proceso se organiza en dos etapas secuenciales: primero, la obtención de la concesión, en la que se asume que el gobierno provincial fija una fecha específica a partir de la cual las empresas interesadas pueden adquirir la concesión de los terrenos por una cierta cantidad de años, a cambio de pagar un costo; y, segundo, la fase de desarrollo y extracción, que comprende la instalación del equipo necesario y la extracción del hidrocarburo propiamente dicha. Esta segunda etapa puede interpretarse como una opción real americana, en la que el activo subyacente es la reserva productiva misma, el precio de ejercicio es el costo de desarrollo que la firma debe afrontar para poner en marcha el proyecto, y la fecha de expiración coincide con el fin de la concesión otorgada en la primera etapa. En resumen, primero se compra el derecho a operar por un período delimitado pagando un monto, y luego, dentro de ese plazo, se decide instalar y extraer —valorando esa decisión como una opción cuyo subyacente es la reserva, cuyo strike es el desarrollo y cuyo vencimiento es el cierre del período concesionado.

### 3.2 Opción de desarrollo y extracción

La teoría de opciones compuestas puede aplicarse al contexto de opciones reales, pero con ciertas adaptaciones. En el caso de las opciones financieras tradicionales basta con especificar un proceso estocástico para el precio del activo subyacente. No es necesario modelar en detalle cómo se determina dicho precio, ya que se toma como dado por el mercado.

Sin embargo, al valorar activos reales como *undeveloped reserves*, no disponemos de un mercado que fije el precio de forma observable. Por lo tanto, es necesario modelar explícitamente el valor económico de una reserva desarrollada, a partir de los flujos de ingresos netos que genera. En lo que sigue, caracterizaremos esa dinámica y mostraremos cómo se combina con las herramientas de valuación de opciones para estimar el valor de la opción de desarrollo.

#### 3.2.1 El valor de una Reserva Desarrollada

Empecemos caracterizando el valor de una reserva desarrollada usando un modelo de equilibrio en el mercado de reservas petrolíferas. Definimos:  $B_t$  el número de barriles de petróleo en una reserva desarrollada en tiempo  $t$ ;  $V_t$  el valor por barril de la reserva desarrollada en tiempo  $t$  y  $R_t$ , el *pay-off* neto instantáneo de tener la reserva en tiempo  $t$ .

El *pay-off* neto  $R_t$  viene de dos fuentes: (i) las ganancias de producción; y (ii) la ganancia en capital de quedarse con el petróleo restante. Supondremos que la reserva está produciendo petróleo con una tasa de declive exponencial:

$$dB_t = -\omega \cdot B_t \cdot dt \tag{1}$$

donde una fracción  $\omega$  de petróleo se produce cada año. Esto es:  $B_t = B_0 e^{-\omega t}$ .

Buscaremos una expresión para el *pay-off* neto teniendo en cuenta los dos componentes antes mencionados,

$$R_t dt = \text{ganancia por producción} + \text{capital gain}$$

- (i) Primer componente: como la reserva desarrollada está produciendo petróleo con una tasa de declive exponencial  $dB_t = -\omega \cdot B_t \cdot dt$ , la producción en un intervalo pequeño de tiempo  $dt$  está dado por  $\omega \cdot B_t \cdot dt$ . Dado que cada barril vendido genera un beneficio neto post impuestos de  $\Pi_t$ , el flujo de ganancia por producción es  $\omega \cdot B_t \cdot \Pi_t \cdot dt$

(ii) Segundo componente: antes de  $dt$  la reserva tiene un valor total de  $B_t \cdot V_t$ . Luego de  $dt$  períodos, la cantidad de barriles restantes es de aproximadamente  $B_t - B_t \cdot \omega \cdot dt = (1 - \omega \cdot dt)B_t$  (recuerde que se han extraído  $\omega \cdot B_t \cdot dt$ ). Además, cada barril restante cambia su valor de  $V_t$  a  $V_t + dV_t$ . Entonces, el nuevo valor de la reserva es

$$\underbrace{(1 - \omega \cdot dt)B_t}_{\substack{\text{cantidad de} \\ \text{barriles} \\ \text{restantes}}} \underbrace{(V_t + dV_t)}_{\substack{\text{nuevo valor} \\ \text{de cada} \\ \text{barril}}}$$

La ganancia de capital viene dada por la diferencia entre el nuevo y el viejo valor de la reserva:

$$(1 - \omega \cdot dt)B_t(V_t + dV_t) - B_t \cdot V_t$$

Combinando ambos componentes,

$$R_t dt = \underbrace{\omega \cdot B_t \cdot \Pi_t \cdot dt}_{\substack{\text{ganancia} \\ \text{por} \\ \text{producción}}} + \underbrace{(1 - \omega \cdot dt)B_t(V_t + dV_t) - B_t \cdot V_t}_{\text{capital gain}} \quad (2)$$

Ahora tomamos el retorno proporcional instantáneo de la reserva,  $\frac{R_t \cdot dt}{B_t \cdot V_t}$  (donde el numerador representa el rendimiento que genera la reserva en un pequeño intervalo de tiempo y el denominador es el valor total de la reserva), y asumimos que sigue un proceso de BM:

$$\frac{R_t \cdot dt}{B_t \cdot V_t} = \mu_v \cdot dt + \sigma_v \cdot dz \quad (3)$$

$$R_t \cdot dt = \mu_v \cdot B_t \cdot V_t \cdot dt + \sigma_v \cdot B_t \cdot V_t \cdot dz$$

Reemplazamos (2) en (3),

$$\begin{aligned}
\omega \cdot B_t \cdot \Pi_t \cdot dt + (1 - \omega \cdot dt)B_t(V_t + dV_t) - B_t \cdot V_t &= \mu_v \cdot B_t \cdot V_t \cdot dt + \sigma_v \cdot B_t \cdot V_t \cdot dz \\
\frac{\omega \cdot \Pi_t \cdot dt}{V_t} + (1 - \omega \cdot dt)\left(1 + \frac{dV_t}{V_t}\right) - 1 &= \mu_v \cdot dt + \sigma_v \cdot dz \\
\omega \cdot dt \left(\frac{\Pi_t - V_t}{V_t}\right) + \frac{dV_t}{V_t} - \underbrace{\omega \cdot dt \cdot \frac{dV_t}{V_t}}_{=0} &= \mu_v \cdot dt + \sigma_v \cdot dz \\
\frac{dV_t}{V_t} &= \left[ \mu_v - \underbrace{\omega \left(\frac{\Pi_t - V_t}{V_t}\right)}_{\equiv \delta_t} \right] \cdot dt + \sigma_v \cdot dz \\
\frac{dV_t}{V_t} &= \underbrace{(\mu_v - \delta_t)}_{\equiv \alpha_x} \cdot dt + \sigma_v \cdot dz \\
\frac{dV}{V} &= \alpha_x \cdot dt + \sigma_v \cdot dz \tag{4}
\end{aligned}$$

donde  $\alpha_x = \mu_v - \delta_t$  es la tasa esperada de *capital gain*.

Así como  $\delta$  reflejaba el flujo de efectivo del proyecto operativo en los casos de opciones financieras,  $\delta_t$  en este modelo es el flujo de caja generado después de descontar la reducción de la reserva (porque cada barril extraído reduce el valor total de la reserva). Es decir, "*the payout rate of the producing developed reserve*".

Se puede pensar de la siguiente forma:

$$\delta_t = \underbrace{\omega}_{\substack{\text{fracción de} \\ \text{petróleo producida} \\ \text{anualmente}}} \underbrace{\left(\frac{\Pi_t - V_t}{V_t}\right)}_{\substack{\text{exceso de valor} \\ \text{al que se vende} \\ \text{sobre el valor} \\ \text{total por unidad}}}$$

### 3.2.2 El valor de una reserva no desarrollada y la regla óptima de desarrollo

Ahora nos abocamos al problema de determinar el valor de una reserva no desarrollada (sobre un terreno que ya fue explorado),  $F(V, T - t, D)$ , donde  $V_t$  es el valor por barril de la reserva desarrollada y  $D$  el costo por barril de desarrollar la reserva.

Para encontrar el valor de la reserva no desarrollada,  $F(V, T - t, D)$ , vamos a utilizar un argumento de no arbitraje. Podemos construir un portafolio libre de riesgo que tenga una posición *long* en la opción (en  $F(\cdot)$ ) y una posición *short* en una cantidad  $n$  en el subyacente. Denotamos al valor de dicho portafolio como  $L$ . Esto se debe a que el valor de la opción

$F(V, T - t, D)$  está perfectamente correlacionado con el valor del *underlying asset*,  $V_t$ . De esta manera, este portafolio debe pagar a la tasa libre de riesgo.

$$dL_t = dF(V) - n \cdot (dV + \delta V dt), \text{ donde } dV = \alpha_x \cdot V \cdot dt + \sigma_v \cdot V \cdot dz \quad (5)$$

$$dL_t = rL_t dt \quad (6)$$

Para utilizar la condición de no arbitraje (6), queremos reescribir  $dL$ . Por lema de Ito, podemos escribir  $dF$  de la siguiente manera. Lo que usamos es que  $V$  sigue una *Geometric Brownian Motion*, que  $dz^2 = dt$  y que  $dt^m = 0 \quad \forall m > 1$ .

$$\begin{aligned} dF &= F_t \cdot dt + F_V \cdot dV + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot (dV)^2 \\ dF &= [F_t + F_V \cdot \alpha_x \cdot V + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2] \cdot dt + F_V \cdot \sigma_v \cdot V \cdot dz \end{aligned}$$

Reemplazo esto último en (5),

$$dL_t = dF(V) - n \cdot (dV + \delta \cdot V dt)$$

$$dL_t = [F_t + F_V \cdot \alpha_x \cdot V + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2] \cdot dt + F_V \cdot \sigma_v \cdot V \cdot dz - n \cdot dV - n \cdot \delta \cdot V dt$$

$$dL_t = [F_t + F_V \cdot \alpha_x \cdot V + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2 - n \cdot \delta \cdot V] \cdot dt + F_V \cdot \sigma_v \cdot V \cdot dz - n \cdot (\alpha_x \cdot V \cdot dt + \sigma_v \cdot V \cdot dz)$$

$$dL_t = [F_t + F_V \cdot \alpha_x \cdot V + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2 - n \cdot \delta \cdot V - n \cdot \alpha_x \cdot V] \cdot dt + [F_V \cdot \sigma_v \cdot V - n \cdot \sigma_v \cdot V] \cdot dz$$

Elegimos  $n = F_V$  para eliminar el riesgo,

$$dL_t = [F_t + F_V \cdot \alpha_x \cdot V + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2 - F_V \cdot \delta \cdot V - F_V \cdot \alpha_x \cdot V] \cdot dt$$

$$dL_t = [F_t + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2 - F_V \cdot \delta \cdot V] \cdot dt$$

El lado derecho representa la evolución del portafolio entre  $t$  y  $t + dt$  una vez eliminado el riesgo.

Por condición de no arbitraje este retorno debe igualarse a poner este dinero a la tasa libre de riesgo, esto es, planteamos  $L_t = F - n \cdot V$  con  $n = F_V$ , a la tasa libre de riesgo  $r$ .

$$\begin{aligned}
& \left( F_t + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2 - F_V \cdot \delta \cdot V \right) \cdot dt = r \cdot (F - n \cdot V) \cdot dt \\
& \left( F_t + \frac{1}{2} \cdot F_{VV} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2 - F_V \cdot \delta \cdot V \right) \cdot dt = [rF - rF_V V] \cdot dt \\
& F_t + \frac{1}{2} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2 \cdot F_{VV} - rF + (r - \delta)F_V V = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

La ecuación (7) se corresponde a una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Puesto que tenemos  $F_t$  debemos recurrir a algún método numérico: utilizamos diferencias finitas. Esta se resuelve sujeto a las siguientes cuatro condiciones.

La **condición inferior** impone que cuando la reserva no vale nada, la opción sobre ella tampoco:  $F(0, t) = 0$ .

Es decir, si el mercado valora en cero a una reserva desarrollada ( $V=0$ ), entonces no tiene sentido pagar nada para desarrollarla. La opción no tiene valor.

La **condición terminal** significa que al vencimiento  $t = T$ , la opción de desarrollar la reserva enfrenta un problema tipo *now or never*:  $F(V, T) = \max\{V - D, 0\}$ .

Esto refleja que, si el valor de la reserva desarrollada  $V$  es mayor que el costo de desarrollo  $D$ , entonces conviene ejercer y se obtiene una ganancia neta de  $V - D$ ; pero si  $V < D$ , desarrollar implicaría una pérdida, y la opción se deja expirar sin valor. Por lo tanto, en ese caso el valor de la opción es cero. Esta condición garantiza que, al momento de expiración, el valor de la opción sea coherente con el principio de no arbitraje.

La **value matching condition** indica que para valores suficientemente altos de la reserva, la opción se ejecutaría antes que  $T$  y por ende su valor al momento de ejecutarla es, por condición de no arbitraje,  $F(V^*, t) = V^* - D$ .

Esta condición refleja que cuando  $V = V^*$ , el inversor es exactamente indiferente entre ejercer la opción (obteniendo el *payoff* inmediato  $V^* - D$ ) o conservarla (manteniendo el valor  $F(V^*, t)$ ). Si  $F(V^*, t) > V^* - D$ , entonces no sería óptimo ejercer; si  $F(V^*, t) < V^* - D$ , el inversor habría ejercido antes. Por lo tanto, la igualdad en este punto es una condición necesaria de optimalidad.

La **smooth pasting condition** es:  $F_V(V^*, t) = 1$ .

Esta condición garantiza que la función valor  $F(V, t)$  sea suavemente pegada (*smoothly pasted*) al valor de ejercicio  $V - D$  en el punto óptimo. En otras palabras, no solo deben coincidir los valores (*value matching*), sino también las pendientes. Esto asegura que no haya un salto en el beneficio marginal por ejercer. Desde una perspectiva económica, esta condición implica que el beneficio marginal de esperar una unidad más de aumento en  $V$  (el valor de mantener la opción) es igual al beneficio marginal de invertir ahora (el valor del payoff). Lo que le agrega el valor de  $V$  en el momento de invertir una unidad más es igual a lo que le agrega al costo.

Una forma de resolver este sistema es mediante el uso del **método de diferencias finitas** que desarrollaremos en el apéndice.

#### 4 Calibración para Vaca Muerta

Para aplicar el modelo al caso argentino es necesario calibrar los parámetros a partir de datos de Vaca Muerta. En particular, debemos estimar tres parámetros: (i) la volatilidad del valor de la reserva desarrollada, denotada por  $\sigma$ , que captura la incertidumbre sobre el precio del petróleo; (ii) el costo de desarrollo por barril,  $D$ , que funciona como el precio de ejercicio de la opción y refleja las características técnicas y económicas de los yacimientos; y (iii) el *dividend yield*,  $\delta$ , que mide el flujo neto generado por mantener una reserva desarrollada en operación.

En lo que sigue, se detalla el procedimiento para estimar cada uno de estos parámetros, que permitirán luego resolver el modelo y analizar la opción de desarrollo para un yacimiento promedio en Vaca Muerta.

##### Volatilidad del logaritmo de los precios del petróleo ( $\sigma$ ).

Comenzamos tomando la serie diaria de precios del petróleo (dólares por barril) de la Reserva Federal de St. Louis <sup>1</sup>. Seleccionamos el último día de cada mes desde junio del 2014 hasta el presente, excluyendo los datos correspondientes al período de pandemia debido a que du-

---

<sup>1</sup><https://fred.stlouisfed.org/series/DCOILBRETEU>

rante ese intervalo se observaron niveles de volatilidad significativamente superiores a los del resto de la muestra. Esta mayor volatilidad refleja un contexto excepcional, que distorsiona de manera sustancial la dinámica habitual del proceso económico que buscamos modelar. Notemos que esto no representa un problema econométrico ya que es equivalente a utilizar una *dummy* que tome valor 1 en períodos distintos a los de la pandemia.

Si bien una alternativa posible sería modelar explícitamente este cambio mediante estructuras como un modelo con cambio de régimen (por ejemplo, Markov switching), optamos por una estrategia más parsimoniosa. Nuestra elección se basa en el objetivo de estimar los parámetros bajo un régimen económico relativamente estable y representativo del comportamiento de largo plazo, sin introducir complejidad adicional al modelo ni aumentar el riesgo de sobreajuste.

Teníamos  $d\Pi(t) = (\mu - \delta)\Pi(t) dt + \sigma\Pi(t) dz_t$ , por lo que haciendo el cambio de variable y aplicando Ito a  $G(\Pi, t) = \ln(\Pi(t))$ , obtenemos:

$$d \ln \Pi(t) = \left[ \frac{1}{\Pi(t)} \cdot (\mu - \delta)\Pi(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Pi(t)^2} \cdot \sigma^2 \Pi(t)^2 \right] dt + \frac{1}{\Pi(t)} \cdot \sigma \Pi(t) dz_t$$

$$d \ln \Pi(t) = \left[ (\mu - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma dz_t$$

Integrando ambos lados desde  $t-1$  hasta  $t$ , obtenemos que la primera diferencia del logaritmo se puede descomponer en una constante (que estimaremos) y un término de error normal:

$$\ln \Pi(t) - \ln \Pi(t-1) = \left[ (\mu - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] [t - (t-1)] + \sigma(z_t - z_{t-1})$$

$$\ln \Pi(t) - \ln \Pi(t-1) = \underbrace{(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2)}_{\equiv a} + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

Como  $\sigma \cdot \varepsilon_t$  es la única fuente de aleatoriedad, se tiene que:

$$Var(\ln \Pi(t) - \ln \Pi(t-1)) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

Recordemos que  $z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t$  con  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ , lo que implica que  $\sigma \cdot \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Para estimar  $(\mu - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2$ , podemos hacer una regresión contra una constante, que arroja el promedio de los  $\hat{T}$  datos de la variable regresada, esto es,  $a \equiv \frac{1}{\hat{T}} \sum_{t=1}^{\hat{T}} \ln \Pi(t) - \ln \Pi(t-1)$ .

Corriendo la regresión previamente explicada obtuvimos dos constantes, una para cada período seleccionado,  $\hat{a}_{pre\_2020} = -0.0073$  y  $\hat{a}_{post\_2020} = 0.0057$ . Por otro lado, tenemos  $\sigma_{pre\_2020}^2 = 0.126$  y  $\sigma_{post\_2020}^2 = 0.084$  o, lo que es lo mismo,  $\sigma_{pre\_2020} = 0.34$  y  $\sigma_{post\_2020} = 0.29$ . En base a estos datos podemos calcular  $(\mu - \delta) = a + \frac{\sigma^2}{2}$ .

### Costo de desarrollo por barril ( $D$ )

Por otra parte, necesitaremos evaluar  $D$  en nuestro modelo. La literatura indica que los costos de desarrollo (por barril), son crecientes respecto a la profundidad del agua, la severidad de las condiciones climáticas y la distancia a la costa. Recuerde que  $D$  también es el precio de ejercicio de la opción. Se modelan según la siguiente ecuación

$$D_j = A_j \cdot (Q_{oj})^\beta,$$

donde  $Q_{oj}$  es la cantidad de petróleo en el yacimiento  $j$ -ésimo,  $A_j$  es un parámetro asociado a los factores climáticos previamente mencionados y  $\beta$  un parámetro de economías de escala. Para calibrar el valor de  $\beta$  nos basamos en Beck et al (1977) que lo fijan en 0.8 ya que al reserva consta principalmente de petróleo.

Además, estos autores proyectaron los costos de petróleo para las 17 áreas en la que está dividida la Outer Continental Shelf (OCS), accidente geográfico legalmente definido de Estados Unidos, que está dividido en cuatro grandes regiones de arrendamiento: Golfo de México, Región del Atlántico, Región del Pacífico y Región de Alaska. Los autores hicieron proyecciones de los costos asociados a cada yacimiento mediante simulaciones de Monte Carlo. Si bien abarcaron las etapas de exploración, desarrollo y producción de cada yacimiento, nos limitaremos a tomar sus resultados vinculados a la etapa de desarrollo. En particular, por las semejanzas en las características geológicas con Vaca Muerta, tomamos los resultados del Golfo de México<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Beck, M. y Wiig, M. (1977). *The Economics of Offshore Oil and Gas Supplies*. D.C. Heath and Company Lexington, pp. 138, Table B-3

Table 2: Investment as a Function of Field Size, Oil (millions of 1975 dollars)

	Field Size (in $10^6$ bbl of Recoverable Reserves)							
	15	45	90	150	350	750	1400	2000
<b>Gulf of Mexico</b>								
Exploration Wells	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0
Platform Construction and Installation	9.8	12.6	16.8	30.5	66.5	147.2	268.8	385.6
Development Wells	1.6	8.6	19.1	32.4	78.4	169.9	318.4	456.0
Platform Equipment	2.8	7.7	14.8	24.3	57.9	125.9	235.6	337.4
Pipeline to Shore	14.0	31.1	32.4	33.8	61.2	74.8	94.8	108.0
Gathering Lines	0.5	0.5	0.5	0.9	1.6	4.1	6.4	9.4
Onshore Terminal	2.2	6.6	13.4	22.2	51.6	108.6	188.4	239.6
<b>Total Development</b>	30.9	67.1	97.0	144.1	317.2	630.5	1112.4	1536.0

La tabla 2 muestra el costo total de desarrollo en millones de dólares de 1975 para distintos tamaños de yacimiento medidos en millones de barriles de petróleo extraíbles (cada columna representa un tamaño de yacimiento distinto).

A partir de esta tabla calculamos el costo  $D$  para un yacimiento representativo de Vaca Muerta. Para ello realizamos el siguiente procedimiento: primero calculamos el tamaño del yacimiento representativo (teniendo en cuenta los recursos de petróleo que alcanza Vaca Muerta son 16,2 miles de millones de barriles <sup>3</sup> y hay 79 yacimientos activos <sup>4</sup>),

$$\bar{Q}_j = \sum_{j=1}^{79} \frac{Q_j}{j} = 202 \text{ millones de barriles (MMbbl)}$$

Dado que la tabla 2 no reporta el costo total de desarrollo para un yacimiento de 202 millones de barriles de petróleo recuperables (202 MMbbl<sup>5</sup>), estimamos dicho valor ajustando la relación entre el tamaño del yacimiento  $Q_j$  y el costo total de desarrollo  $D_j$  que se observa en la tabla. Para ello, realizamos una interpolación cúbica con los datos de la tabla 2.

Una vez calibrada esta relación, evaluamos el costo de desarrollo para un yacimiento de 202 MMbbl, obteniendo un valor estimado del costo total de 189,1 millones de dólares de 1975. Por lo tanto, el costo unitario de desarrollo por barril, en dólares de 1975, es

$$D^{1975} = \frac{189.1 \times 10^6 \text{ USD}}{202 \times 10^6 \text{ barriles}} \approx 0.936 \text{ USD/barril}$$

Para llevar esta estimación a valores reales actuales, se ajusta por la inflación acumulada

<sup>3</sup><https://desafiovacamuerta.ypf.com/vaca-muerta.html>

<sup>4</sup><http://datos.energia.gob.ar/dataset/produccion-de-petroleo-y-gas-por-pozo/archivo/43a09dce-1742-44d0-bc13-f193deaab563>

<sup>5</sup>MMbbl es la abreviatura para *millones de barriles* de petróleo: **MM** = millones, **bbl** = barriles.

entre 1975 y 2025. Utilizando los índices de precios al consumidor (IPC) para EE.UU.<sup>6</sup>, se obtiene:

$$\text{Factor de actualización} = \frac{CPI_{2025}}{CPI_{1975}} = \frac{319.8}{53.8} \approx 5.94$$

$$D^{2025} = D^{1975} \times 5.84 = 0.936 \times 5.84 \approx \boxed{5.47 \text{ USD/barril}}$$

Este valor actualizado se utilizará en la resolución de la ecuación (6), bajo el supuesto de que tanto  $V$  como  $D$  se expresan en dólares constantes de 2025 por barril.

### Dividend yield ( $\delta$ )

A fines de resolver la ecuación (6), necesitamos calcular el *dividend yield*  $\delta_t$ , definido como

$$\delta_t = \omega \left( \frac{\Pi_t - V_t}{V_t} \right)$$

donde  $\omega$  representa la fracción del yacimiento que se produce cada año,  $\Pi_t$  es la ganancia neta por barril, y  $V_t$  es el valor por barril de una reserva desarrollada.

Para estimar  $\delta_t$ , seguimos los supuestos utilizados por Pindyck (1994). En primer lugar, asumimos que el costo operativo por barril (*operating cost*), denotado  $OC_t$ , representa el 30% del precio del petróleo, es decir,  $OC_t = 0.3 \cdot P_t$ . A su vez, se considera que el valor de mercado por barril de la reserva desarrollada es un tercio del precio del petróleo, es decir,  $V_t = \frac{1}{3}P_t$ .

La ganancia antes de impuestos por barril (*earnings before tax*) se calcula como  $EBT_t = P_t - OC_t$ . Luego, si tomamos una tasa impositiva (corporate tax net of depreciation allowances) del 34%, la ganancia neta por barril resulta de aplicar:

$$\Pi_t = (1 - T_t) \cdot EBT_t$$

$$\Pi_t = (1 - 0.34) \cdot (P_t - 0.3 \cdot P_t)$$

$$\Pi_t = 0.46 \cdot P_t$$

---

<sup>6</sup>U.S. Bureau of Labor Statistics, Consumer Price Index for All Urban Consumers: All Items in U.S. City Average [CPIAUCSL], retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis; <https://fred.stlouisfed.org/series/CPIAUCSL>, July 14, 2025.

Finalmente, utilizamos una tasa de producción anual de  $\omega = 0.1$ , es decir, cada año se extrae el 10% del total de barriles del yacimiento, podemos calcular  $\delta_t$ :

$$\delta_t = 0.1 \left( \frac{0.46P_t - \frac{1}{3}P_t}{\frac{1}{3}P_t} \right)$$

$$\delta_t = \boxed{0.0386}$$

## 5 Resultados

Una vez obtenidos estos valores, tenemos todo lo necesario para resolver el problema de valuación utilizando diferencias finitas (cuya explicación dejamos en el apéndice).

Obtenemos los siguientes resultados:

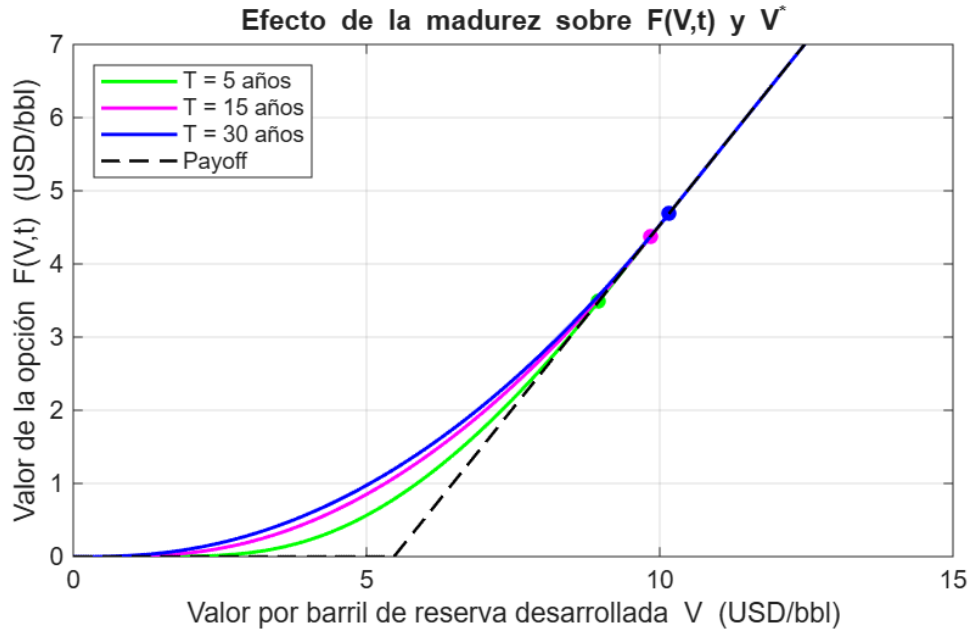


Figure 1: Efecto de tiempo hasta madurez sobre el valor de la opción y  $V^*$ .

Observamos en la figura 1 que la recta punteada,  $\max(S_T - D, 0)$ , es el *payoff* del *call* en el momento  $T$ . El precio o valor del *call* americano siempre está por encima de dicho *payoff*. Recordemos que  $V$  es el valor por barril del subyacente (la reserva desarrollada),  $D$  es el *strike price* de la opción,  $T$  es la duración de la concesión. Notemos que, siempre que  $T$  aumenta, el valor del *call* se desplaza hacia arriba.

Por otro lado, el dueño del *call* americano (en este caso el dueño de la reserva no desarrollada) ejercerá la opción en el momento en el que el valor de su opción coincida con el *payoff*

a tiempo  $T$  de dicha opción. En este caso, sería cuando las curvas hagan tangencia con la recta punteada.

Además, podemos analizar cómo varía el umbral de inversión óptimo con el horizonte temporal. Presentamos en la figura 2 la relación entre la madurez de la opción y el valor crítico partir del cual conviene ejercer la opción de forma anticipada.

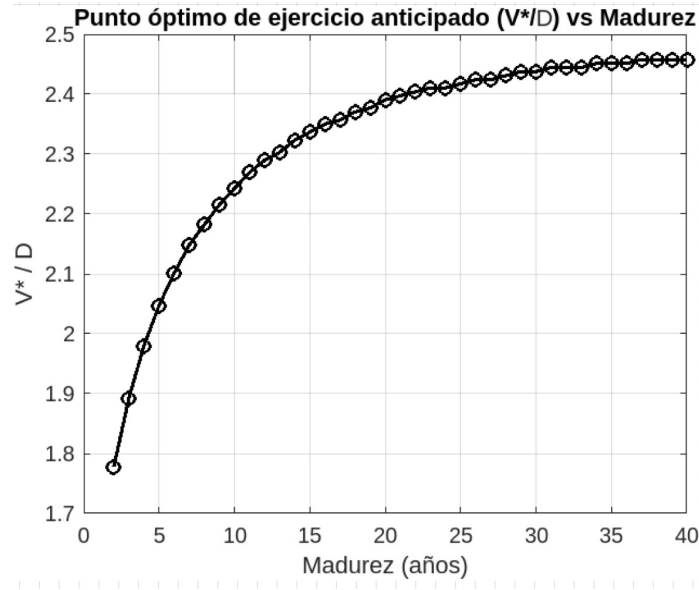


Figure 2: Punto óptimo de ejercicio anticipado  $\frac{V^*}{D}$  vs la madurez

En el anterior gráfico tenemos el ratio  $\frac{V^*}{D}$  en función de las distintas madureces o *time to expiration*. Como podemos ver, cuanto más tiempo falte para que expire la opción, más exigentes somos con el  $V^*$  para ejecutarla. Implícitamente, recordando que  $V_t = \frac{1}{3}P_t$ , estamos siendo más exigentes con el precio del petróleo.

## 6 Interpretación de los resultados

A modo de ejemplo ilustrativo de cómo utilizar nuestro trabajo, volvimos a correr el método de diferencias finitas explícitas explicado en el apéndice. La siguiente Tabla muestra los valores obtenidos.

Los parámetros utilizados fueron los siguientes:  $r = 0.03$ ,  $\delta = 0.0386$ ,  $D = 5.47$  dólares por barril, y un rango de madureces  $T \in \{5, 15, 30\}$  años. Para cada combinación de madurez y volatilidad ( $\sigma \in \{0.142, 0.25\}$ ), se resolvió el valor de la opción sobre una grilla de valores

del recurso  $V$ , normalizados por el costo de desarrollo  $D$ , en el rango  $V/D \in [0.80, 1.15]$ .

El método numérico se implementó sobre una grilla de 700 puntos en el espacio de  $V$  y una resolución temporal de  $2500 \times T$  pasos. El algoritmo de diferencias finitas explícitas permitió avanzar hacia atrás en el tiempo desde el vencimiento hasta el presente, imponiendo en cada paso el valor máximo entre el valor de continuación y el payoff inmediato.

Finalmente, para cada combinación de parámetros se interpoló el valor de la opción en el punto  $V_0 = (V/D) \cdot D$ , y se normalizó dividiendo por  $D$ , de modo de expresar todos los valores como múltiplos del costo de desarrollo. La tabla reporta dichos valores normalizados, reflejando el valor de la opción por dólar de inversión requerida.

Table 3: Valores de opciones (por dólar de costo de desarrollo) para distintas madureces ( $T$ ), volatilidades ( $\sigma$ ) y ratio  $\frac{V}{D}$

$V/D$	$T = 5$ años		$T = 15$ años		$T = 30$ años	
	$\sigma = 0.142$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.142$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.142$	$\sigma = 0.25$
0.80	0.02948	0.09182	0.06041	0.15484	0.07513	0.18209
0.85	0.04385	0.11401	0.07750	0.17928	0.09257	0.20680
0.90	0.06209	0.13865	0.09728	0.20531	0.11235	0.23289
0.95	0.07649	0.15640	0.11200	0.22352	0.12689	0.25104
1.00	0.10153	0.18493	0.13646	0.25211	0.15084	0.27937
1.05	0.13072	0.21566	0.16387	0.28218	0.17744	0.30902
1.10	0.16402	0.24849	0.19430	0.31371	0.20680	0.33997
1.15	0.18848	0.27150	0.21631	0.33552	0.22796	0.36131

Vamos a ilustrar el uso de la tabla de valores de opciones por dólar de costo de desarrollo utilizando un caso particular. Por ejemplo, dado que el costo de desarrollo es 5.47 dólares por barril, entonces el valor 0.9 implica un valor del proyecto de  $V = 4.93$  dólares por barril. Por lo tanto, el ratio es  $\frac{V}{D} = \frac{4.93}{5.47} = 0.90$ .

Ahora, si consideramos una madurez de  $T = 15$  años, una volatilidad  $\sigma = 0.142$  y utilizamos el ratio que encontramos antes (0,90), podemos despejar el valor que necesitamos de la tabla:

$$\frac{F(V, 0)}{D} = 0,09728$$

Por lo tanto, el valor total de la opción de desarrollar el yacimiento promedio de Vaca Muerta

(cuya cantidad de barriles de petróleo extraíbles es  $B_t = 202 \cdot 10^6$ ) es:

$$\begin{aligned}\text{Valor total} &= \frac{F(V, 0)}{D} \cdot B_t \cdot D \\ &= 0,09728 \cdot (5,47 \cdot 202 \cdot 10^6) \\ &= \$107,5 \text{ millones}\end{aligned}$$

A pesar de que  $V < D$ , es decir, que el valor presente descontado de la reserva es menor al costo de desarrollo, la opción de esperar sigue teniendo un valor significativo.

Esto demuestra cómo el enfoque de opciones reales permite capturar el valor de la flexibilidad, mientras que una evaluación tradicional basada únicamente en VPN sugeriría erróneamente no invertir.

## 7 Estática comparativa

Podemos hacer experimentos de estática comparativa para saber cómo varía el valor de la opción de desarrollar un yacimiento ante cambios en las condiciones del entorno, como la volatilidad del precio del petróleo o la duración de la concesión. A continuación, se presentan dos escenarios de comparación respecto al caso base.

### Aumentar la volatilidad

Si modificamos la volatilidad, por ejemplo tomamos un  $\sigma = 0,25$  y mantenemos la misma madurez, el valor relativo de la opción es 0,20531. El valor total sería:

$$0,20531 \times 1.10494 \times 10^9 = \$226,9 \text{ millones}$$

### Aumentar la madurez

Por otro lado, si elegimos otra madurez, por ejemplo  $T = 30$  y no modificamos la volatilidad  $\sigma = 0,142$ , el valor relativo es 0,11235. El valor total sería:

$$0,11235 \times 1.10494 \times 10^9 = \$124,1 \text{ millones}$$

## Interpretación

Luego, podemos presentar ambos resultados en la siguiente tabla, considerando el caso base y los dos escenarios nuevos.

<b>Escenario</b>	$\frac{F(V,0)}{D}$	Valor total [USD millones]
$T = 15, \sigma = 0,142$	0,09728	107,5
$T = 15, \sigma = 0,25$	0,20531	226,9
$T = 30, \sigma = 0,142$	0,11235	124,1

El valor de la opción **aumenta con la volatilidad**, ya que una mayor incertidumbre eleva la posibilidad de que el precio del petróleo suba en el futuro.

El valor también **aumenta con la madurez**, ya que un mayor plazo permite más oportunidades para que aumente el precio y por ende se quiera ejercer la opción.

## 8 Extensiones: *Time to Build*.

A continuación, se presenta una extensión del modelo base incorporando explícitamente un período de construcción previo a la entrada en operación, conocido como *time to build*. Esta modificación permite capturar el hecho de que, una vez tomada la decisión de invertir, existe un lapso durante el cual la inversión es irreversible pero aún no genera flujos de caja. Incorporar esta fricción temporal es especialmente relevante en proyectos de desarrollo energético, donde la construcción de la infraestructura puede requerir varios años, y permite analizar cómo dicha demora afecta el valor de la opción y la regla óptima de inversión.

Pindyck (1986) estudia el valor de una opción para desarrollar un proyecto cuando los gastos deben hacerse secuencialmente, que no pueden exceder una tasa máxima, y que se vuelven productivos recién una vez toda la secuencia se haya completado. Por ejemplo, un proyecto que requiere una erogación total de \$5 millones de dólares puede tener una tasa máxima de inversión de \$1 millón por año, de forma que el *time to build* mínimo es cinco años. Esto es análogo a una opción compuesta: existe una opción para invertir los primeros mil, una vez que se ejecuta, se obtiene la opción para invertir los siguientes mil y así consecutivamente.

### 8.1 Modelo de inversión bajo incertidumbre cuando hay *time to build*

La principal distinción respecto al modelo base es que ahora construir la reserva desarrollada conlleva una secuencia de gastos de inversión. El payoff de completar la reserva desarrollada es el valor de mercado de la reserva desarrollada. La regla de decisión consiste en analizar si se debe gastar más plata en el proyecto considerando: el valor del proyecto hoy ( $V$ ), lo que aún falta invertir para completar la inversión, es decir, la inversión restante para obtener la reserva desarrollada ( $K$ ), parámetros de riesgo ( $\sigma$ ) y el costo de oportunidad de retrasar la inversión ( $\delta$ ), que son los dividendos que te estás perdiendo de cobrar por retrasar más la inversión. También se menciona que la incertidumbre sobre el valor futuro del proyecto  $V$  no está relacionada con cuán avanzado está el proyecto o con cuánto ya se ha invertido, sino únicamente con el horizonte temporal. Por ejemplo, si se quiere saber el valor de  $V$  en un futuro cercano, la incertidumbre es baja. En definitiva, la incertidumbre no se reduce con el tiempo ni con la inversión.

A su vez, para este modelo es importante diferenciarlos proyectos de vida finita e infinita. En

nuestro caso, un yacimiento petrolífero es un proyecto de vida limitada, ya que los recursos en el suelo son finitos. En estos casos, los flujos de caja no serán una fracción constante del valor del proyecto, es decir no serán  $\delta \cdot V$ , donde  $\delta$  es el costo de oportunidad de no tener el proyecto terminado: es una tasa efectiva que mide cuánto valor se pierde, en promedio, por cada unidad de tiempo en que el proyecto sigue incompleto, dado que los beneficios futuros están más lejos en el tiempo.

Sea  $\Pi_t$  el precio post impuesto de vender un barril, es decir,  $\Pi_t$  es el precio del output del proyecto que es la reserva desarrollada. Asumimos que sigue un proceso log-normal,

$$d\Pi = (\mu - \delta) \cdot \Pi \cdot dt + \sigma \cdot \Pi \cdot dz, \text{ donde}$$

- $\mu$  es la tasa de retorno de un activo que correlaciona perfectamente con  $\Pi$
- como los barriles de petróleo se pueden almacenar,  $\delta \cdot \Pi$  es el beneficio inmediato asociado al almacenamiento. Estos beneficios no son pagos explícitos pero tienen un valor real; es decir, el mantener guardado un barril de petróleo brinda flexibilidad ante shocks de demanda, por ejemplo.

Sea

- $\tau$  el tiempo en el que se completa la construcción
- $T$  la vida útil de la reserva desarrollada

El Lema de Itô se aplica a procesos que tienen la siguiente forma general:

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dz_t$$

Donde:

- $a(X_t, t)$  es el **término determinístico** (también llamado *drift*).
- $b(X_t, t)$  es el **término estocástico** (también llamado *volatilidad*).

En nuestro caso:

$$d\Pi(t) = (\mu - \delta)\Pi(t) dt + \sigma\Pi(t) dz_t$$

Comparando con la ecuación general:

- Proceso:  $X_t = \Pi(t)$
- Término determinístico:  $a(X_t, t) = (\mu - \delta)\Pi(t)$
- Término estocástico:  $b(X_t, t) = \sigma\Pi(t)$

Sea  $f(\Pi(t)) = \ln \Pi(t)$ . El Lema de Itô establece que:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \cdot b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot b dz_t$$

Calculamos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{\Pi(t)}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = -\frac{1}{\Pi(t)^2}$

Sustituyendo:

$$d \ln \Pi(t) = \left[ \frac{1}{\Pi(t)} \cdot (\mu - \delta)\Pi(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Pi(t)^2} \cdot \sigma^2 \Pi(t)^2 \right] dt + \frac{1}{\Pi(t)} \cdot \sigma \Pi(t) dz_t$$

$$d \ln \Pi(t) = \left[ (\mu - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma dz_t$$

Integrando ambos lados desde 0 hasta  $t$ :

$$\ln \Pi(t) = \ln \Pi(0) + \left[ (\mu - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma z_t$$

Finalmente:

$$\Pi(t) = \Pi(0) \cdot \exp \left\{ \left[ (\mu - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma z_t \right\}$$

El valor de la reserva desarrollada al terminar la construcción viene dada por

$$V(\tau) = \int_0^T \mathbb{E}_\tau(\Pi(s)) \cdot e^{-\mu \cdot s} ds$$

si  $\mathbb{E}(\exp\{\sigma \cdot z_t - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot t\}) = 1$ ,

$$V(\tau) = \int_0^T \Pi(\tau) \cdot e^{(\mu-\delta) \cdot s} \cdot e^{-\mu \cdot s} ds$$

$$V(\tau) = \Pi(\tau) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot (1 - e^{-\delta \cdot T})$$

$$V(\tau) = \Pi(\tau) \cdot \phi(\delta, T)$$

Notar que el valor de la reserva al final de la construcción, en  $\tau$ , es proporcional al “precio”  $\Pi(\tau)$ . Antes de que se termine la “construcción” (o sea para  $t < \tau$ ) el valor del proyecto también es proporcional al precio del output en ese momento,  $V(t) = \phi(\cdot) \cdot \Pi(t)$ .

Durante la construcción de la reserva desarrollada  $\phi(\delta, T) = \phi$  es constante. Sin embargo, una vez finalizada esta etapa, cuando comienza la de operación,  $\phi(\delta, T)$  ya no es constante. Entonces, durante el proceso de construcción, dado que  $\phi$  es constante directamente podemos asumir que:

$$dV = (\mu - \delta) \cdot V \cdot dt + \sigma \cdot V \cdot dz$$

Al introducir *time to build*, hay dos variables de estado:

- $K$ : inversión restante para obtener la reserva desarrollada
- $V$ : valor por barril de reserva desarrollada

El proyecto requiere una inversión total de  $K$ , y la inversión solo puede realizarse a una tasa máxima  $k$  por unidad de tiempo. Entonces, el tiempo mínimo de construcción es:

$$t_{\min} = \frac{K}{k}$$

Este tiempo representa el período más corto en el que se puede completar el proyecto si se invierte al ritmo máximo permitido. Durante la fase de construcción, el proyecto aún no genera beneficios, por ende existe un costo de oportunidad asociado a la demora en recibir los flujos de caja. Como consecuencia, cuando  $k$  es pequeño, se es más exigentes con  $V^*$ ,

por esta demora de recepción de flujos de caja.

La variable de control es  $I$ , la tasa de inversión.  $I^*(V, K)$  indica una regla de decisión para el inversor. Suponiendo que:

$$0 \leq I^*(V, K) \leq k,$$

donde  $k$  es la tasa máxima de inversión. Dado  $V$ , hay soluciones de esquina,  $I^*(V, K) = 0$  o  $I^*(V, K) = k$  (se invierte lo máximo posible). Intuitivamente, esto se debe a que no tiene sentido invertir poco si no se justifica, ni esperar si ya se justifica la inversión. Esto, a su vez, genera  $V^*(K)$ , un *cutoff* para el valor de la reserva desarrollada, de forma que

$$\begin{cases} V \geq V^* \text{ (sí se invierte: } I^*(V, K) = k) \\ V < V^* \text{ (no se invierte: } I^*(V, K) = 0) \end{cases}$$

Cuando  $V \geq V^*$  se está en la región de inversión y el valor de la reserva no desarrollada se denota con  $F(V, K)$ . Cuando  $V < V^*$  (la región de no inversión), el valor de la reserva no desarrollada se denota con  $f(V, K)$ . Análogamente al modelo base sin *time to build*, llegamos a las siguientes ecuaciones diferenciales parciales.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot V^2 \cdot F_{VV} + (r - \delta) \cdot V \cdot F_V - r \cdot F - kF_K - k &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot V^2 \cdot f_{VV} + (r - \delta) \cdot V \cdot f_V - r \cdot f &= 0 \end{aligned}$$

sujeto a las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} F(V, 0) &= V \\ \lim_{V \rightarrow \infty} F_V(V, K) &= e^{-\delta K/k} \\ f(0, K) &= 0 \\ f(V^*, K) &= F(V^*, K) \\ f_V(V^*, K) &= F_V(V^*, K) \end{aligned}$$

La primera condición dice que cuando se completa el proyecto ( $K=0$ ), el valor de la reserva no desarrollada ( $F$ ) es el valor de mercado de la reserva desarrollada por barril ( $V$ ). Por otra parte, la segunda condición dice que cuando  $V$  es muy grande, siempre se invierte a la tasa

máxima (k) pero aún así existe un pequeño costo de oportunidad porque ese dinero que se está poniendo por el momento no tiene rendimiento. La tercera condición dice que el valor de la reserva no desarrollada (f) es mínimo cuando  $V=0$ . Las últimas dos son las típicas *value matching and smooth pasting conditions*.

Por último habría que resolver este sistema de ecuaciones diferenciales sujeto a las condiciones de borde para encontrar el  $V^*$  a partir del cual es conveniente invertir.

## 9 Conclusión

Esta tesis estudió la decisión de inversión en proyectos de desarrollo energético bajo incertidumbre, aplicando el enfoque de opciones reales al caso de Vaca Muerta. Para ello, se modeló la inversión como una opción financiera, y se resolvió un modelo teórico que estima endógenamente el momento óptimo de desarrollo de una reserva petrolífera. Lo calibramos con datos del caso argentino con el objetivo de determinar, para un yacimiento representativo de Vaca Muerta, el valor actual de la opción de desarrollar y el umbral crítico a partir del cual conviene ejecutar la inversión.

Mostramos gráficamente los valores críticos a partir de los cuales conviene ejecutar la inversión para distintas madureces ( $T = 5, T = 15, T = 30$ ), es decir, cuando el *pay-off* inmediato es tangente al valor de la opción; esto ocurre cuando esperar más ya no genera un beneficio adicional que justifique postergar la inversión. Cuando  $T = 30$  obtenemos un  $V^* = 10.05$ ,  $T = 15$  obtenemos un  $V^* = 9.85$  y  $T = 5$  obtenemos un  $V^* = 8.05$ . Por lo tanto, podemos observar que a medida que la madurez es mayor, mayor es el valor de la opción (para un mismo  $V$ ). La relación entre el momento óptimo de ejercer la opción y la madurez cuando se acerca el vencimiento de la concesión es creciente y concava.

Además, se incorporó una extensión del modelo que contempla la posibilidad de un *time to build*, es decir, un lapso entre el momento en que se toma la decisión de invertir y el inicio de los flujos de caja. Se mostró que la existencia de un *time to build* eleva el umbral requerido para invertir.

En conjunto, este trabajo proporciona una herramienta para evaluar proyectos como Vaca Muerta, y pone en evidencia cómo la volatilidad, la duración del contrato y los costos de desarrollo afectan el valor de invertir y la conveniencia de esperar.

## 10 Apéndice

### El método de Diferencias Finitas

Dado que la ecuación en derivadas parciales que describe el valor de la opción incluye una derivada temporal, no se puede obtener una solución en forma cerrada. Por lo tanto, recurrimos a métodos numéricos como este que se destaca frente a otros por su implementación sencilla, a partir de la condición terminal y las condiciones de frontera, se puede avanzar paso a paso hacia atrás en el tiempo con una fórmula recursiva directa, sin necesidad de resolver sistemas lineales en cada iteración. Esto lo hace computacionalmente menos costoso que otros, más fácil de interpretar y de implementar. A continuación se describe el proceso.

Recordemos que la ecuación diferencial que estamos queriendo resolver es:

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_v^2 \cdot V^2 \cdot F_{VV} + (r - \delta)V F_V - r \cdot F + F_t = 0$$

### Discretización del espacio y del tiempo

Dividimos el dominio en una grilla:

- $V_i = i \cdot \Delta V$ , para  $i = 0, 1, \dots, N$
- $t_n = n \cdot \Delta t$ , para  $n = 0, 1, \dots, M$

Notamos  $F_i^n \approx F(V_i, t_n)$ . A continuación, mostramos cómo se discretiza cada derivada.

Esto se puede escribir como un sistema lineal para cada paso de tiempo hacia atrás, desde  $t = T$  hasta  $t = 0$ .

### Primera derivada centrada

Expandiendo  $F$  en serie de Taylor alrededor de  $V_i$ :

$$F(V_i + \Delta V, t_n) = F(V_i, t_n) + \Delta V \cdot F_V(V_i, t_n) + \frac{(\Delta V)^2}{2} F_{VV}(V_i, t_n) + \frac{(\Delta V)^3}{6} F_V^{(3)}(V_i, t_n) + \dots$$
$$F(V_i - \Delta V, t_n) = F(V_i, t_n) - \Delta V \cdot F_V(V_i, t_n) + \frac{(\Delta V)^2}{2} F_{VV}(V_i, t_n) - \frac{(\Delta V)^3}{6} F_V^{(3)}(V_i, t_n) + \dots$$

Restando las dos expresiones:

$$F(V_i + \Delta V, t_n) - F(V_i - \Delta V, t_n) = 2\Delta V \cdot F_V(V_i, t_n) + \frac{2(\Delta V)^3}{6} F_V^{(3)}(V_i, t_n) + \dots$$

Dividiendo por  $2\Delta V$ :

$$F_V(V_i, t_n) = \frac{F(V_i + \Delta V, t_n) - F(V_i - \Delta V, t_n)}{2\Delta V} + \mathcal{O}(\Delta V^2) \approx \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta V}$$

### Segunda derivada centrada

Sumando las dos expansiones de Taylor:

$$F(V_i + \Delta V, t_n) + F(V_i - \Delta V, t_n) = 2F(V_i, t_n) + (\Delta V)^2 F_{VV}(V_i, t_n) + \frac{(\Delta V)^4}{12} F_V^{(4)}(V_i, t_n) + \dots$$

Reordenando:

$$\begin{aligned} F_{VV}(V_i, t_n) &= \frac{F(V_i + \Delta V, t_n) - 2F(V_i, t_n) + F(V_i - \Delta V, t_n)}{(\Delta V)^2} + \mathcal{O}(\Delta V^2) \\ &\approx \frac{F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n}{(\Delta V)^2} \end{aligned}$$

### Derivada temporal hacia atrás

Ahora fijamos  $V_i$  y desarrollamos respecto al tiempo:

$$F(V_i, t_n) = F(V_i, t_{n-1}) + \Delta t \cdot \frac{\partial F}{\partial t}(V_i, t_{n-1}) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(V_i, t_{n-1}) + \dots$$

Despejando la derivada temporal:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(V_i, t_{n-1}) = \frac{F(V_i, t_n) - F(V_i, t_{n-1})}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \approx \frac{F_i^n - F_i^{n-1}}{\Delta t}$$

### Ecuación en forma computacional

Sustituyendo las derivadas en la PDE:

$$\begin{aligned} \frac{F_i^n - F_i^{n-1}}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot V_i^2 \cdot \frac{F_{i+1}^{n-1} - 2F_i^{n-1} + F_{i-1}^{n-1}}{(\Delta V)^2} \\ &+ (r - \delta)V_i \cdot \frac{F_{i+1}^{n-1} - F_{i-1}^{n-1}}{2\Delta V} - r \cdot F_i^{n-1} \end{aligned}$$

Reordenando, se obtiene la forma explícita del sistema:

$$F_i^n = a_i F_{i-1}^{n-1} + b_i F_i^{n-1} + c_i F_{i+1}^{n-1}$$

con los coeficientes definidos como:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\sigma^2 V_i^2}{\Delta V^2} - \frac{(r - \delta)V_i}{\Delta V} \right] \\ b_i &= 1 - \Delta t \left[ \frac{\sigma^2 V_i^2}{\Delta V^2} + r \right] \\ c_i &= \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\sigma^2 V_i^2}{\Delta V^2} + \frac{(r - \delta)V_i}{\Delta V} \right] \end{aligned}$$

### Interpretación

Cada fila de la grilla corresponde a un posible valor del barril  $V_i$ , y cada columna a un instante de tiempo.

El algoritmo avanza hacia atrás en el tiempo desde la condición terminal  $F(V, T)$ , combinando los valores de cada punto y sus vecinos a través de los coeficientes  $a_i, b_i, c_i$ .

La solución final  $F(V_i, 0)$  entrega el valor actual de la opción para cada nivel del valor de la reserva.

## 11 Referencias

Avinash Dixit y Robert Pindyck. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton University Press.

James L. Paddock; Daniel R. Siegel; James L. Smith. (1988). *Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases*. The Quarterly Journal of Economics, Vol. 103., No. 3 (Aug., 1988), 479-508.

Saman Majd y Robert Pindyck. (1987). *Time to Build, Option Value, and Investment Decisions*. Journal of Financial Economics 18 (1987) 7-27. North Holland.

Frederik W. Mansvelt Beck y Karl M. Wiig. (1977). *The Economics of Offshore Oil and Gas Supplies*. D.C. Heath and Company Lexington, Massachusetts Toronto.

U.S. Bureau of Labor Statistics, Consumer Price Index for All Urban Consumers: All Items in U.S. City Average [CPIAUCSL], retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis; <https://fred.stlouisfed.org/series/CPIAUCSL>, July 14, 2025.

Beck, M. y Wiig, M. (1977). *The Economics of Offshore Oil and Gas Supplies*. D.C. Heath and Company Lexington, pp. 138, Table B-3.