

Departamento de Economía

Tipo de documento: Tesis de maestría



Maestría en Economía

Fertilidad por cohorte: Un análisis de equilibrio general

Autoría: Tan Jun Ríos, María Angelica

Fecha: 2025

¿Cómo citar este trabajo?

Tan Jun Ríos, M. (2025). "Fertilidad por cohorte: Un análisis de equilibrio general". [Tesis de maestría. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella
<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13573>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la **Universidad Torcuato Di Tella** bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Internacional
Dirección: <https://repositorio.utdt.edu>



Departamento de Economía

Maestría en Economía

Tesis MAECO

Fertilidad por cohorte: Un análisis de equilibrio general

Alumna:

Tan Jun Ríos, María Angélica

Legajo:

23I884

Tutor:

Pablo Andrés Neumeyer

Junio 2025

Resumen: Este estudio desarrolla un modelo de equilibrio general con generaciones superpuestas (OLG) para analizar la dinámica de la fertilidad por cohorte, integrando factores económicos (costos de crianza, acumulación de capital humano) y biológicos (ventana reproductiva finita, eficiencia reproductiva). Utilizando datos de Estados Unidos (1960–2023), se evidencia una caída sostenida de la tasa de fecundidad total (TFR) y un retraso en la edad máxima de fertilidad en cohortes recientes, modelado mediante distribuciones log-normales de las Tasas Centrales de Natalidad (CBR). El marco teórico identifica que el consumo y la eficiencia reproductiva son los principales impulsores de las decisiones de natalidad. Las simulaciones revelan trayectorias de fertilidad relativamente estables entre cohortes bajo los supuestos del modelo, el cual sirve como base para futuras extensiones que incorporen progreso tecnológico, heterogeneidad en preferencias y cambios culturales, con aplicaciones en políticas reproductivas y sostenibilidad demográfica.

Palabras claves: Fertilidad por cohorte, equilibrio general, OLG model, postergación de la maternidad.

1 Introducción

La postergación de la maternidad representa un fenómeno demográfico y socioeconómico de creciente relevancia, con implicancias profundas para el crecimiento económico, la estructura etaria de la población y el bienestar intergeneracional. En las últimas décadas, el aumento de la edad de la madre al primer nacimiento ha redefinido las trayectorias vitales, no solo en países desarrollados, sino también en economías emergentes, donde la transición demográfica avanza a ritmos acelerados. El presente trabajo busca contribuir a la comprensión de este fenómeno mediante un modelo teórico que, sin pretender agotar su complejidad, integra dimensiones económicas y biológicas frecuentemente analizadas de forma fragmentada en la literatura.

Desde la economía, los modelos clásicos de fertilidad han destacado el papel de los incentivos individuales, como el costo de oportunidad del tiempo dedicado a la crianza [Becker, 1991] y el impacto del *skill premium* en la inversión educativa [Galor and Weil, 2000]. Sin embargo, estos enfoques suelen pasar por alto las restricciones biológicas que limitan la ventana reproductiva. Por otro lado, la demografía ha enfatizado el *tempo effect* [Bongaarts and Feeney, 1998] —el retraso en la maternidad como factor

distorsionador de las tasas de fecundidad—, mientras que la biología reproductiva alerta sobre los riesgos crecientes de infertilidad y complicaciones médicas asociadas a la edad materna avanzada [Leridon, 2004]. Este trabajo propone un puente entre estas perspectivas, explorando cómo la interacción de factores económicos y fisiológicos moldea las decisiones reproductivas.

El modelo desarrollado aquí se enmarca dentro de la tradición de los modelos de generaciones superpuestas (OLG), ampliando su alcance para incorporar dos elementos frecuentemente subestimados:

- La ventana reproductiva finita, que impone restricciones temporales a la postergación de la maternidad.
- Los costos dinámicos de la crianza, que reflejan no solo gastos materiales, sino también oportunidades perdidas en la acumulación de capital humano.

Este enfoque se centra en identificar mecanismos clave que vinculan la postergación de la maternidad con resultados agregados, como la fecundidad por cohorte. Su objetivo es complementar marcos existentes al ofrecer una representación de las restricciones que enfrentan las mujeres en contextos de alta movilidad laboral y aspiraciones educativas.

El documento se estructura en seis secciones. La Sección 2 revisa la literatura económica existente en cuanto a elecciones de maternidad. La Sección 3 revisa la evolución de la tasa de fertilidad total ("*Total Fertility Rate*") y propone un modelo estadístico para la tasa de nacimientos por cohorte ("*Central Birth Rate by Cohort*") para Estados Unidos. La Sección 4 presenta el marco teórico y formaliza un modelo donde se deriva implicaciones para la tasa de natalidad. La Sección 5 explora los resultados obtenidos por el modelo. Finalmente, la Sección 6 concluye y discute líneas futuras de investigación.

2 Revisión de la literatura

La dinámica de la fertilidad ha sido abordada por una amplia literatura que combina teoría económica, evidencia empírica e institucionalidad comparada. Estos estudios han sido clave para entender cómo factores estructurales, tecnológicos, culturales y

demográficos inciden en las decisiones reproductivas, especialmente en un contexto donde las tasas de fecundidad han disminuido de forma persistente y muchas mujeres retrasan la maternidad. Para modelos de generaciones superpuestas con fertilidad endógena por cohorte, estas contribuciones ofrecen fundamentos esenciales para incorporar realismo y microfundamentos sólidos en las decisiones intertemporales de los hogares.

Uno de los mecanismos más relevantes en la transición demográfica moderna es la reducción de la mortalidad infantil. En modelos teóricos como el de Doepke [2005], esta caída actúa como un incentivo directo a disminuir la fecundidad, dado que los padres ya no necesitan tener muchos hijos para asegurar que algunos lleguen a la adultez. Esta lógica se refuerza en contextos donde la educación se vuelve más rentable y costosa, lo que lleva a un mayor gasto por hijo. Greenwood et al. [2017] amplían este mecanismo integrando progreso técnico y cambios sectoriales en un marco general de crecimiento económico, mostrando cómo la caída de la mortalidad interactúa con otros factores para acelerar la transición demográfica.

Junto con la mortalidad, el acceso efectivo a métodos anticonceptivos ha transformado la relación entre preferencias reproductivas y resultados observados. Rosenzweig and Schultz [1989] muestran que la disponibilidad de anticoncepción moderna permite a los hogares alinear sus decisiones de fecundidad con sus objetivos educativos y laborales, reduciendo los nacimientos no planificados y permitiendo el aplazamiento de la maternidad. En un estudio complementario, Donohue and Levitt [2001] argumentan que la legalización del aborto en Estados Unidos redujo la cantidad de nacimientos no deseados, lo que tuvo efectos sociales agregados. Ambos trabajos ilustran cómo la capacidad de ejercer agencia reproductiva es un componente central en la dinámica moderna de fecundidad.

La literatura también ha enfatizado el rol de las normas sociales, preferencias culturales y transmisión intergeneracional de valores en las decisiones reproductivas. Spolaore and Wacziarg [2022] proponen que muchas de las diferencias en los niveles de fecundidad entre regiones del mundo no pueden explicarse solo por variables económicas, sino que responden a patrones culturales persistentes. Estas normas afectan las aspiraciones, el tamaño ideal de familia y los roles de género, y pueden mantenerse incluso cuando las condiciones estructurales cambian. En esta misma

línea, Kearney and Levine [2015] documentan cómo las expectativas sobre el futuro y el entorno social inciden en la fecundidad adolescente en Estados Unidos, sugiriendo que factores como el horizonte de planificación o la percepción de oportunidades laborales son claves para entender las decisiones reproductivas.

Por otro lado, la legislación e institucionalidad han tenido efectos determinantes. Hazan and Berdugo [2002] desarrollan un modelo donde la prohibición del trabajo infantil y la expansión de la escolarización obligatoria modifican los retornos esperados por hijo, reduciendo la conveniencia económica de tener muchos hijos. Doepke and Zilibotti [2005] complementan esta visión con un enfoque de economía política, argumentando que los cambios institucionales en torno al trabajo infantil se vinculan con transiciones de poder desde sectores con alta fecundidad hacia clases medias con preferencias por una fecundidad más baja y mayor inversión por hijo.

Finalmente, los sistemas de pensiones y el desarrollo de los mercados financieros han permitido a los hogares reducir su dependencia en los hijos como estrategia de seguridad para la vejez. En contextos donde no existen mecanismos formales de retiro o ahorro, tener muchos hijos puede representar una inversión intergeneracional. Sin embargo, Coeurdacier et al. [2014] y Danzer and Zyska [2023] muestran que el fortalecimiento de las instituciones financieras y la cobertura previsional permite sustituir este rol tradicional de la familia, disminuyendo así los incentivos económicos a la alta fecundidad. Estas decisiones, aunque económicas, tienen consecuencias demográficas acumulativas que inciden en la trayectoria poblacional de largo plazo.

En conjunto, esta literatura converge en la idea de que la fecundidad por cohorte es el resultado de decisiones racionales bajo múltiples restricciones: económicas, biológicas, institucionales y culturales. Su modelización requiere incorporar factores dinámicos y heterogéneos, como la edad, el capital humano y las condiciones del mercado laboral, además de los valores sociales dominantes. Para capturar estas complejidades, los modelos de equilibrio general con generaciones superpuestas ofrecen un marco especialmente adecuado, al permitir analizar la interacción entre decisiones individuales y resultados agregados en una economía en transición demográfica.

3 Datos y modelo estadístico

3.1 Evolución del la TFR en el mundo

En esta sección analizamos la Tasa Total de Fecundidad (TFR, por sus siglas en inglés), un indicador demográfico clave que mide el número promedio de hijos que una mujer tendría a lo largo de su vida reproductiva si experimentara las tasas de fecundidad específicas por edad actuales y sobreviviera hasta el final de sus años reproductivos (14 a 49 años). Este indicador, calculado como la suma de las tasas de fecundidad por grupos de edad, proporciona el patrón de natalidad en un momento dado.

La Figura 1 muestra que los datos del Banco Mundial¹ revelan una tendencia descendente consistente en la TFR en todas las regiones (además de Estados Unidos y el mundo en su conjunto) entre 1960 y 2023, reflejando una transición demográfica global hacia tasas de fecundidad más bajas. A nivel mundial, la TFR disminuyó de 4.69 hijos por mujer en 1960 a 2.20 en 2023. El UNFPA [United Nations Population Fund, 2023] proyecta que la TFR global podría alcanzar 2.1 para 2050². Esta tendencia es evidente en todas las regiones, aunque con variaciones en la magnitud y el ritmo del descenso (ver Tabla 1 en el Anexo).

La teoría demográfica ha demostrado cómo las sociedades pasan de altas tasas de natalidad y mortalidad a tasas bajas a medida que se desarrollan económicamente (transición demográfica). El estudio en The Lancet [Bhattacharjee] documenta que las tasas de fecundidad globales han disminuido de 4.84 en 1950 a 2.23 en 2021, con el 53.9% de las ubicaciones por debajo del nivel de reemplazo (2.1) en 2021. Un cambio estructural significativo ocurrió en Asia Oriental con la implementación de la política del hijo único en China en 1979, que provocó una caída abrupta en la TFR de la región, de 3.05 en 1980 a 1.86 en 2000. En Europa, el descenso de la TFR comenzó en el siglo XIX, con países como Francia liderando esta tendencia, mientras que en América Latina y Asia, el descenso se intensificó a mediados del siglo XX, impulsado

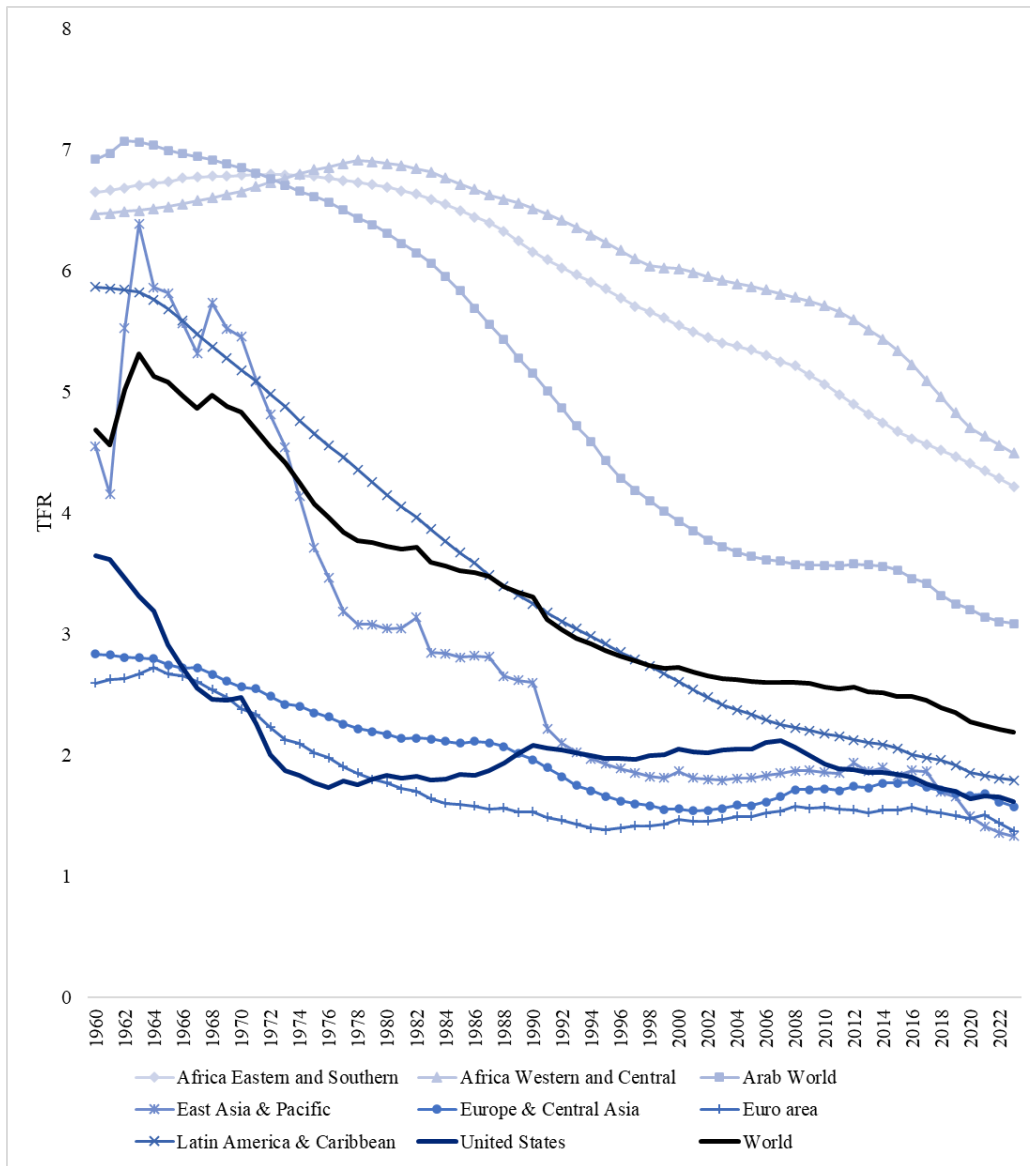
¹World Bank Data: <https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.TFRT.IN>

²Esta cifra global está influenciada por tasas más altas en regiones como África, donde la TFR sigue siendo significativamente mayor que en regiones desarrolladas como Europa o América del Norte.

por la urbanización y el acceso a la educación, según el estudio de Our World in Data [Dattani et al., 2025]. En África, el descenso es más reciente y gradual, con tasas que permanecen altas en regiones como África Subsahariana.

En Estados Unidos, la TFR ha experimentado una disminución significativa, pasando de 3.65 en 1960 a 1.62 en 2023. Esta cifra está por debajo del nivel de reemplazo de 2.1, lo que indica que, sin inmigración, la población podría disminuir a largo plazo, planteando desafíos como el envejecimiento poblacional y la presión sobre los sistemas de pensiones y salud. Un informe del CDC [National Center for Health Statistics, 2024] indica que la tasa general de fecundidad en EE. UU. alcanzó un mínimo histórico en 2023, con una disminución del 3% respecto a 2022, continuando una tendencia descendente observada desde 2014.

Figure 1: Evolución de la Tasa Total de Fecundidad



Evolución de las TFR desde 1960 a 2023 por continente y para EEUU y el mundo.

Fuente: Elaboración propia con datos del Banco Mundial, 2025.

3.2 Modelo estadístico para "Central Birth Rate by Cohort" de Estados Unidos

En esta sección se implementará un modelo estadístico que busca analizar la dinámica de la fertilidad indagando en los patrones de cuántos hijos tienen las mujeres y a qué edades. Estos patrones no son estáticos, sino que varían significativamente tanto a lo largo de la vida de una mujer como entre diferentes generaciones (o cohortes).

Para cuantificar y explicar estas variaciones, se utilizarán datos detallados para Estados Unidos del *National Center for Health Statistics (CDC)*, particularmente a través de las Tasas Centrales de Natalidad (CBR por sus siglas en inglés) ³. Las CBR miden los nacimientos por edad específica de la mujer en un año dado, típicamente expresadas en nacimientos por 1000 mujeres por año. En la Figura 2 se observa la tasa central de natalidad por cohorte.

El modelo estadístico propuesto busca aproximar las tasas observadas $CBR(a, t)$ que dependen de la edad de la mujer (t) y de su cohorte de nacimiento (a). Empíricamente, se observa que la fecundidad depende de la edad de la mujer (con una distribución en forma de campana) y que la tasa de fertilidad ha ido disminuyendo en las cohortes más recientes. Por lo tanto, la tasa de fecundidad específica para las mujeres de edad

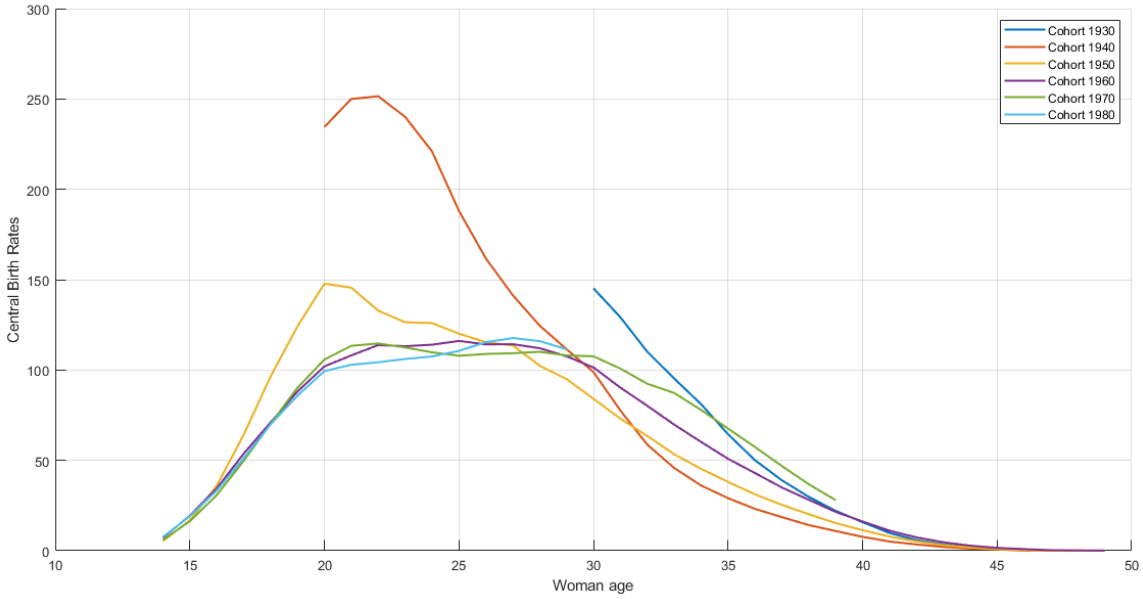
³Las tasas centrales de natalidad representan el número de nacimientos ocurridos a mujeres de una edad específica t , dividido por la población total de mujeres de esa misma edad en un año dado y , expresado por cada 1.000 mujeres. Se calculan por edad simple (14–49 años) y por orden de nacimiento n (del primero al octavo o más), para cada año calendario entre 1960 y 2005. La fórmula general es:

$$CBR_{t,y}^n = \frac{B_{t,y}^n}{P_{t,y}} \times 1000$$

donde $B_{t,y}^n$ es el número de nacimientos de orden n a mujeres de edad t , y $P_{t,y}$ es la población total de mujeres de esa edad, independientemente del número de hijos que tengan. Para reducir sesgos por acumulación de datos en edades específicas, las tasas se suavizan promediando las tasas de la edad anterior, la edad actual y la edad siguiente. La suma de las tasas centrales por orden da la tasa total central de natalidad para ese grupo de edad:

$$CBR_{i,y}^{Total} = \sum_{n=1^{er}}^{8^{vo} \text{ y más}} CBR_{i,y}^n$$

Figure 2: Central Birth Rates by cohorts - EEUU



CBR para las cohortes de 1930 a 1980 según la edad de las mujeres en EEUU.

Fuente: *Elaboración propia con datos del CDC, 2025.*

t en la cohorte a se modela como:

$$f(a, t) = H(a) \cdot g(a, t)$$

donde $H(a)$ es un factor de escala específico para cada cohorte a , aproximadamente igual a la tasa total de fecundidad (TFR) de la cohorte multiplicada por 1000, y $g(a, t)$ es la función de densidad de probabilidad de una distribución log-normal que describe el patrón de edad de la fertilidad dentro de la cohorte.

Específicamente, $g(a, t)$ se define como:

$$g(a, t) = \frac{1}{t \cdot \sigma(a) \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - \mu(a))^2}{2\sigma(a)^2}\right)$$

donde $\mu(a)$ es la media del logaritmo de la edad, y $\sigma(a)$ es la desviación estándar del logaritmo de la edad, ambos específicos para la cohorte a .

Dado que $g(a, t)$ es una función de densidad, se cumple que $\int_0^\infty g(a, t) dt = 1$, y en la práctica, para los valores típicos de $\mu(a)$ y $\sigma(a)$, la integral desde $t_{\min} = 14$ hasta $t_{\max} = 49$ es aproximadamente 1.

Por lo tanto, la tasa total de fecundidad para la cohorte a se puede aproximar como:

$$TFR(a) \approx \frac{1}{1000} \cdot H(a)$$

ya que:

$$\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(a, t) dt = H(a) \cdot \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} g(a, t) dt \approx H(a)$$

y el factor $\frac{1}{1000}$ convierte la suma de tasas por 1000 mujeres a la TFR estándar en nacimientos por mujer.

Para estimar los parámetros $H(a)$, $\mu(a)$ y $\sigma(a)$ para cada cohorte a , se minimiza la suma de los errores cuadráticos entre las tasas observadas y las predichas por el modelo para las edades disponibles en los datos. Específicamente, para cada cohorte a , se resuelve:

$$\min_{H(a), \mu(a), \sigma(a)} \sum_{t \in \text{edades observadas para } a} [CBR_{\text{obs}}(a, t) - f(a, t)]^2$$

Los parámetros estimados para cada cohorte y los detalles de la optimización realizada se presentan en el apéndice estadístico.

Para analizar los cambios en la fecundidad con la edad, podemos examinar la derivada de la tasa de fertilidad con respecto a la edad que nos indica cómo cambia la fertilidad a medida de las mujeres envejecen dentro de una misma cohorte:

$$\frac{\partial f(a, t)}{\partial t} = H(a) \underbrace{g(a, t) \left(-\frac{1}{t} - \frac{\ln t - \mu(a)}{t\sigma(a)^2} \right)}_{\frac{\partial g(a, t)}{\partial t}}$$

Dado que $g(a, t)$ es una distribución log-normal, esta derivada es positiva para edades menores que la moda (o pico) de la distribución, $t < \exp(\mu(a) - \sigma(a)^2)$, lo que significa

que la fertilidad aumenta con la edad hasta alcanzar su punto máximo. Después de este pico, la derivada se vuelve negativa, indicando una disminución en la fertilidad a medida que las mujeres continúan envejeciendo. Este comportamiento refleja principalmente tendencias culturales generacionales y avances tecnológicos reproductivos que permiten retrasar la edad fértil, más allá de los patrones biológicos naturales de la fertilidad, en los que las mujeres experimentan un aumento en su capacidad reproductiva hasta una edad óptima, seguido de una declinación gradual.

Para analizar cómo varía la fertilidad a una edad fija t cuando se comparan diferentes generaciones, podemos examinar la derivada parcial de la tasa de fertilidad con respecto a la cohorte:

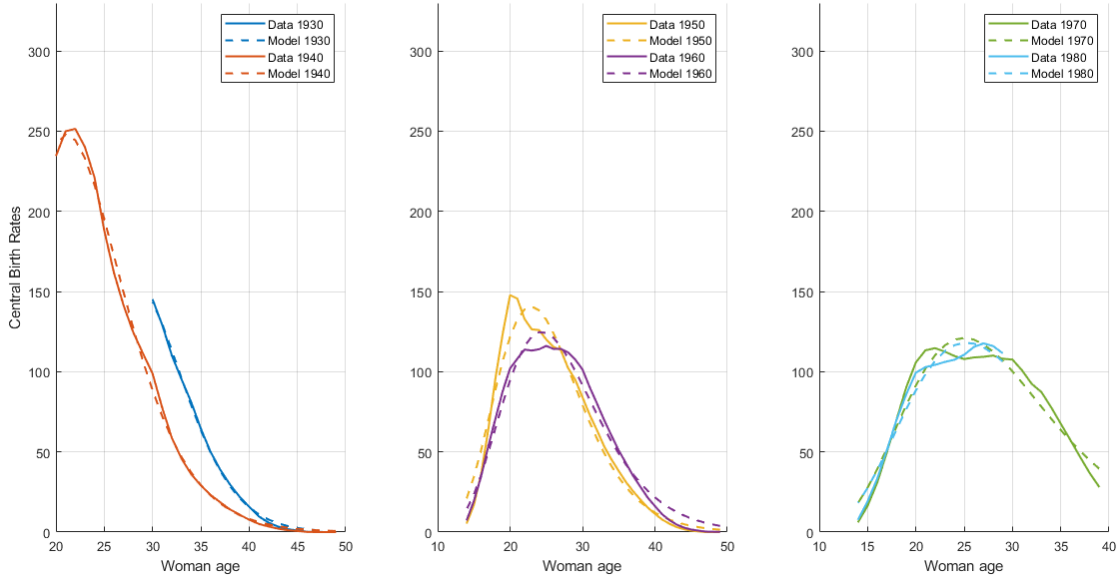
$$\frac{\partial f(a, t)}{\partial a} = \frac{\partial H(a)}{\partial a} \cdot g(a, t) + H(a) \cdot g(a, t) \underbrace{\left[\frac{\ln t - \mu(a)}{\sigma(a)^2} \frac{\partial \mu(a)}{\partial a} - \frac{(\ln t - \mu(a))^2}{\sigma(a)^3} \frac{\partial \sigma(a)}{\partial a} \right]}_{\frac{\partial g(a, t)}{\partial a}}$$

Esta derivada se compone de dos términos: uno que captura el cambio en el nivel general de fertilidad, $\frac{\partial H(a)}{\partial a} \cdot g(a, t)$, y otro que refleja los cambios en la distribución de la fertilidad por edad, $H(a) \cdot \frac{\partial g(a, t)}{\partial a}$. Si $H(a)$ disminuye con a , como se observa en cohortes más recientes, el primer término será negativo, indicando una reducción en la fertilidad para todas las edades. El segundo término puede ser positivo o negativo dependiendo de cómo cambien $\mu(a)$ y $\sigma(a)$; por ejemplo, si $\mu(a)$ aumenta, sugiriendo un retraso en la edad de maternidad, la fertilidad podría disminuir a edades jóvenes y aumentar a edades mayores. En conjunto, esta derivada ayuda a entender las tendencias intergeneracionales en la fertilidad, como la transición hacia familias más pequeñas y la postergación de la maternidad.

En la Figura 3, se observa que las estimaciones del modelo se ajustan bien a los datos de tasas de natalidad por edad de la mujer (cohortes 1930 a 1980), capturando tendencias clave: replica con precisión el pico de fertilidad entre los 20-30 años y la declinación posterior, validando su representación de patrones biológicos, mientras que las cohortes más jóvenes muestran menor fecundidad (disminución de $H(a)$) y un pico a edades mayores (aumento de $\mu(a)$). A pesar de pequeñas discrepancias—subestimando en las cohortes de 1930 - 1940 y sobreestimando en 1960 - 1970

—su consistencia a lo largo de las décadas demuestra su robustez, considerando factores culturales o tecnológicos.

Figure 3: Ajuste del modelo estadístico para las CBR



CBR y distribuciones predichas por el modelo para distintas cohortes de EEUU.

Fuente: *Elaboración propia con datos del CDC, 2025.*

4 Modelo Teórico

En este modelo de generaciones superpuestas (OLG) en tiempo continuo, se supone que los individuos nacen en un momento a , que identifica su cohorte, y viven hasta una edad máxima de $T = 70$ años. La edad de cada individuo se denota por t , mientras que el año calendario se representa por τ , cumpliéndose la relación $\tau = t + a$.

El modelo incorpora un mercado de activos donde las decisiones de ahorro e inversión varían según la cohorte y la edad de los individuos, representadas por la variable $b(a, t)$. Cada agente posee un stock de capital humano, denotado como $h(a, t)$, el cual se acumula a lo largo del tiempo mediante un flujo de inversión en educación o habilidades, $l(a, t)$, sujeto a una restricción de no negatividad que asegura que no se puede desacumular capital humano de manera ilimitada. Los ingresos de los agentes

proviene de un salario w , que se multiplica por un factor proporcional a su nivel de capital humano, reflejando así la productividad individual en el mercado laboral.

Una característica distintiva del modelo es el tratamiento de la natalidad y sus costos asociados. Tener hijos implica dos tipos de costos proporcionales a la cantidad de hijos n nacidos en un momento específico del año calendario τ : un costo en tiempo, representado por Γ_1 , que captura la dedicación de los padres a la crianza; y un costo en bienes, denotado por Γ_2 , que refleja los recursos materiales necesarios para sostener a los hijos. Este enfoque sugiere que los costos de la crianza se incurren en el momento del nacimiento (τ), análogamente a un pago anticipado por la educación o el cuidado de los hijos, lo que influye en las decisiones económicas de los agentes.

La utilidad de los agentes representativos depende de tres elementos principales: el consumo individual $c(a, t)$, la CBR/1000⁴ representada por $n(a, t)$, la cantidad acumulada de hijos que han tenido hasta la edad (t), denotada por $\tilde{N}(a, t)$, y la eficiencia de tener hijos dado que se produjo el acto reproductivo, $\pi(a, t)$. Los agentes buscan maximizar su utilidad intertemporal, descontada a una tasa ρ , lo que implica un balance entre el consumo presente, la inversión en capital humano y las decisiones reproductivas a lo largo de su vida. Todas estas variables —consumo, ahorro, capital humano y cantidad de hijos— dependen tanto de la edad del individuo (t) como de su cohorte (a).

A partir de esta estructura, el modelo establece las bases para analizar el problema dinámico del agente representativo de la cohorte a , que se formaliza mediante la maximización de la utilidad intertemporal sujeta a restricciones presupuestarias y de acumulación de capital humano. Así, el problema dinámico del agente representativo se expresa como:

$$\mathcal{U} = \int_0^T u(a, t) e^{-\rho t} dt$$

$$s.t \quad \begin{cases} \frac{\partial b(a, t)}{\partial t} = rb(a, t) + wh(a, t) (1 - l(a, t) - \Gamma_1 n(a, t)) - \Gamma_2 n(a, t) - c(a, t) \\ \frac{\partial h(a, t)}{\partial t} = Zh(a, t)^\Phi l(a, t)^\alpha - \delta (h(a, t) - h_0) \end{cases} \quad (1)$$

⁴La CBR esta definida de igual manera que la del *National Center of Health Statistics (CDC)*

donde:

- El capital humano acumulado se define como:

$$h(a, t) = \int_0^t h(a, s) e^{\delta(s-t)} ds$$

- La función de utilidad instantánea está dada por:

$$u(a, t) = \frac{c(a, t)^{1-\epsilon}}{1-\epsilon} + \sigma \frac{\left(\tilde{N}(a, t) - \bar{N}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \xi \pi(a, t)^\psi \frac{n(a, t)^{1-\psi}}{1-\psi}$$

donde la utilidad depende del consumo $c(a, t)$, modelado mediante una función CRRA con aversión al riesgo ϵ ; de los hijos acumulados $\tilde{N}(a, t)$, que generan utilidad en la medida en que exceden un umbral \bar{N} , el cual representa el número de hijos que el individuo considera indiferente tener o no (es decir, cuanto mayor es \bar{N} , menor es su deseo efectivo de tener hijos); y de la CBR/1000 denotada con $n(a, t)$, que también contribuye positivamente a la utilidad. Esta última está ponderada por dos factores: ξ , que mide la intensidad de la preferencia por el acto reproductivo en sí —es decir, cuánto valora el individuo el proceso de tener hijos independientemente de su acumulación—, y $\pi(a, t)$, que representa la eficiencia reproductiva del individuo, determinada por factores biológicos, tecnológicos o contextuales que hacen que una misma cantidad de esfuerzo reproductivo se traduzca en una mayor o menor tasa de natalidad efectiva, la misma se modela como una distribución log-normal a la que se le suma una constante ($\bar{\pi}$). Los parámetros σ , γ y ψ capturan, respectivamente, la intensidad de la preferencia por los hijos acumulados, el grado de saciabilidad respecto a ellos y la elasticidad de la utilidad marginal del flujo reproductivo.

- La condición de no arbitraje al final del ciclo de vida se expresa como:

$$b(T) \geq 0$$

La cantidad de hijos nacidos en el año calendario τ por parte de la cohorte a , denotada por $N_a(\tau)$, se obtiene multiplicando la CBR/1000 de esa cohorte en el año τ , $n(a, \tau)$,

por el tamaño de la cohorte a . Este último corresponde al total de nacimientos ocurridos en el año a , es decir, a la suma de todos los hijos nacidos de otras cohortes α en ese año:

$$N_a(\tau) = n(a, \tau) \int_{a-T}^a N_\alpha(a) d\alpha \quad (2)$$

El número total de nacimientos en el año calendario τ se obtiene agregando los nacimientos de todas las cohortes vivas en ese momento:

$$N(\tau) = \int_{\tau-T}^{\tau} N_a(\tau) da \quad (3)$$

La cantidad acumulada de hijos que ha tenido un individuo de la cohorte a hasta el momento τ , se define como:

$$\tilde{N}(a, \tau) = \int_a^{\tau} n(a, s - a) ds \quad (4)$$

Finalmente, la población total viva en el año calendario τ es igual a la suma de todos los nacimientos ocurridos hasta ese momento:

$$P(\tau) = \int_{\tau-T}^{\tau} N(s) ds \quad (5)$$

El consumo total en el año calendario τ se define como la suma del consumo individual de todos los agentes vivos en ese momento, ponderado por el tamaño de sus respectivas cohortes:

$$C(\tau) = \int_{\tau-T}^{\tau} c(a, \tau - a) \left(\int_{a-T}^a N_{\alpha}(a) d\alpha \right) da \quad (6)$$

De manera análoga, el total de activos en la economía en el año τ está dado por:

$$B(\tau) = \int_{\tau-T}^{\tau} b(a, \tau - a) \left(\int_{a-T}^a N_{\alpha}(a) d\alpha \right) da \quad (7)$$

El producto agregado de la economía en el año τ , $Y(\tau)$, se determina multiplicando la productividad total de los factores $A(\tau)$ por la fuerza laboral efectiva disponible. Esta última considera el capital humano disponible, el tiempo dedicado al trabajo neto del tiempo destinado a tener hijos y a la acumulación de capital humano:

$$Y(\tau) = A(\tau) \int_{\tau-T}^{\tau} h(a, \tau - a) (1 - l(a, \tau - a) - \Gamma_1 n(a, t)) \left(\int_{a-T}^a N_{\alpha}(a) d\alpha \right) da \quad (8)$$

Las condiciones de equilibrio de mercado (vaciamiento) se expresan como:

$$C(\tau) = Y(\tau) \quad (9)$$

$$B(\tau) = 0 \quad (10)$$

La condición 9 indica que todo lo que se produce se consume (mercado de bienes), mientras que la condición 10 refleja que los activos netos agregados en la economía son nulos (mercado financiero en equilibrio).

Dada la tecnología de producción con rendimientos constantes a escala, es posible modelar una firma representativa con beneficios nulos. Entonces, como las cohortes son homogéneas, el salario de equilibrio se puede expresar como:

$$\hat{w}(a, \tau) = A(\tau)h(a, \tau - a) \quad (11)$$

donde se cumple que $A(\tau) = w$. Bajo estas condiciones, los beneficios de la firma representativa se expresan como:

$$\Pi = Y(\tau) - \int_{\tau-T}^{\tau} \hat{w}(a, \tau) \left(\int_{a-T}^a N_{\alpha}(a) d\alpha \right) da \quad (12)$$

Entonces podemos plantear el hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H = & \frac{c(a, t)^{1-\epsilon}}{1-\epsilon} + \sigma \frac{\left(\tilde{N}(a, t) + \bar{N} \right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \xi \pi(a, t)^{\psi} \frac{n(a, t)^{1-\psi}}{1-\psi} \\ & + \lambda(a, t) (rb(a, t) + wh(a, t) (1 - l(a, t) - \Gamma_1 n(a, t)) - c(a, t) - \Gamma_2 n(a, t)) \\ & + \chi(a, t) n(a, t) + \mu(a, t) (Zh(a, t)^{\Phi} l(a, t)^{\alpha} - \delta(h(a, t) - h_0)) \end{aligned} \quad (13)$$

Las condiciones de primer orden y las de transversalidad las podemos ver en el apéndice matemático.

Las ecuaciones que caracterizan la solución son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} b(a, \tau - a) = & rb(a, \tau - a) + w(\tau)h(a, \tau - a) (1 - l(a, \tau - a) - \Gamma_1 n(a, \tau - a)) \\ & - \Gamma_2 n(a, \tau - a) - c(a, \tau - a) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{N}(a, \tau - a)}{\partial \tau} = n(a, \tau - a) \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} h(a, \tau - a) = Zh(a, \tau - a)^{\Phi} l(a, \tau - a)^{\alpha} - \delta(h(a, \tau - a) - h_0) \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} c(a, \tau - a) = - \left(\frac{\rho - r}{\epsilon} \right) c(a, \tau - a) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} l(a, \tau - a) = & \frac{l(a, \tau - a)}{1 - \alpha} \left[\delta + r - g + (1 - \phi) \delta \left(1 - \frac{h_0}{h(a, \tau - a)} \right) \right] \\ & - \frac{Zh(a, \tau - a)^{\phi-1} l(a, \tau - a)^\alpha}{1 - \alpha} [l(a, \tau - a) \\ & + \alpha(1 - l(a, \tau - a) - \Gamma_1 n(a, \tau - a))] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} n(a, \tau - a) & \quad (19) \\ = & \frac{c(a, \tau - a)^\epsilon \left[(r - g - \frac{\partial \ln h}{\partial \tau}) wh(a, \tau - a) \Gamma_1 + (r - g_0) \Gamma_2 \right] - \sigma(\tilde{N}(a, \tau - a) + \bar{N})^\gamma}{\xi \psi \pi(a, \tau - a)^\psi} n(a, \tau - a) \\ & - a)^{1+\psi} + \left(\frac{\partial \ln \pi}{\partial \tau} - \frac{\rho}{\psi} \right) n(a, \tau - a) \end{aligned}$$

La ecuación 19 muestra la dinámica de la CBR que permite analizar cómo evolucionan las decisiones reproductivas del agente a lo largo del tiempo, considerando tanto factores económicos como biológicos.

El primer término de la ecuación representa la relación entre incentivos económicos y costos de tener hijos. El consumo $c(a, \tau - a)$, elevado a una elasticidad positiva ϵ , tiene un efecto directo sobre la natalidad: a mayor nivel de consumo, mayor es el incentivo a tener hijos. Los costos asociados al tiempo (Γ_1) y a los bienes materiales (Γ_2) son ponderados por el salario y el capital humano, pero su impacto se reduce debido a la eficiencia reproductiva $\pi(a, \tau - a)^\psi$, que amplifica o amortigua el efecto de estos costos. El término $\sigma(\tilde{N} + \bar{N})^\gamma$ introduce rendimientos decrecientes: a mayor cantidad de hijos acumulados, menor es la tasa marginal de natalidad.

El segundo término de la ecuación refleja una dinámica de ajuste intertemporal y analiza cómo las preferencias intertemporales moldean la decisión reproductiva, en conjunto con las condiciones biológicas. Si la eficiencia reproductiva $\pi(a, \tau - a)$ mejora con el tiempo —por ejemplo, debido a avances médicos o tecnológicos que prolongan la ventana fértil—, el término $\frac{\partial \ln \pi}{\partial \tau}$ incrementa la CBR. En cambio, el componente $\frac{\rho}{\psi}$,

capta la impaciencia del agente: una mayor valoración del presente respecto al futuro reduce el incentivo a tener hijos en etapas posteriores del ciclo de vida, disminuyendo así la CBR actual.

Es importante destacar que, en este modelo, los costos no afectan fuertemente a la tasa de natalidad dado que tienen una participación relativamente pequeña en el ingreso y están modelados de forma lineal. Así, los cambios en la CBR responden con mayor sensibilidad a cambios en el consumo, la eficiencia reproductiva y la acumulación previa de hijos.

5 Resultados

En esta sección presentamos los resultados de la simulación del modelo, correspondientes a una economía pequeña y abierta en la que la tasa de interés se asume exógena y constante⁵.

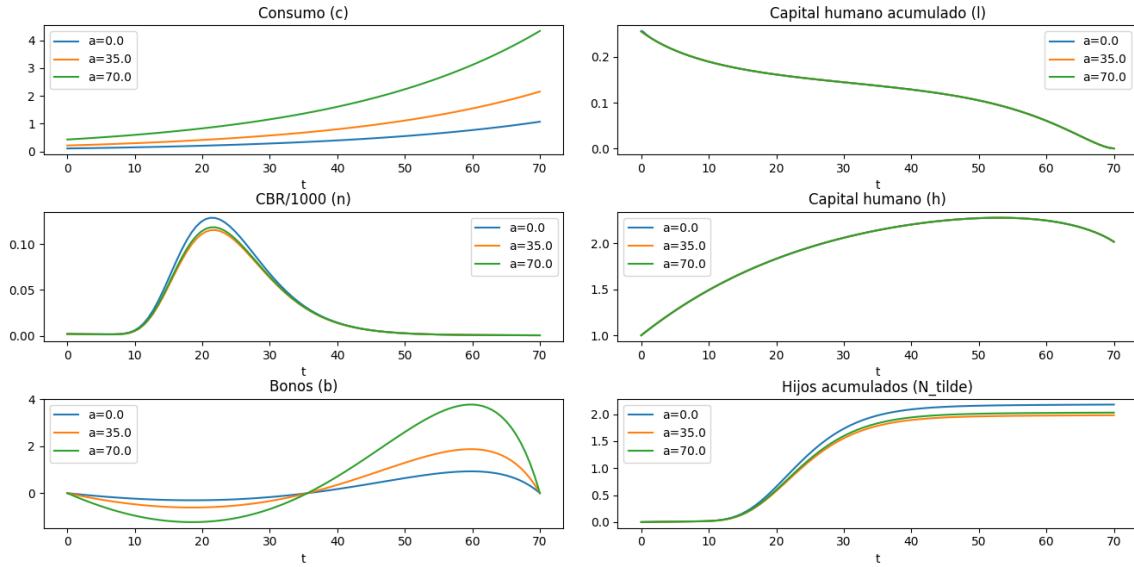
La Figura 4 muestra la evolución de las decisiones reproductivas por cohorte, bajo la parametrización detallada en el apéndice matemático. En la misma se presenta la evolución de las principales variables económicas y demográficas para distintas cohortes a lo largo de su vida (hasta los 70 años). En particular, se observa el consumo individual, la CBR/1000 ($n(a, t)$), el acumulado de hijos $\tilde{N}(a, t)$, y el stock y flujo de capital humano.

Focalizándonos en las variables demográficas, el modelo reproduce trayectorias consistentes entre cohortes en términos tanto de la tasa bruta de natalidad (CBR) como del número acumulado de hijos. Las curvas de $n(a, t)$ presentan escasa variabilidad intergeneracional, tanto en forma como en nivel, lo que da lugar a perfiles de $\tilde{N}(a, t)$ prácticamente paralelos entre cohortes. Tal como se observa en el gráfico, las generaciones más recientes exhiben tasas de natalidad levemente inferiores, lo que se traduce en una menor acumulación de hijos a lo largo del ciclo de vida en comparación con las cohortes anteriores. En particular, las CBR/1000⁶ se aproximan a 0.15 en la

⁵Aclaración: no fue necesario determinar la tasa de interés en equilibrio general, ya que —como se observa en las ecuaciones del modelo— la cantidad de hijos responde muy poco a variaciones en dicha tasa.

⁶En las simulaciones se consideró que $n(a, t)$ es igual a $CBR/1000$ dividido por 50 para que

Figure 4: Evolución de las cohortes en el modelo teórico



Simulación del modelo teórico para el consumo, los bonos, la tasa de natalidad, el acumulado de hijos y el capital humano stock y acumulado para distintas cohortes.

edad de máxima fertilidad, un valor coherente con la evidencia empírica. Asimismo, el número acumulado de hijos converge hacia 2 a lo largo de la vida fértil, lo cual también es consistente con los datos disponibles. Estos resultados sugieren que el modelo es robusto para representar perfiles estándar de la dinámica de la CBR.

Por su parte, el capital humano —tanto en su nivel corriente como acumulado— se mantiene prácticamente constante entre cohortes. En cambio, los bonos y el consumo sí varían: las cohortes más nuevas presentan niveles más bajos de ahorro (bonos) al inicio del ciclo de vida, pero logran acumular más a lo largo del tiempo, lo que indica una trayectoria de mayor ahorro intertemporal. Asimismo, el consumo en las cohortes nuevas se incrementa más rápidamente que en las cohortes antiguas, reflejando una mejora relativa en sus decisiones de inversión y bienestar a lo largo del tiempo.

Si bien esto puede parecer una limitación frente a los datos empíricos presentados en la Sección 3 —que muestran claras caídas de la fecundidad entre generaciones—, es importante destacar que este modelo tiene un valor significativo como primera computacionalmente convergan.

aproximación estructural en equilibrio general del comportamiento reproductivo por cohorte. Su parsimonia permite aislar el rol de decisiones intertemporales y de la acumulación de capital humano en las decisiones de fertilidad.

6 Discusión y conclusión

El modelo teórico desarrollado en las secciones anteriores presenta una característica distintiva: los costos de tener hijos (Γ_1 y Γ_2) aparecen explícitamente en la tasa de crecimiento del *Central Birth Rate* (CBR). Esta especificidad marca una diferencia sustancial respecto de otros enfoques, como el presentado por Boldrin [2015]. Si bien en su modelo también se adopta una estructura lineal para los costos de crianza, la tasa de crecimiento poblacional no está determinada directamente por dichos costos.

El trabajo de Boldrin [2015] tiene como objetivo predecir el impacto de la introducción de sistemas de pensiones sobre la tasa de fertilidad. Los autores concluyen que la magnitud de la caída en la fertilidad depende del diseño institucional del sistema previsional, lo que explicaría las diferencias observadas entre países. Para ello, utilizan un modelo de generaciones superpuestas (OLG) con tres cohortes, en el cual la tasa de crecimiento poblacional no depende explícitamente de los costos iniciales de tener hijos, sino de la tasa de crecimiento de dichos costos en términos de bienes, que a su vez es igual a la tasa de crecimiento de la economía.

Si bien en su modelo los niveles de los costos no determinan la trayectoria de largo plazo de la población, sí afectan su nivel, en conjunto con el impuesto al ingreso laboral (un instrumento que no es necesario en el marco teórico desarrollado en este trabajo).

Una diferencia adicional entre ambos enfoques radica en la incorporación de parámetros biológicos y demográficos. Mientras que Boldrin [2015] no consideran explícitamente factores como el deseo sexual, la eficiencia reproductiva y los años fértiles, el presente modelo sí los incorpora a través del parámetro π . Esta inclusión tiene implicancias importantes: en particular, conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales no autónomo, en el que la tasa de natalidad calculada (n) no crece a una tasa constante para cada individuo.

Asimismo, en este modelo, tanto n como \tilde{N} aparecen explícitamente en la función de utilidad, lo que refuerza el vínculo entre los niveles de los costos de crianza y el crecimiento de la población. En contraste, en el modelo de Boldrin [2015], la tasa de natalidad no entra directamente en la función de utilidad, ya que los hijos cumplen únicamente la función de sustento en la vejez. Además, no se distingue entre la tasa de natalidad y el número acumulado de hijos, lo que introduce una simplificación adicional.

Por último, una razón estructural por la cual en su modelo la tasa de crecimiento de la población no depende directamente de los costos de crianza es el tratamiento del equilibrio intertemporal. Dado que la tasa de interés se toma como exógena, esta determina el retorno del ahorro en función de la tasa de crecimiento poblacional. De las condiciones de primer orden se desprende que la utilidad marginal del ahorro debe igualarse con la utilidad marginal del consumo de los padres, pero dado que el consumo futuro está determinado por la productividad multiplicada por dicho consumo parental, el resultado final es una expresión donde el crecimiento poblacional se define como función de la tasa de interés, y no de los costos de crianza. En contraste, el modelo presentado aquí no considera el consumo de la generación anterior (los padres), lo que permite vincular directamente los costos de crianza con la tasa de natalidad.

Más allá de las diferencias estructurales entre modelos, existen otras consideraciones que pueden enriquecer el análisis y ayudar a explicar con mayor precisión la trayectoria de las CBR observadas. Si bien el modelo desarrollado ofrece ventajas teóricas claras, presenta limitaciones al momento de reproducir la magnitud de los cambios demográficos evidenciados empíricamente. Uno de los probables factores ausentes es el progreso en métodos anticonceptivos, cuya difusión ha transformado radicalmente los costos de la fertilidad efectiva. La eficiencia reproductiva $\pi(a, t)$ podría reespecificarse como una variable creciente en el tiempo τ , reflejando avances tecnológicos que permiten separar reproducción y sexualidad, como sugiere el trabajo de Strulik et al. [2013]. En ese marco, los cambios en $\pi(a, t)$ reducirían los “costos físicos y temporales” de tener (o evitar) hijos, generando una elasticidad cotejable ante el progreso tecnológico.

Además, el parámetro ξ , puede interpretarse como una medida de la intensidad de

la preferencia por el acto reproductivo en sí mismo —es decir, cuánto valor asigna el individuo al proceso de tener hijos, incluso cuando no se traduce en una acumulación efectiva. Esta reinterpretación permitiría introducir una dimensión adicional de heterogeneidad en las preferencias, capturando el deseo por la actividad reproductiva independientemente del éxito biológico (por ejemplo, en contextos de infertilidad, uso deliberado de métodos anticonceptivos o decisiones de aplazamiento). Asimismo, esta formulación abre la puerta a especificaciones más ricas en las que ξ varíe con la edad, el estado de salud o incluso el nivel educativo, lo que sería especialmente útil para modelar trayectorias de fertilidad tardía. En esta línea, trabajos recientes como Doepke et al. [2022] han comenzado a explorar cómo las restricciones biológicas y las preferencias intertemporales por la maternidad interactúan con decisiones de acumulación de capital humano.

Otra dimensión que se podría indagar es la evolución cultural y social de las preferencias por hijos. Si bien el parámetro σ refleja la intensidad de la preferencia por la fecundidad, podría reespecificarse como una función de variables sociales o como un proceso evolutivo, siguiendo la literatura sobre cambio cultural y transiciones demográficas [Lesthaeghe, 2010, Fernández, 2014]. Esto permitiría capturar fenómenos como la reducción deseada del tamaño familiar, el aumento de la maternidad voluntaria tardía.

En conclusión, este modelo constituye una contribución valiosa como una de las primeras aproximaciones al análisis de la fertilidad por cohorte dentro de un marco de equilibrio general. Su fortaleza principal radica en su capacidad para capturar las interacciones entre decisiones reproductivas, acumulación de capital humano y comportamiento económico a lo largo del ciclo de vida, todo dentro de una estructura parsimoniosa. Un aspecto del enfoque es que, bajo la especificación adoptada, los costos de tener hijos no ejercen un impacto determinante sobre la tasa de fertilidad. Sin embargo, el modelo permite aislar el rol de variables como el consumo y la eficiencia reproductiva, que son las que efectivamente generan variación en las decisiones de fecundidad en equilibrio. A partir de esta base sólida, el modelo ofrece un marco flexible que puede extenderse para incorporar de manera progresiva otros factores, enriqueciendo así su capacidad de análisis ante escenarios de política reproductiva, envejecimiento poblacional y transiciones demográficas.

References

- G. S. Becker. *A Treatise on the Family*. Harvard University Press, 1991.
- N. V. e. a. Bhattacharjee. Global fertility in 204 countries and territories, 1950–2021, with forecasts to 2100: a comprehensive demographic analysis for the global burden of disease study 2021. *The Lancet*, 403(10440):2057–2099.
- L. E. J. Boldrin, De Nardi. Fertility and social security. *Journal of Demographic Economics*, 81(3):261–299, September 2015. URL <https://www.jstor.org/stable/10.2307/26422376>.
- J. Bongaarts and G. Feeney. On the quantum and tempo of fertility. *Population and Development Review*, 24(2):271–291, 1998.
- N. Coeurdacier, S. Guibaud, and K. Jin. Fertility policies and social security reforms in china. *IMF Economic Review*, 62(3):371–408, 2014.
- A. M. Danzer and L. Zyska. Pensions and fertility: Microeconomic evidence. *American Economic Journal: Economic Policy*, 15(2):126–165, 2023.
- S. Dattani, L. Rodés-Guirao, and M. Roser. Fertility rate. *Our World in Data*, 2025. <https://ourworldindata.org/fertility-rate>.
- M. Doepke. Child mortality and fertility decline: Does the barro–becker model fit the facts? *Journal of Population Economics*, 18(2):337–366, 2005.
- M. Doepke and F. Zilibotti. The macroeconomics of child labor regulation. *American Economic Review*, 95(5):1492–1524, 2005.
- M. Doepke, M. Hazan, and Y. D. Maoz. Women, children, and the accumulation of human capital in the long run. *Journal of Political Economy*, 130(9):2426–2472, 2022.
- J. J. Donohue and S. D. Levitt. The impact of legalized abortion on crime. *Quarterly Journal of Economics*, 116(2):379–420, 2001.
- R. Fernández. Culture and institutions: Economic development in the regions of europe. *Journal of the European Economic Association*, 12(4):872–896, 2014.

- O. Galor and D. N. Weil. Population, technology, and growth: From malthusian stagnation to the demographic transition and beyond. *American Economic Review*, 90(4):806–828, 2000.
- J. Greenwood, N. Guner, and G. Vandenbroucke. Family economics writ large. *Journal of Economic Literature*, 55(4):1346–1434, 2017.
- M. Hazan and B. Berdugo. Child labour, fertility, and economic growth. *The Economic Journal*, 112(482):810–828, 2002.
- M. S. Kearney and P. B. Levine. Media influences on social outcomes: The impact of mtv’s 16 and pregnant on teen childbearing. *American Economic Review*, 105(12):3597–3632, 2015.
- H. Leridon. Can assisted reproduction technology compensate for the natural decline in fertility with age? a model assessment. *Human Reproduction*, 19(7):1548–1553, 2004.
- R. Lesthaeghe. The unfolding story of the second demographic transition. *Population and Development Review*, 36(2):211–251, 2010.
- National Center for Health Statistics. Provisional life expectancy estimates for 2023. Vital Statistics Rapid Release 35, Centers for Disease Control and Prevention, 2024. URL <https://www.cdc.gov/nchs/data/vsrr/vsrr035.pdf>.
- M. R. Rosenzweig and T. P. Schultz. Schooling, information, and nonmarket productivity: Contraceptive use and its effectiveness. *International Economic Review*, 30(2):457–477, 1989.
- E. Spolaore and R. Wacziarg. Fertility and modernity. *The Economic Journal*, 132(642):796–833, 2022.
- H. Strulik, K. Prettnner, and A. Prskawetz. Contraception and development: A unified growth theory. *International Economic Review*, 54(4):1333–1361, 2013.
- United Nations Population Fund. State of world population 2023: 8 billion lives, infinite possibilities: The case for rights and choices. Technical report, UNFPA, 2023. URL <https://www.unfpa.org/swp2023>.

Apéndice

Apéndice estadístico

Table 1: Tendencias de la TFR por región (1960-2023)

Region	TFR 1960	TFR 2023	Absolute Change
Eastern and Southern Africa	6.65	4.22	-2.43
Western and Central Africa	6.47	4.50	-1.97
East Asia and Pacific	4.55	1.34	-3.21
Europe and Central Asia	2.84	1.58	-1.26
Latin America and Caribbean	5.87	1.80	-4.07
North America	3.67	1.58	-2.09
World	4.69	2.20	-2.49

Tabla con las TFR por continente y del mundo para los años 1960 y 2023 con cambio absoluto.

Fuente: *Elaboración propia con datos del Banco Mundial, 2025.*

La optimización descrita en la Sección 3.2 se realiza utilizando la función `fminsearch` en MATLAB, con valores iniciales para los parámetros elegidos en base a los datos o a cohortes de referencia.

El procedimiento de estimación se implementa de la siguiente manera: 1) Se cargan los datos del archivo Excel del CDC, extrayendo las columnas de año calendario, edad actual de la mujer, cohorte y tasa central de natalidad. 2) Se identifican las cohortes únicas y se filtran aquellas con suficientes puntos de datos (por ejemplo, más de 5 edades). 3) Para cada cohorte, se inicializan los parámetros: $H(a)$ se inicializa como la suma de las CBR observadas para esa cohorte, y $\mu(a)$ y $\sigma(a)$ se inicializan en base a valores de una cohorte de referencia (por ejemplo, 1960). 4) Se define la función objetivo como la suma de los cuadrados de las diferencias entre las CBR observadas y modeladas. 5) Se utiliza `fminsearch` para encontrar los valores óptimos de $H(a)$, $\mu(a)$ y $\sigma(a)$ que minimizan la función objetivo. 6) Se almacenan los parámetros estimados y se generan gráficos comparando las CBR observadas y modeladas para cohortes seleccionadas.⁷

⁷Aclaración: Para la correcta interpretación de los $H(a)$ por cohorte es preciso tener en cuenta que para las primeras y últimas cohortes, estos valores son menores porque la cantidad de datos para las mismas son muy reducidos.

Table 2: Parámetros ajustados por cohorte

Cohort	$H(a)$	$\mu(a)$	$\sigma(a)$	Cohort	$H(a)$	$\mu(a)$	$\sigma(a)$
1916	44.869	3.7401	0.0451	1954	2050.0	3.2359	0.2643
1917	93.654	3.7057	0.0546	1955	2054.5	3.2414	0.2649
1918	113.7	3.6956	0.0564	1956	2058.9	3.2463	0.2651
1919	185.02	3.6661	0.0654	1957	2061.7	3.2508	0.2652
1920	279.54	3.6366	0.0750	1958	2067.1	3.2555	0.2651
1921	414.00	3.6035	0.0856	1959	2078.9	3.2593	0.2649
1922	465.84	3.5891	0.0896	1960	2092.1	3.2630	0.2650
1923	549.80	3.5694	0.0964	1961	2101.3	3.2668	0.2651
1924	648.13	3.5486	0.1035	1962	2107.9	3.2716	0.2646
1925	791.32	3.5212	0.1129	1963	2119.4	3.2755	0.2643
1926	946.55	3.4925	0.1230	1964	2136.6	3.2785	0.2648
1927	1114.5	3.4634	0.1322	1965	2157.6	3.2806	0.2672
1928	1291.4	3.4336	0.1417	1966	2187.1	3.2837	0.2714
1929	1576.7	3.3955	0.1546	1967	2223.2	3.2878	0.2769
1930	1829.4	3.3618	0.1648	1968	2263.0	3.2937	0.2832
1931	2184.5	3.3196	0.1787	1969	2300.4	3.2997	0.2900
1932	2472.3	3.2828	0.1902	1970	2354.9	3.3068	0.2970
1933	2788.9	3.2447	0.2021	1971	2415.1	3.3128	0.3048
1934	3085.1	3.2108	0.2122	1972	2494.3	3.3198	0.3126
1935	3401.8	3.1747	0.2235	1973	2567.8	3.3284	0.3204
1936	3624.7	3.1442	0.2330	1974	2640.5	3.3375	0.3259
1937	3704.6	3.1226	0.2400	1975	2692.2	3.3464	0.3294
1938	3630.3	3.1114	0.2432	1976	2732.8	3.3530	0.3302
1939	3499.2	3.1076	0.2448	1977	2743.9	3.3564	0.3298
1940	3306.5	3.1097	0.2446	1978	2687.1	3.3520	0.3251
1941	3048.7	3.1210	0.2388	1979	2561.0	3.3400	0.3169
1942	2807.6	3.1336	0.2312	1980	2380.2	3.3202	0.3043
1943	2602.2	3.1431	0.2238	1981	2173.4	3.2943	0.2873
1944	2456.9	3.1489	0.2204	1982	1946.1	3.2623	0.2665
1945	2343.3	3.1544	0.2206	1983	1702.8	3.2258	0.2435
1946	2264.9	3.1612	0.2221	1984	1454.6	3.1870	0.2202
1947	2202.1	3.1673	0.2266	1985	1216.7	3.1469	0.1965
1948	2155.7	3.1740	0.2334	1986	1023.4	3.1108	0.1768
1949	2120.6	3.1832	0.2429	1987	855.55	3.0761	0.1592
1950	2101.1	3.1948	0.2520	1988	738.08	3.0513	0.1491
1951	2082.4	3.2072	0.2587	1989	660.90	3.0361	0.1455
1952	2064.7	3.2190	0.2624	1990	618.87	3.0318	0.1475
1953	2051.9	3.2284	0.2636				

Tabla con los parámetros $H(a)$, $\mu(a)$ y $\sigma(a)$ obtenidos del modelo estadístico para las CBR de EEUU, para cada cohorte de desde 1916 a 1990.

Apéndice matemático

Las condiciones de primer orden que resuelven el problema del agente y se derivan del Hamiltoniano, ecuación 13, son:

$$c(a, \tau - a)^{-\epsilon} = \lambda(a, \tau - a) \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \lambda(a, \tau - a) = \lambda(a, \tau - a)(\rho - r) \quad (21)$$

$$\chi(a, \tau - a) + \xi \pi(a, \tau - a)^\psi n(a, \tau - a)^{-\psi} = \lambda(a, \tau - a) (w(\tau)h(a, \tau - a)\Gamma_1 + \Gamma_2) \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \chi(a, \tau - a) - \rho \chi(a, \tau - a) = -\sigma \left(\tilde{N}(a, \tau - a) + \bar{N} \right)^{-\gamma} \quad (23)$$

$$\mu(a, \tau - a) Z \alpha h(a, \tau - a)^\Phi l(a, \tau - a)^{\alpha-1} = \lambda(a, \tau - a) w(\tau) h(a, \tau - a) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \mu(a, \tau - a) - \rho \mu(a, \tau - a) = & - [\lambda(a, \tau - a) w(\tau) (1 - l(a, \tau - a) - \Gamma_1 n(a, \tau - a)^\psi) \\ & + \mu(a, \tau - a) (\Phi Z h(a, \tau - a)^\Phi l(a, \tau - a)^\alpha - \delta)] \end{aligned} \quad (25)$$

Luego, las condiciones de transversalidad son:

$$\lambda(a, T) b(a, T) = 0 \longrightarrow b(a, T) = 0 \quad (26)$$

$$\chi(a, T) = 0 \longrightarrow n(a, T) = \frac{\pi(a, T) \xi^{\frac{1}{\psi}}}{(\lambda(a, T) (w(\tau) h(a, T) \Gamma_1 + \Gamma_2))^{\frac{1}{\psi}}} \quad (27)$$

$$\mu(a, T) = 0 \longrightarrow l(a, T) = 0 \quad (28)$$

$$b(a, 0) = 0 \quad (29)$$

$$\tilde{N}(a, 0) = 0 \quad (30)$$

$$h(a, 0) = h_0 \quad (31)$$

Equilibrio

El equilibrio se caracteriza por la ecuaciones que resuelven el problema del agente y además que la demanda de bonos sea cero. La demanda de bono se calcula con:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} b(a, \tau - a) = & rb(a, \tau - a) + w(\tau)h(a, \tau - a) (1 - l(a, \tau - a) - \Gamma_1 n(a, \tau - a)) \\ & - \Gamma_2 n(a, \tau - a) - c(a, \tau - a) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \tilde{N}(a, \tau - a)}{\partial \tau} = n(a, \tau - a) \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} h(a, \tau - a) = Zh(a, \tau - a)^\Phi l(a, \tau - a)^\alpha - \delta(h(a, \tau - a) - h_0) \quad (34)$$

$$\frac{\partial N_a(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial n(a, \tau - a)}{\partial \tau} \frac{N_a(\tau)}{n(a, \tau - a)} \quad (35)$$

con la condición inicial $N_a(a) = n(a, 0) \int_{a-T}^a N_\alpha(a) d\alpha$

$$\begin{aligned} B(\tau) = & \int_{\tau-T}^{\tau} b(a, \tau - a) \left(\int_{a-T}^a N_\alpha(a) d\alpha \right) da \\ = & 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Condiciones iniciales:

$$b(a, 0) = 0, \text{ for } a \in (-T, 0] \quad (37)$$

$$N_a(0) = 1/T \text{ given for } a \in [-T, 0) \text{ and } N_a(\tau) = 0 \text{ for } a \in [-T, 0), \tau \in [a, T + a] \quad (38)$$

Funciones/variables endógenas:

$$b, r, h, n, l, c, \lambda, \mu, N, B, \chi, \tilde{N}$$

Funciones/variables exógenas:

$$w(\tau) = e^{g\tau} w(0)$$

Table 3: Parámetros del modelo teórico

Parameter	Value	Parameter	Value
T	70	σ	0.1
ξ	0.01	h_0	1.0
w_0	0.1	g	0.02
Z	0.1	g_0	0.0
Γ_1	1.0	σ_π	0.3
Γ_2	0.1	μ_π	3.2
γ	1.1	δ	0.05
$T_{Economía}$	2.0	ρ	0.02
ϵ	1.5	α	0.4
ϕ	0.6	$\bar{\pi}$	[1.0, 0.5, 0.1, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005]
\bar{N}	0.5	r_{\min}	[0, -0.1, 0, -10, -0.1, 0, -10]
ψ	1.9	r_{\max}	[0.1, 0.1, 10, 10, 0.1, 10, 10]

Parámetros particulares usados para simular el modelo teórico.