



Maestría en Economía

Dinámica de los Ingresos Tributarios y la Deuda Publica ante un Aumento Sustancial del Gasto Público: el Rol Clave de la Tasa de Interés

Autoría: Marco, Tomás Guido

Fecha: 2025

¿Cómo citar este trabajo?

Marco, T. (2025). "Dinámica de los Ingresos Tributarios y la Deuda Publica ante un Aumento Sustancial del Gasto Público: el Rol Clave de la Tasa de Interés". [Tesis de maestría. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella
<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13587>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la **Universidad Torcuato Di Tella** bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Internacional
Dirección: <https://repositorio.utdt.edu>

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
MAESTRÍA EN ECONOMÍA

**Dinámica de los Ingresos Tributarios y la Deuda Pública ante un
Aumento Sustancial del Gasto Público: el Rol Clave de la Tasa de
Interés**

Alumno: Tomás Guido Marco
Legajo: 22P1641
Tutor: Pablo Andrés Neumeyer
Fecha: 20/5/2025

DINÁMICA DE LOS INGRESOS TRIBUTARIOS Y LA DEUDA PÚBLICA ANTE UN AUMENTO SUSTANCIAL DEL GASTO PÚBLICO: EL ROL CLAVE DE LA TASA DE INTERÉS

Tomás Guido Marco

20/5/2025

Resumen

El trabajo fundacional de Barro (1979) sugiere que la respuesta óptima ante un aumento sustancial del gasto público consiste en suavizar perfectamente los ingresos tributarios a lo largo del tiempo, incrementando permanentemente la deuda. Un resultado consolidado en la literatura de tributación óptima es que, bajo preferencias estándar, las tasas impositivas óptimas son constantes. Este resultado implica, bajo ciertas condiciones (como en Barro (1979), Lucas y Stokey (1983) y Bohn (1990)), que la trayectoria óptima de los ingresos públicos como porcentaje del PIB también debe ser constante. Motivado por un análisis para el caso de Estados Unidos, este trabajo explora los mecanismos que podrían generar desviaciones respecto de estos resultados estándar, haciendo subóptimo que la recaudación tributaria y la deuda como porcentaje del producto sigan esas trayectorias. El análisis comienza examinando el modelo original de Barro en equilibrio general y luego desarrolla un modelo determinístico que incorpora trabajo y capital. A través de ambos modelos, se concluye que el ajuste endógeno de la tasa de interés frente a un aumento del gasto público genera una trayectoria óptima para la recaudación tributaria como porcentaje del PIB que se desvía de la suavización perfecta, a excepción de ciertos casos particulares.

1 Introducción

La literatura de la tributación óptima constituye un elemento fundamental en finanzas públicas. Aborda escenarios en los que los impuestos de suma fija no están disponibles, lo que obliga a elegir instrumentos de política que minimicen las ineficiencias asociadas con los impuestos distorsivos. En un marco estático en el que se dispone de múltiples instrumentos impositivos distorsivos, la política que minimiza la carga excesiva total para recaudar una cantidad fija de ingresos implica igualar los costos marginales de distorsión entre todos los instrumentos. Este enfoque ha sido aplicado para responder a diversas preguntas de política económica. Por ejemplo, Bailey (1956) y Phelps (1973) lo utilizaron para abordar la cuestión de la inflación óptima.

La aplicación de la tributación óptima también se ha extendido a entornos macroeconómicos dinámicos y estocásticos. Una contribución fundamental en esta área fue realizada por Barro (1979), seguida por Lucas y Stokey (1983). Ambos modelos pueden interpretarse como situaciones de dominancia monetaria, donde los instrumentos de política monetaria no están disponibles como variables de elección, y la autoridad fiscal debe financiar una secuencia estocástica de gasto público mediante impuestos distorsivos y deuda. El objetivo central es ilustrar la respuesta fiscal óptima ante un aumento significativo del gasto público. El modelo de Barro (1979) es un marco de equilibrio parcial que presenta una tasa de interés libre de riesgo constante sobre la deuda pública y una función de pérdida convexa para el gobierno que depende directamente de las tasas impositivas. En contraste, el modelo de Lucas y Stokey (1983) es un modelo de equilibrio general caracterizado por una tecnología de producción lineal en trabajo y sin incorporación de capital, donde la autoridad fiscal tiene acceso a impuestos contingentes al estado de la naturaleza sobre el trabajo y deuda con rendimientos contingentes, siendo su objetivo maximizar el bienestar del sector privado.

Como se explicará a continuación, el resultado principal de Barro (1979) es que, si el presupuesto del gobierno está inicialmente equilibrado y, de forma inesperada, se produce un aumento sustancial en el gasto público, la política óptima consiste en suavizar completamente los ingresos tributarios a lo largo del tiempo. Esto implica incurrir en un déficit fiscal primario durante los períodos de alto gasto público y, posteriormente, mantener un superávit primario permanente para generar los recursos necesarios para pagar los intereses de la deuda acumulada, bajo el supuesto de una tasa de interés fija. Así, basado en la lógica del ingreso permanente, Barro predice que la deuda y los impuestos deben seguir paseos aleatorios. En contraste, Lucas y Stokey (1983) consideran que el gobierno emite deuda con rendimientos contingentes al estado, es decir, la tasa de interés no es fija. Sin embargo, su modelo predice que, en respuesta a un aumento extraordinario del gasto público, la tasa impositiva debe permanecer aproximadamente constante entre estados y a lo largo del tiempo. Los bonos contingentes al estado permiten al gobierno distribuir la carga tributaria a través de los estados y del tiempo, reduciendo así las distorsiones. Aunque los ingresos tributarios aumentan temporalmente durante los períodos de alto gasto público debido al incremento en la oferta laboral, la proporción de ingresos tributarios respecto al PIB permanece constante, dado que la tecnología es lineal. Aiyagari et al. (2002) consideran el mismo modelo que Stokey y Lucas (1983), pero con mercados incompletos, y encuentran que, salvo que se impongan restricciones específicas sobre las preferencias y las cantidades de títulos libres de riesgo que el gobierno puede emitir, los resultados divergen significativamente de las conclusiones de Barro.

Bohn (1990) examinó un marco similar al de Barro (1979), en el que el gobierno minimiza una función de pérdida convexa en una economía de dotación, pero en un entorno estocástico de equilibrio general con mercados completos. El autor concluye que las tasas impositivas deben suavizarse tanto entre diferentes estados de la naturaleza como a lo largo del tiempo. Dado que las obligaciones financieras del gobierno pueden ser contingentes a todos los estados concebibles, estas funcionan como una cobertura frente a las variaciones en el gasto público.

Numerosas contribuciones posteriores han incorporado trabajo y capital al análisis. Chari et al. (1994) y Chari et al. (1999) consideran una economía estocástica con mercados completos y llegan a conclusiones similares a las de Bohn (1990): después de un período inicial de transición, las tasas impositivas sobre el ingreso laboral tienden a ser constantes, mientras que los impuestos esperados sobre la renta del capital son aproximadamente nulos. Sin embargo, es necesario contar con deuda contingente al estado o impuestos contingentes al estado sobre los rendimientos de la deuda pública. Werning (2005, 2007) analiza una economía con agentes heterogéneos y demuestra que, bajo preferencias separables e isoelásticas, se alcanzan las mismas conclusiones. Los resultados cambian cuando se consideran preferencias más generales.

En economías de dotación (Barro, 1979; Bohn, 1990) y en economías con tecnología de producción lineal (Stokey y Lucas, 1983), el resultado de la suavización perfecta de las tasas impositivas implica que la trayectoria óptima de la proporción ingresos tributarios/PIB debe ser también constante, y que el aumento de la deuda debe ser permanente.

Basado en un análisis para Estados Unidos que evalúa la respuesta de las finanzas públicas a incrementos en la proporción gasto público/PIB superiores al 50%, el objetivo central de este trabajo es analizar y comprender por qué las respuestas de la recaudación impositiva y la deuda como porcentaje del PIB durante episodios de aumentos sustanciales del gasto público pueden no coincidir con dichas conclusiones. Para ello, primero examinaré el modelo original de Barro en un contexto de equilibrio general. Luego, desarrollaré un modelo determinístico de equilibrio general que incluya trabajo y capital, incorporando aportes de la teoría de la tributación óptima. Ambos modelos concluyen que el cambio endógeno en la tasa de interés, como respuesta al aumento del gasto público, determina que la trayectoria óptima de la proporción ingresos tributarios/PIB no es constante, excepto en casos particulares.

2 El modelo original: Barro (1979)

El modelo estándar de suavización impositiva de Barro se caracteriza por una autoridad fiscal que debe financiar una secuencia exógena de gasto público, $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$, eligiendo los niveles de recaudación impositiva y deuda pública, $\{\tau_t, d_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, con el objetivo de minimizar las ineficiencias generadas por los impuestos distorsivos. Sea $\mathcal{D}\left(\frac{\tau}{y}\right)$, $\mathcal{D}'(\cdot) > 0$, $\mathcal{D}''(\cdot) > 0$, la función de pérdida de cada período que captura las distorsiones generadas por los impuestos, tal que es creciente y convexa. El problema que enfrenta el gobierno consiste en minimizar el valor presente de los costos generados por los impuestos, sujeto a su restricción presupuestaria

y a la restricción de no juegos de Ponzi.

$$\begin{aligned} \min_{\{\tau_t, d_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t \mathcal{D} \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) \\ \text{s.t.} \quad & d_{t+1} + \tau_t = g_t + d_t (1 + r) \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \left(\frac{1}{1+r} \right)^T d_{T+1} \right\} \leq 0 \end{aligned}$$

donde β es el factor de descuento del gobierno y r es la tasa de interés, que es exógena y fija, y satisface $r = 1/\beta - 1$.

Con $\mathcal{D} \left(\frac{\tau}{y} \right) = \frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\tau}{y} \right)^{1+\theta}$, $\theta > 0$, $\beta(1+r) = 1$, y el proceso estocástico para g dado por

$$g_t - \bar{g} = \rho(g_{t-1} - \bar{g}) + \varepsilon_t,$$

las ecuaciones que caracterizan la solución son:

$$\begin{aligned} \tau_t &= \frac{1-\rho}{1+r-\rho} \bar{g} + \frac{r}{1+r-\rho} g_t + r d_{t-1} \\ d_t &= d_{t-1} + \frac{1-\rho}{1+r-\rho} (g_t - \bar{g}) \\ pd_t &= g_t - \tau_t \\ fd_t &= d_{t+1} - d_t \end{aligned}$$

donde pd denota el déficit primario y fd el déficit financiero.

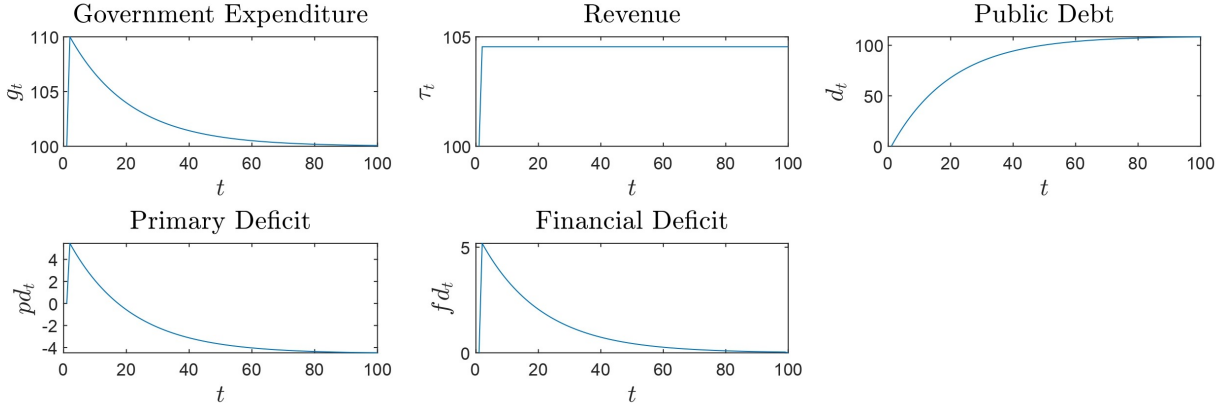


Figure 1: Aumento Transitorio del Gasto Público en el Modelo de Barro (1979).

La autoridad fiscal debe distribuir la carga impositiva a lo largo del tiempo para minimizar sus costos asociados, suavizando completamente la tasa impositiva entre períodos. En consecuencia, cuando el gobierno incrementa temporalmente el gasto público, debe emitir deuda para distribuir el ajuste tributario necesario en un horizonte temporal mayor, reduciendo así las pérdidas de bienestar derivadas de tasas impositivas elevadas. Esta estrategia da lugar a déficits fiscales en las etapas iniciales, seguidos por superávits destinados a cubrir los pagos de intereses de la deuda acumulada. A largo plazo, el saldo primario no retorna a

su nivel previo al impacto; en cambio, permanece negativo y equivale al costo por intereses de la deuda existente. Como resultado, tanto los ingresos tributarios como la deuda pública siguen un paseo aleatorio, siendo el déficit financiero la única variable estacionaria.

La razón por la cual el gobierno opta por suavizar completamente los impuestos y satisfacer la restricción presupuestaria mediante variaciones en la deuda es que los impuestos tienen un costo marginal creciente ($\mathcal{D}\left(\frac{\tau}{y}\right) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\tau}{y}\right)^{1+\theta}$, $\theta > 0 \Rightarrow \mathcal{D}''\left(\frac{\tau}{y}\right) = \theta\left(\frac{\tau}{y}\right)^{\theta-1}\frac{1}{y^2} > 0$), mientras que la deuda tiene un costo marginal constante de $1+r$. Entonces, mientras el valor presente de la deuda sea el mismo, el gobierno es indiferente entre distintas trayectorias de deuda. No ocurre lo mismo con los impuestos: dado su costo marginal creciente, el gobierno minimiza las distorsiones manteniéndolos constantes a lo largo del tiempo. Así, la deuda cumple el rol de instrumento que permite sostener una trayectoria impositiva constante, funcionando como un amortiguador.

3 Motivación

Realicé un análisis de eventos para Estados Unidos, centrado en episodios en los que el gasto público experimentó un aumento sustancial, específicamente aquellos en los que el gasto primario como porcentaje del PIB se incrementó en más de un 50%. Los gráficos están expresados en desviaciones con respecto al nivel en $t = -1$, es decir, el período inmediatamente anterior al impulso. Este análisis permite examinar cómo se financiaron dichos aumentos del gasto a través de una combinación de ingresos tributarios y deuda.

La ecuación de regresión se define como:

$$y_t = \alpha_t + \sum_{k=-8}^1 \beta_k x_{t+k} + \epsilon_t$$

En este caso, las variables dependientes, y_t , incluyen el gasto primario, los ingresos impositivos, el resultado primario, y la deuda pública, todos expresados como porcentajes del producto, así como la tasa de interés real de corto plazo.

Las variables independientes, x_{t+k} , son variables indicadoras que capturan el momento en que ocurren los impulsos fiscales en relación con el período t , y se definen de la siguiente manera: $x_{t+k} = 1$ para $k < 0$ si un impulso fiscal ocurrió k períodos antes del momento t , y $x_{t+k} = 0$ en caso contrario; $x_{t+k} = 1$ para $k > 0$ si un impulso fiscal ocurrirá k períodos después del momento t , y $x_{t+k} = 0$ en caso contrario; y $x_t = 1$ si un impulso fiscal ocurre en el período actual, y $x_t = 0$ en caso contrario.

Estas variables permiten examinar los efectos dinámicos de los impulsos fiscales sobre las variables dependientes, y_t .

La base de datos tiene frecuencia anual, abarca el período 1800–2021 para Estados Unidos, y proviene principalmente de la base de datos *Public Finances in Modern History* del FMI.¹ Datos de la tasa de interés real a corto plazo, que no están disponibles en dicha base de datos, se obtuvieron de *Measuring Worth*.²

¹<https://www.imf.org/external/datamapper/datasets/FPP>

²<https://www.measuringworth.com/>

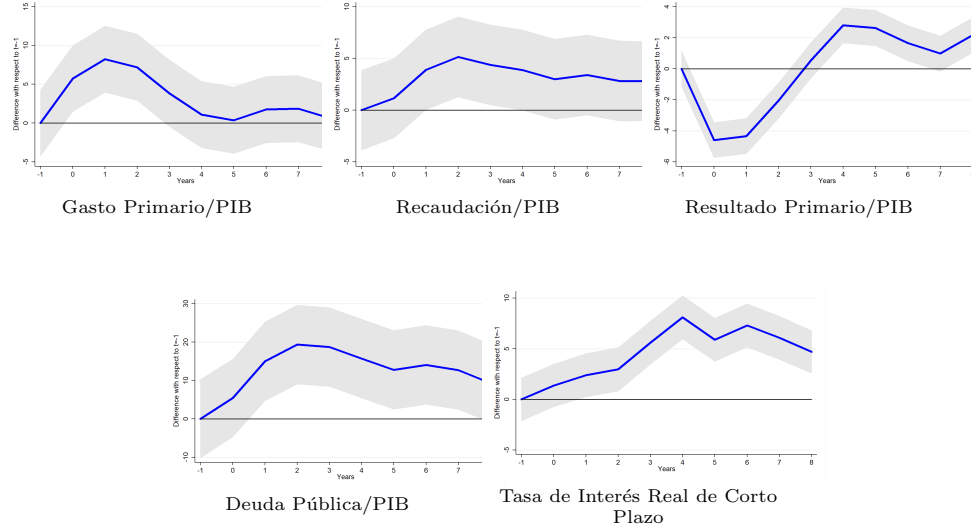


Figure 2: Respuestas a un impulso de aumento superior al 50% en la proporción del gasto público primario respecto al PIB para Estados Unidos, medidas como diferencias relativas al nivel en $t = -1$, el período anterior al impacto.

Nota: Los episodios incluidos son aquellos en los que la proporción del gasto público primario respecto al PIB aumentó más del 50% con respecto al año anterior. Esto da lugar a 11 casos: 1808, 1812, 1836, 1844, 1847, 1862, 1865, 1918, 1932, 1943 y 1960.

A diferencia del modelo de Barro (1979), se observa que, en promedio, durante episodios de aumentos sustanciales del gasto público, si bien los ingresos tributarios responden menos que proporcionalmente al gasto, este aumento no es perfectamente constante, sino que presenta una forma de campana. En consecuencia, la deuda no aumenta de manera permanente, sino que crece temporalmente para luego disminuir. Esto plantea la pregunta: ¿qué mecanismo explica que no sea óptimo que la recaudación y la deuda aumenten de forma permanente, como sugiere Barro (1979)? Para responder a esta cuestión, primero analizaré el modelo de Barro en un marco de equilibrio general y, posteriormente, desarrollaré un modelo de equilibrio general que incorpora trabajo y capital, donde las tasas impositivas se determinan según los resultados estándar de la teoría de la imposición óptima.

4 Modelo de Barro (1979) en Equilibrio General: Economía de Dotación

Considérese una economía cerrada con dos agentes: el gobierno y un consumidor representativo.

El sendero para el gasto público, $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$, está exógenamente dado. La política monetaria tampoco está modelada, por lo que puede considerarse exógenamente dada, y g representa la parte del gasto público total que debe ser financiada por el Tesoro mediante la emisión de deuda pública, d , y la recaudación de impuestos, τ . Dado que se trata de una economía cerrada, toda la deuda pública emitida por el Tesoro debe ser comprada por el sector privado en forma de bonos, b . Esto contrasta con Barro (1979), ya que este será un modelo de equilibrio general para una economía cerrada, donde la tasa de interés será endógena en lugar de fija.

A diferencia de Bohn (1990), se asume que los mercados son incompletos: el único instrumento financiero es un bono doméstico no contingente a un período, cuyo precio es 1 unidad del bien de consumo de hoy y cuyo rendimiento es de $1 + r$ unidades del bien de consumo del próximo período.

No hay producción en esta economía. Se asumirá que la dotación es exógena y constante: $y_t = y \ \forall t$. La única fuente de incertidumbre en este modelo es el proceso de los gastos públicos, $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$.

4.1 Gobierno

Siguiendo la misma estructura de Barro (1979) y Bohn (1990), el gobierno —representado en su totalidad por el Tesoro— busca minimizar el valor presente esperado descontado de las distorsiones generadas por los impuestos,

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t \mathcal{D} \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right)$$

donde τ/y es la tasa impositiva y $\mathcal{D}(\cdot)$ es una función de pérdida periódica creciente y convexa que captura las ineficiencias generadas por los impuestos distorsivos. La restricción presupuestaria está dada por

$$d_{t+1} + \tau_t = g_t + d_t(1 + r_t)$$

donde d_t es deuda emitida en el período $t - 1$ y que debe ser repagada en t , τ es el ingreso tributario y g es el gasto del gobierno.

El problema de optimización del gobierno está completamente caracterizado por (ver Apéndice 8.1):

$$\begin{aligned} [SMCEE. 1] : \quad & \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) = \mathbb{E}_t \left\{ \beta(1 + r_{t+1}) \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_{t+1}}{y_{t+1}} \right) \right\} \\ [SMCEE. 2] : \quad & d_{t+1} + \tau_t = g_t + d_t(1 + r_t) \\ [SMCEE. 3] : \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \beta^T \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_T}{y_T} \right) d_{T+1} \right\} = 0 \end{aligned}$$

4.2 Hogares

El hogar representativo busca maximizar la utilidad a lo largo de su vida derivada del sendero de consumo $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$,

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

sujeto a su restricción presupuestaria,

$$b_{t+1} + c_t + \tau_t = y_t + b_t(1 + r_t)$$

El hogar es dueño de la dotación de la economía, y , y debe pagar impuestos, τ , pero no recibe transferencias del gobierno.

El problema de optimización del hogar representativo está completamente caracterizado por (ver Apéndice 8.2):

$$\begin{aligned}
[SMCEE. 4] : \quad & u'(c_t) = \mathbb{E}_t \left\{ \beta(1 + r_{t+1})u'(c_{t+1}) \right\} \\
[SMCEE. 5] : \quad & b_{t+1} + \tau_t + c_t = y_t + b_t(1 + r_t) \\
[SMCEE. 6] : \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \beta^T u'(c_T)b_{T+1} \right\} = 0
\end{aligned}$$

4.3 Equilibrio Competitivo

Un equilibrio competitivo en mercados secuenciales consiste en una asignación $\{d_{t+1}, \tau_t, b_{t+1}, c_t\}_{t=0}^{\infty}$ y un sistema de precios $\{r_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ tal que, dadas las condiciones iniciales (b_0, d_0) y senderos exógenos $\{y_t, g_t\}_{t=0}^{\infty}$:

- Dado $\{r_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\tau_t, d_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ resuelve el problema de optimización del gobierno, dado por

$$\begin{aligned}
& \min_{\{\tau_t, d_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t \mathcal{D} \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) \\
& \text{s.t.} \quad d_{t+1} + \tau_t = g_t + d_t(1 + r_t)
\end{aligned}$$

y caracterizado por las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
[SMCEE. 1] : \quad & \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) = \mathbb{E}_t \left\{ \beta(1 + r_{t+1}) \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_{t+1}}{y_{t+1}} \right) \right\} \\
[SMCEE. 2] : \quad & d_{t+1} + \tau_t = g_t + d_t(1 + r_t) \\
[SMCEE. 3] : \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \beta^T \omega_T d_{T+1} \right\} = 0
\end{aligned}$$

- Dado $\{r_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_t, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ resuelve el problema de optimización del hogar representativo, dado por:

$$\begin{aligned}
& \max_{\{c_t, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
& \text{s.t.} \quad b_{t+1} + \tau_t + c_t = y_t + b_t(1 + r_t)
\end{aligned}$$

y caracterizado por las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
[SMCEE. 4] : \quad & u'(c_t) = \mathbb{E}_t \left\{ \beta(1 + r_{t+1})u'(c_{t+1}) \right\} \\
[SMCEE. 5] : \quad & b_{t+1} + \tau_t + c_t = y_t + b_t(1 + r_t) \\
[SMCEE. 6] : \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \beta^T u'(c_T)b_{T+1} \right\} = 0
\end{aligned}$$

- El sistema de precios $\{r_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ es tal que todos los mercados se vacían:

$$\begin{aligned} [SMCEE. 7]: \quad & b_t = d_t \quad \forall t \\ [SMCEE. 8]: \quad & c_t + g_t = y_t \quad \forall t \end{aligned}$$

4.4 Simulación de un aumento en el gasto público

Ahora simularé el experimento estándar en esta literatura: un aumento inesperado, sustancial y temporal del gasto público.

Considérense las formas funcionales $\mathcal{D}(\tau/y) = (1 + \theta)^{-1} (\tau/y)^{1+\theta}$, $\theta > 0$, y $u(c) = (1 - \sigma)^{-1} c^{1-\sigma}$, $\sigma \geq 0$, el siguiente proceso AR1 para el gasto público,

$$g_t = (1 - \gamma)\bar{g} + \gamma g_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, y la siguiente parametrización.

y	β	$\bar{g}$	γ	σ	θ
200	0.96	100	0.95	1.5	2

Table 1: Parametrización base

Simularé la respuesta del modelo al siguiente impulso:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = 0 & \forall t \neq 0 \\ \varepsilon_t = 10 & \text{para } t = 0 \end{cases}$$

Esto significa que en el periodo $t = 0$ el gasto público g_t aumenta de 100 (el estado estacionario) a 110, y a partir de $t = 1$ en adelante, evoluciona según el proceso AR(1) definido anteriormente. La Figura 3 ilustra la respuesta del modelo. Todas las variables se expresan en desviaciones respecto al estado estacionario previo al impacto, en unidades de bienes de consumo.

A diferencia del modelo de Barro (1979), la tasa impositiva no aumenta de forma permanente en el momento del impacto; crece menos que proporcionalmente respecto al gasto, pero no es óptimo mantenerla en ese nivel. En cambio, debe reducirse en los períodos siguientes.

En este modelo, la deuda ya no puede funcionar de manera óptima como un instrumento para sostener un sendero constante de impuestos porque ambos instrumentos de financiamiento tienen costos marginales crecientes. El costo marginal de los impuestos aumenta debido a la forma funcional de $\mathcal{D}(\cdot)$, mientras que el costo marginal de la deuda se eleva porque, al tratarse de un modelo de equilibrio general, un aumento en la deuda pública provoca un incremento en la tasa de interés para equilibrar los mercados. Dado que es una economía cerrada, la deuda emitida por el gobierno debe ser adquirida como bonos por los hogares, por lo que el mecanismo que genera la economía para incentivarlos a ahorrar es el aumento en la tasa de interés. Así, a diferencia de Barro (1979), la tasa de interés no es constante, lo que implica que el gobierno no es indiferente respecto a la trayectoria de la deuda; tanto los costos marginales de la deuda como de los impuestos son crecientes. Por ello, no es óptimo mantener una trayectoria constante de ingresos tributarios ajustando la deuda; el aumento endógeno de la tasa de interés hace que no solo sea relevante el valor presente de la deuda, sino también la pendiente de su trayectoria.

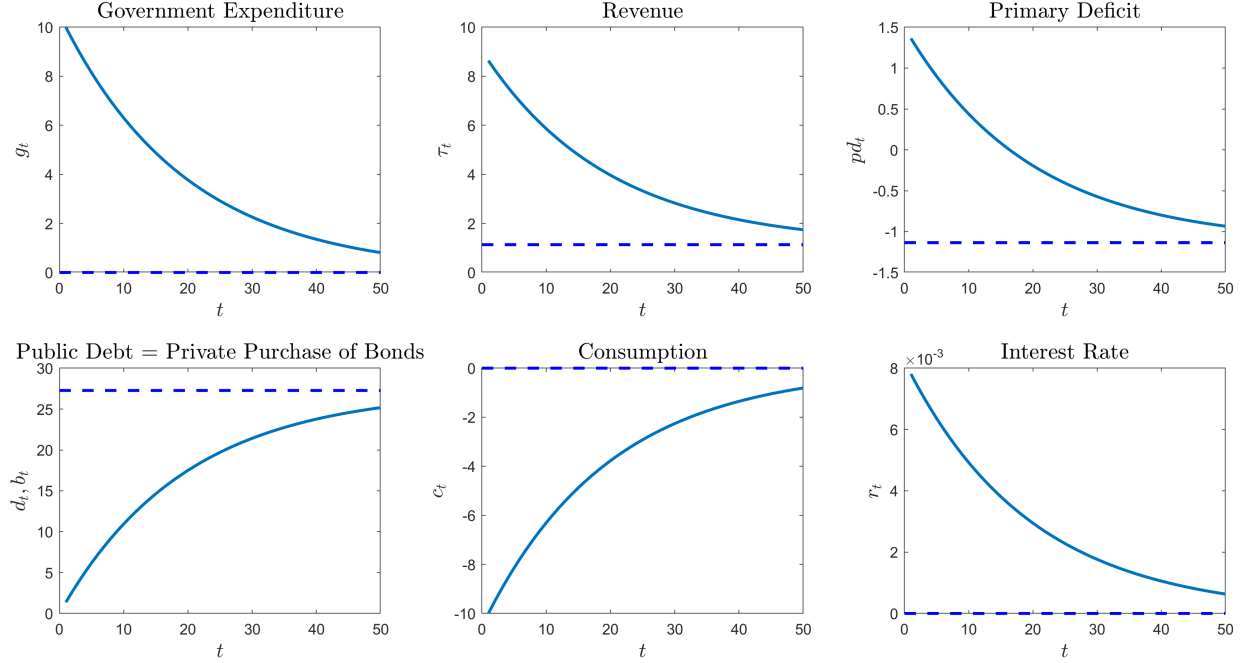


Figure 3: Aumento transitorio del gasto público. Variables expresadas en términos de desviación respecto al estado estacionario inicial, en unidades de bienes de consumo. La línea punteada indica el nuevo estado estacionario tras el impacto. Calibración base: $\theta = 2$ y $\sigma = 1.5$.

La línea discontinua indica el estado estacionario posterior al impacto, expresado como una desviación respecto al estado estacionario previo al impulso. Nótese que las únicas variables estacionarias son el consumo y la tasa de interés. De acuerdo con la condición de equilibrio en el mercado de bienes, se cumple que $c_t + g_t = y_t \forall t$. Dado que se asume que la producción es exógena y el gasto público también, el consumo queda completamente determinado por $c_t = y_t - g_t$. El mecanismo que genera la economía para que los hogares decidan óptimamente este nivel de consumo en cada período t , satisfaciendo la condición de equilibrio del mercado, es el ajuste de la tasa de interés, que asegura que se cumpla la ecuación de Euler (*SMCE.4*).

Inicialmente, antes de que ocurra el impulso, la economía se encuentra en estado estacionario, por lo que c_t es constante y está dado por $c_t = y_t - g_t = 200 - 100 = 100 \forall t$. Por lo tanto, la tasa de interés debe ser $r_t = 1/\beta - 1$. A largo plazo, cuando el impacto se disipa, g_t vuelve a $\bar{g} = 100$, y en consecuencia el consumo también debe regresar a su nivel inicial, por lo que la tasa de interés debe retornar también. Esto explica por qué tanto el consumo como la tasa de interés revierten a sus niveles originales.

Partiendo de un déficit fiscal primario (pd) cero, luego del impacto converge a ser negativo (superávit) a largo plazo, igual al interés (r) que el gobierno debe pagar a los hogares por la deuda (d) acumulada durante los períodos de alto gasto público resultantes del déficit fiscal: $pd_{ss} = -r_{ss}d_{ss}$.

Así, se puede concluir que, al endogenizar la tasa de interés en equilibrio general, no es óptimo mantener una trayectoria constante de ingresos tributarios respaldada por un sendero variable de deuda. La asignación óptima del financiamiento entre impuestos y deuda dependerá de sus costos relativos. Esto quedará demostrado mediante el siguiente ejercicio

de estática comparativa.

4.5 Estática comparativa: aumento en la convexidad del costo de los impuestos

Consideremos un aumento en la convexidad de la función de pérdida: $\uparrow \mathcal{D}''(\cdot)$. Con $\mathcal{D}(\tau/y) = (1 + \theta)^{-1}(\tau/y)^{1+\theta}$, esto está representado por $\uparrow \theta$. La parametrización base consideraba $\theta = 2$, y ahora la compararé con el mismo impacto pero con $\theta = 4$. La Figura 4 muestra los resultados de la simulación.

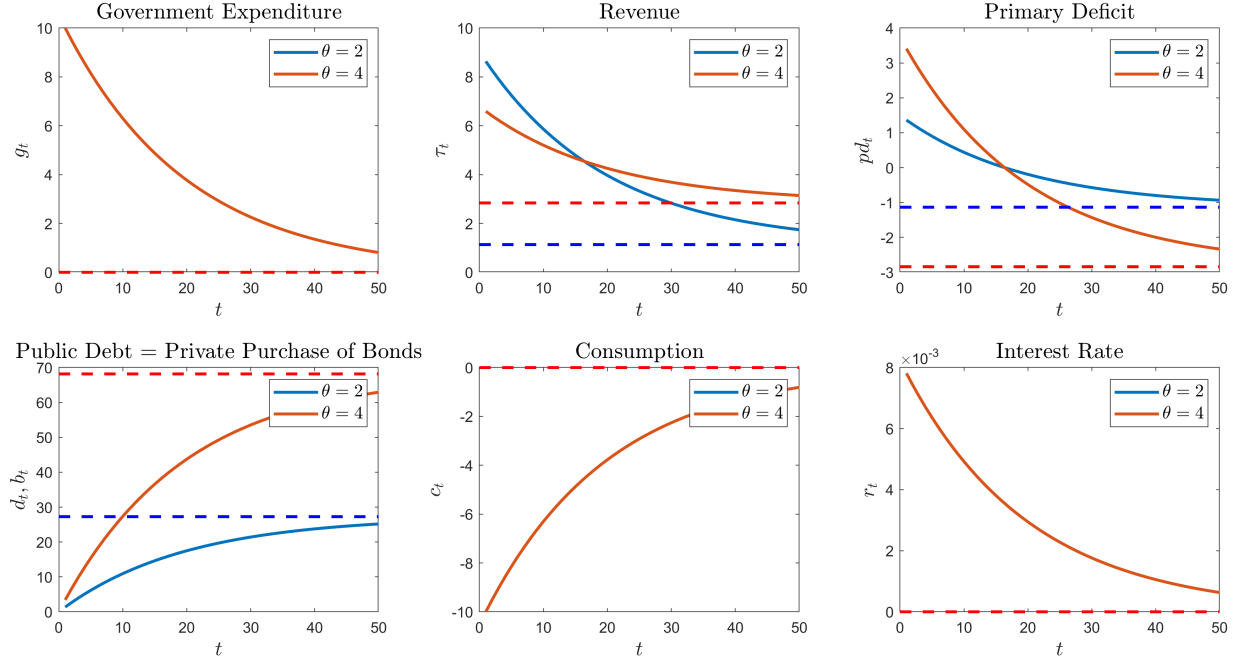


Figure 4: Aumento transitorio del gasto público. Variables expresadas en términos de desviación respecto al estado estacionario inicial, en unidades de bienes de consumo. La línea punteada indica el nuevo estado estacionario tras el impacto. Calibración: $\sigma = 1.5$, y $\theta = 2$ vs. $\theta = 4$.

Con $\theta = 2$ y $\theta = 4$, las trayectorias del consumo y la tasa de interés se mantienen iguales, ya que el primero está completamente determinado por $c_t = y_t - g_t$, con y y g siguiendo las mismas trayectorias en ambos casos, y la segunda, a su vez, está determinada por la ecuación de Euler. Dado que $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ es idéntico tanto para $\theta = 2$ como para $\theta = 4$, la ecuación de Euler implica entonces la misma trayectoria para la tasa de interés.

Con $\theta = 4$, el aumento de la tasa impositiva en el momento del impacto es menor y la pendiente de su trayectoria es más plana que con $\theta = 2$. Esto es intuitivo: cuanto mayor es θ , mayor es la convexidad de la función de costo de los impuestos, lo que implica un costo más elevado para trayectorias de ingresos tributarios que no sean constantes. En consecuencia, el gobierno se ve inducido a elegir una trayectoria menos pronunciada para la tasa impositiva. Dado que el valor presente descontado de los ingresos debe igualar al de los gastos (que es el mismo en ambos casos), para que la trayectoria impositiva sea menos empinada, la tasa debe ser más baja en el corto plazo y más alta en el largo plazo que en el caso con $\theta = 2$. Esto explica por qué el aumento en el momento del impacto es menor.

Dado que el aumento de los ingresos impositivos en el momento del impacto es menor con $\theta = 4$ que con $\theta = 2$, mientras que la trayectoria del gasto es la misma en ambos casos,

el déficit primario se incrementa más con $\theta = 4$. Esto requiere un superávit primario de largo plazo más elevado. En consecuencia, el nuevo estado estacionario del superávit fiscal primario es mayor con $\theta = 4$ que con $\theta = 2$.

Dado que un aumento en θ implica que el costo de los impuestos es más alto, pero la trayectoria de la tasa de interés se mantiene constante tanto para $\theta = 2$ como para $\theta = 4$, un valor mayor de θ significa que el costo relativo de los impuestos respecto de la deuda es mayor. Por lo tanto, el costo relativo de la deuda con respecto a los impuestos es menor, lo que lleva al gobierno a emitir más deuda. Por esta razón, la deuda pública es mayor con $\theta = 4$ que con $\theta = 2$.

4.6 Barro (1979) como un caso particular: $\sigma = 0$

Un aspecto interesante de este modelo es que incluye el modelo de Barro (1979) como un caso particular: cuando $\sigma = 0$. La Figura 5 ilustra la simulación asociada a este escenario.

Con preferencias CES, $\sigma = 0$ implica una elasticidad de sustitución intertemporal infinita. En consecuencia, la demanda de bonos por parte del hogar —que representa la oferta agregada de fondos prestables en la economía— es infinitamente elástica. Como resultado, cuando el gobierno incrementa su demanda de fondos prestables, no se genera un exceso de demanda, por lo que la tasa de interés permanece constante, tal como se asume en Barro (1979), de modo que este modelo se comporta de manera idéntica.

Aiyagari et al. (2002) encontraron un resultado similar en un modelo de equilibrio general con producción pero sin capital: bajo ciertas restricciones sobre las preferencias, las cantidades de activos libres de riesgo que el gobierno puede emitir y poseer, y el proceso de gasto público, se reafirma la caracterización de la tributación óptima propuesta por Barro. En este caso, basta con asumir preferencias lineales en el consumo.

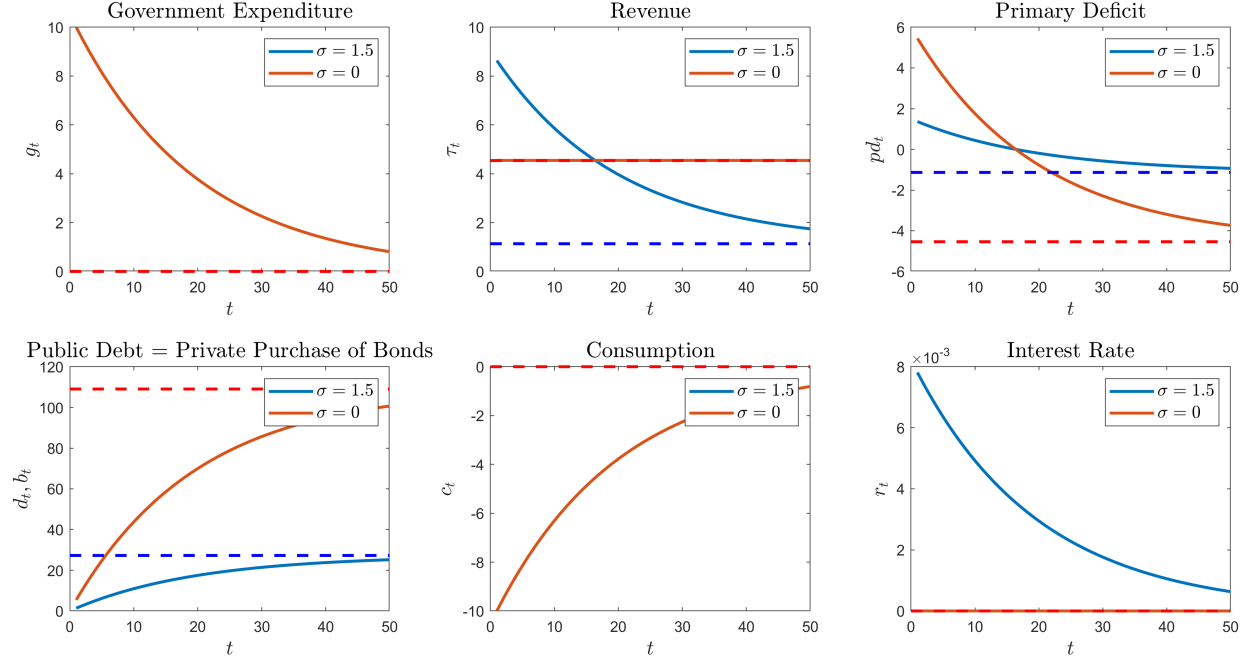


Figure 5: Aumento transitorio del gasto público. Variables expresadas en términos de desviación respecto al estado estacionario inicial, en unidades de bienes de consumo. La línea punteada indica el nuevo estado estacionario tras el impacto. Calibración: $\theta = 2$, y $\sigma = 1.5$ vs. $\sigma = 0$.

5 Economía con Producción: Tributación Óptima à la Ramsey

Considérese ahora una economía de producción determinística con gobierno, una empresa representativa y un hogar representativo. La tecnología de producción exhibirá rendimientos constantes a escala y, a diferencia de Stokey y Lucas (1983) y Aiyagari et al. (2002), combinará tanto trabajo como capital.

5.1 Hogares

El hogar representativo es dueño del capital y, por lo tanto, realiza la acumulación de capital, $k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$, ofrece trabajo y capital a la empresa representativa a los precios de mercado w_t y r_t , paga impuestos sobre sus ingresos laborales y de capital ($\tau^n w n$ y $\tau^k r k$), compra bonos del gobierno (d) y recibe los beneficios de la empresa representativa (π). El problema del hogar consiste en maximizar su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria secuencial y a una condición de ausencia de esquemas Ponzi.

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}, d_{t+1}\}_{t=0}^T} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, n_t) = \sum_{t=0}^T \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\ \text{s.t.} \quad & c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} = w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t \\ & d_0, k_0 \text{ dados} \\ & d_{T+1} \geq 0 \quad (NPGC) \end{aligned}$$

d_{t+1} denota la tenencia de deuda pública que paga una unidad de consumo en el periodo $t + 1$. Defínase:

$$q_t \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{\prod_{i=0}^{t-1} (1 + R_i)} & \text{si } t \in \{1, 2, \dots\} \end{cases}$$

El problema de optimización del hogar representativo está completamente caracterizado por (ver Apéndice 8.3):

$$[SMCEP. 1]: \quad n_t^\phi c_t^\sigma = (1 - \tau_t^n) w_t \quad (\text{H.H.1})$$

$$[SMCEP. 2]: \quad R_t = (1 - \tau_{t+1}^k) r_{t+1} - \delta \quad (\text{H.H.2})$$

$$[SMCEP. 3]: \quad \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^\sigma = \beta(1 + R_t) \quad (\text{H.H.3})$$

$$[SMCEP. 4]: \quad c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} = w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t \quad (\text{H.H.4})$$

$$[SMCEP. 5]: \quad k_{T+1} = 0 \quad (\text{H.H.5})$$

$$[SMCEP. 6]: \quad d_{T+1} = 0 \quad (\text{H.H.6})$$

que son, respectivamente, la condición de optimalidad intratemporal entre ocio y consumo, la condición de no arbitraje entre bonos y capital, la condición de optimalidad intertemporal para el consumo, la restricción presupuestaria y las condiciones de transversalidad.

Adicionalmente, la restricción presupuestaria intertemporal del hogar (IBC^h) es (ver Apéndice 8.4):

$$\sum_{t=0}^T q_t c_t = d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) r_0 + (1 - \delta) \right] k_0 + \sum_{t=0}^T q_t (1 - \tau_t^n) w_t n_t$$

5.2 Firms

Dado que la tecnología F exhibe rendimientos constantes a escala, sin pérdida de generalidad se puede asumir que la economía cuenta con una firma representativa. Esta arrienda capital y demanda trabajo de la familia representativa con el fin de maximizar sus beneficios:

$$\max_{k_t, n_t} \pi_t = F(n_t, k_t) - r_t k_t - w_t n_t$$

Condiciones de primer orden:

$$[SMCEP. 7]: \quad F_{nt} = w_t \quad (F.1)$$

$$[SMCEP. 8]: \quad F_{kt} = r_t \quad (F.2)$$

donde F_{nt} y F_{kt} denotan los productos marginales del trabajo y el capital en el período t . Debido a la propiedad de retornos constantes a escala:

$$[SMCEP. 9]: \quad \pi_t = 0 \quad (F.3)$$

5.3 Gobierno - Problema de Ramsey: Enfoque Primal

El problema del gobierno se basa en el enfoque primal de la tributación óptima, que caracteriza el conjunto de asignaciones que pueden implementarse como un equilibrio competitivo con impuestos distorsivos mediante la restricción de recursos y una restricción de implementabilidad. Esta última corresponde a la restricción presupuestaria del consumidor, con los precios y las políticas sustituidas mediante las condiciones de primer orden.

Restricción presupuestaria secuencial del gobierno:

$$g_t + d_t = \tau_t^n w_t n_t + \tau_t^k r_t k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t}$$

Restricción de recursos (RC):

$$c_t + g_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = \underbrace{F(k_t, n_t)}_{=y}$$

El problema de Ramsey está dado por:

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^T} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, n_t) = \sum_{t=0}^T \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] = \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1-\tau_0^k) F_{k0} + (1-\delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)} \quad (IC) \\
& \underbrace{F(k_t, n_t)}_{y_t} = c_t + g_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \quad (RC) \\
& k_0, d_0, \tau_0^k \text{ dados}
\end{aligned}$$

donde IC representa la Restricción de Implementabilidad, que consiste en la IBC^h con los precios y las políticas sustituidos mediante las condiciones de primer orden (ver Apéndice 8.6 para la derivación).

Las correspondientes condiciones de primer orden son (ver Apéndice 8.7):

$$\begin{aligned}
[c_t, n_t]_{RP} : \quad & n_t^\phi + \lambda(1+\phi)n_t^\phi = \left[c_t^{-\sigma} + \lambda(1-\sigma)c_t^{-\sigma} \right] F_{nt} \quad \forall t \geq 1 \\
[c_t, k_{t+1}]_{RP} : \quad & c_t^{-\sigma} + \lambda(1-\sigma)c_t^{-\sigma} = \beta \left(c_{t+1}^{-\sigma} + \lambda(1-\sigma)c_{t+1}^{-\sigma} \right) \left[F_{k,t+1} + (1-\delta) \right] \quad \forall t \geq 0 \\
[c_0]_{RP} : \quad & c_0^{-\sigma} + \lambda \left[(1-\sigma)c_0^{-\sigma} + \sigma c_0^{-\sigma-1} \left(d_0 + \left[(1-\tau_0^k) F_{k0} + (1-\delta) \right] k_0 \right) \right] = \mu_0 \\
[n_0]_{RP} : \quad & -n_0^\phi + \lambda \left[-(1+\phi)n_0^\phi - c_0^{-\sigma} \left[(1-\tau_0^k) F_{k0,n0} \right] k_0 \right] + \mu_0 F_{n0} = 0 \\
[\lambda]_{RP} : \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] = \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1-\tau_0^k) F_{k0} + (1-\delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)} \quad (IC) \\
[\mu_t]_{RP} : \quad & \underbrace{F(k_t, n_t)}_{y_t} = c_t + g_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \quad (RC)
\end{aligned}$$

En el Apéndice 8.8 demuestro que

$$\tau_{t+1}^k = 0 \quad \forall t$$

Este es un resultado establecido en la literatura. Como lo discute Kingston (1991), las expectativas de previsión perfecta, la utilidad separable y la aversión relativa al riesgo constante generan un impuesto óptimo sobre el capital igual a cero después del período inicial $t = 0$, sin importar si la elasticidad de la oferta laboral es constante o no. Bajo previsión imperfecta, surgiría un término de covarianza, y si la aversión al riesgo variara en el tiempo, el impuesto al capital para el siguiente período tendría el mismo signo que el cambio en el coeficiente de aversión relativa al riesgo en el período actual.

En cuanto al impuesto al trabajo, es óptimo mantenerlo constante (ver Apéndice 8.9):

$$\tau_t^n = \frac{\lambda(\phi + \sigma)}{1 + \lambda(1 + \phi)} \quad \forall t \geq 1$$

Este resultado de igualación en la tasa impositiva óptima sobre los salarios a lo largo del tiempo también es estándar en la literatura sobre tributación óptima. Como explica Kingston (1991), se cumple bajo utilidad separable, elasticidad constante de la oferta laboral y aversión relativa al riesgo constante. En ausencia de dicha constancia, los impuestos sobre los salarios deberían ser bajos en momentos de oferta laboral relativamente elástica o de baja aversión relativa al riesgo.

Considerando que estoy analizando episodios repetidos, generalizaré estos resultados para incluir también el periodo inicial:

$$\tau_t^k = 0 \quad , \quad \tau_t^n = \frac{\lambda(\phi + \sigma)}{1 + \lambda(1 + \phi)} \quad \forall t$$

Nótese que τ^n depende del multiplicador de Lagrange de la Restricción de Implementabilidad, λ , que determinaré mediante la condición de transversalidad, $d_{T+1} = 0$.

5.4 Equilibrio Competitivo

Un equilibrio competitivo en mercados secuenciales consiste en una asignación $\{c_t, n_t, k_{t+1}, d_{t+1}, \pi_t, y_t\}_{t=0}^T$, una política impositiva $\{\tau_t^n, \tau_t^k\}_{t=0}^T$ y un sistema de precios $\{w_t, r_t, R_t, q_t\}_{t=0}^T$ tal que, dadas condiciones iniciales (d_0, k_0) y un sendero exógeno $\{g_t\}_{t=0}^T$:

- Dado $\{w_t, r_t, R_t\}_{t=0}^T$, $\{\pi_t\}_{t=0}^T$ y $\{\tau_t^n, \tau_t^k\}_{t=0}^T$, $\{c_t, n_t, k_{t+1}, d_{t+1}\}_{t=0}^T$ resuelve el problema de optimización del hogar representativo, dado por

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}, d_{t+1}\}_{t=0}^T} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, n_t) = \sum_{t=0}^T \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\ \text{s.t.} \quad & c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} = w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t \\ & d_0, k_0 \text{ dados} \\ & d_{T+1} \geq 0 \quad (NPGC) \end{aligned}$$

y caracterizado por las siguientes condiciones de primer orden:

$$[SMCEP. 1] : \quad n_t^\phi c_t^\sigma = (1 - \tau_t^n) w_t \quad (\text{H.H.1})$$

$$[SMCEP. 2] : \quad R_t = (1 - \tau_{t+1}^k) r_{t+1} - \delta \quad (\text{H.H.2})$$

$$[SMCEP. 3] : \quad \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^\sigma = \beta(1 + R_t) \quad (\text{H.H.3})$$

$$[SMCEP. 4] : \quad c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} = w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t \quad (\text{H.H.4})$$

$$[SMCEP. 5] : \quad k_{T+1} = 0 \quad (\text{H.H.5})$$

$$[SMCEP. 6] : \quad d_{T+1} = 0 \quad (\text{H.H.6})$$

- Dado $\{w_t, r_t\}_{t=0}^T$, $\{n_t, k_t, \pi_t, y_t\}_{t=0}^T$ resuelve el problema de optimización de la firma representativa, dado por

$$\max_{k_t, n_t} \quad \pi_t = \underbrace{F(n_t, k_t)}_{y_t} - r_t k_t - w_t n_t$$

y caracterizado por las siguientes condiciones de primer orden:

$$[SMCEP. 7] : \quad F_{nt} = w_t \quad (F.1)$$

$$[SMCEP. 8] : \quad F_{kt} = r_t \quad (F.2)$$

$$[SMCEP. 9] : \quad \pi_t = 0 \quad (F.3)$$

- El gobierno determina la política impositiva $\{\tau_t^n, \tau_t^k\}_{t=0}^\infty$ de acuerdo al problema de Ramsey, dado por

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^T} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, n_t) = \sum_{t=0}^T \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] = \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)} \quad (IC) \\ & \underbrace{F(k_t, n_t)}_{y_t} = c_t + g_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t \quad (RC) \\ & k_0, d_0, \tau_0^k \text{ dados} \end{aligned}$$

y caracterizado por las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} [c_t, n_t]_{RP} : \quad & n_t^\phi + \lambda(1 + \phi)n_t^\phi = \left[c_t^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_t^{-\sigma} \right] F_{nt} \quad \forall t \geq 1 \\ [c_t, k_{t+1}]_{RP} : \quad & c_t^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_t^{-\sigma} = \beta \left(c_{t+1}^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_{t+1}^{-\sigma} \right) \left[F_{k,t+1} + (1 - \delta) \right] \quad \forall t \geq 0 \\ [c_0]_{RP} : \quad & c_0^{-\sigma} + \lambda \left[(1 - \sigma)c_0^{-\sigma} + \sigma c_0^{-\sigma-1} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right) \right] = \mu_0 \\ [n_0]_{RP} : \quad & -n_0^\phi + \lambda \left[- (1 + \phi)n_0^\phi - c_0^{-\sigma} \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0, n0} \right] k_0 \right] + \mu_0 F_{n0} = 0 \\ [\lambda]_{RP} : \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] = \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)} \quad (IC) \\ [\mu_t]_{RP} : \quad & \underbrace{F(k_t, n_t)}_{y_t} = c_t + g_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t \quad (RC) \end{aligned}$$

que implican:

$$\begin{aligned} [SMCEP. 10] : \quad & \tau_t^k = 0 \quad \forall t \\ [SMCEP. 11] : \quad & \tau_t^n = \frac{\lambda(\phi + \sigma)}{1 + \lambda(1 + \phi)} \quad \forall t \end{aligned}$$

donde λ es determinado por la condición de transversalidad

$$d_{T+1} = 0$$

y el sendero para la deuda está dado por la restricción presupuestaria secuencial,

$$[SMCEP. 12] : \quad g_t + d_t = \tau_t^n w_t n_t + \tau_t^k r_t k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t}$$

dado $\{g_t, w_t, n_t, r_t, k_t, R_t\}_{t=0}^T$.

- El sistema de precios $\{w_t, r_t, R_t, q_t\}_{t=0}^T$ es tal que todos los mercados se vacían para todo t :

$$[SMCEP. 1\beta] : \quad c_t + g_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = y_t = F(k_t, n_t)$$

5.5 Simulación de un aumento en el gasto público comparado con datos de Estados Unidos

Para la simulación se adoptará una función de producción CES:

$$y = F(k, n) = \left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}}$$

donde η es la elasticidad de sustitución. La especificación Cobb-Douglas corresponde a $\eta \rightarrow 1$.

El cociente gasto público/PIB será la variable de impulso, siguiendo:

$$\frac{g_t}{y_t} = \frac{\bar{g}}{\bar{y}} + \varepsilon_t$$

donde $\bar{g}/\bar{y}$ es el valor de estado estacionario previo al impacto, que será fijado en 0.15. La serie $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^T$ se fijará para replicar los datos de Estados Unidos.

Para la parametrización base, se considerarán valores estándar:

σ	ψ	β	δ	χ
1	2	0.98	0.03	0.33

Table 2: Parametrización base

El valor de la elasticidad de sustitución entre trabajo y capital que mejor se ajusta cualitativamente a los datos de EE.UU. es $\eta = 1.1$. Los resultados de la simulación se presentan en la Figura 6.

A pesar de que las tasas impositivas son constantes, la proporción recaudación/PIB no se suaviza perfectamente; aumenta en el primer período y luego disminuye gradualmente. Como en el resultado estándar, el aumento de ingresos tributarios es menor que uno con respecto al gasto, pero la trayectoria no es constante. Esta variación se debe a la respuesta endógena de la tasa de interés: el aumento y posterior disminución de la tasa de interés, derivados del aumento del gasto público, determinarán la trayectoria de la productividad marginal del trabajo y del capital a través de la condición de minimización de costos. Esto, combinado con la elasticidad de sustitución, determinará la trayectoria del ingreso laboral como porcentaje del PIB. Más sobre estas intuiciones económicas se discutirá en la siguiente sección.

Otra diferencia con respecto al resultado de Barro (1979) es que la deuda no aumenta de forma permanente; en cambio, exhibe una dinámica con forma de joroba. Sin embargo, al compararlo con los datos de EE.UU., el modelo subestima el nivel de emisión de deuda, ya que presenta un aumento inicial más pronunciado en la recaudación, lo que da lugar a un déficit fiscal inicial menor.

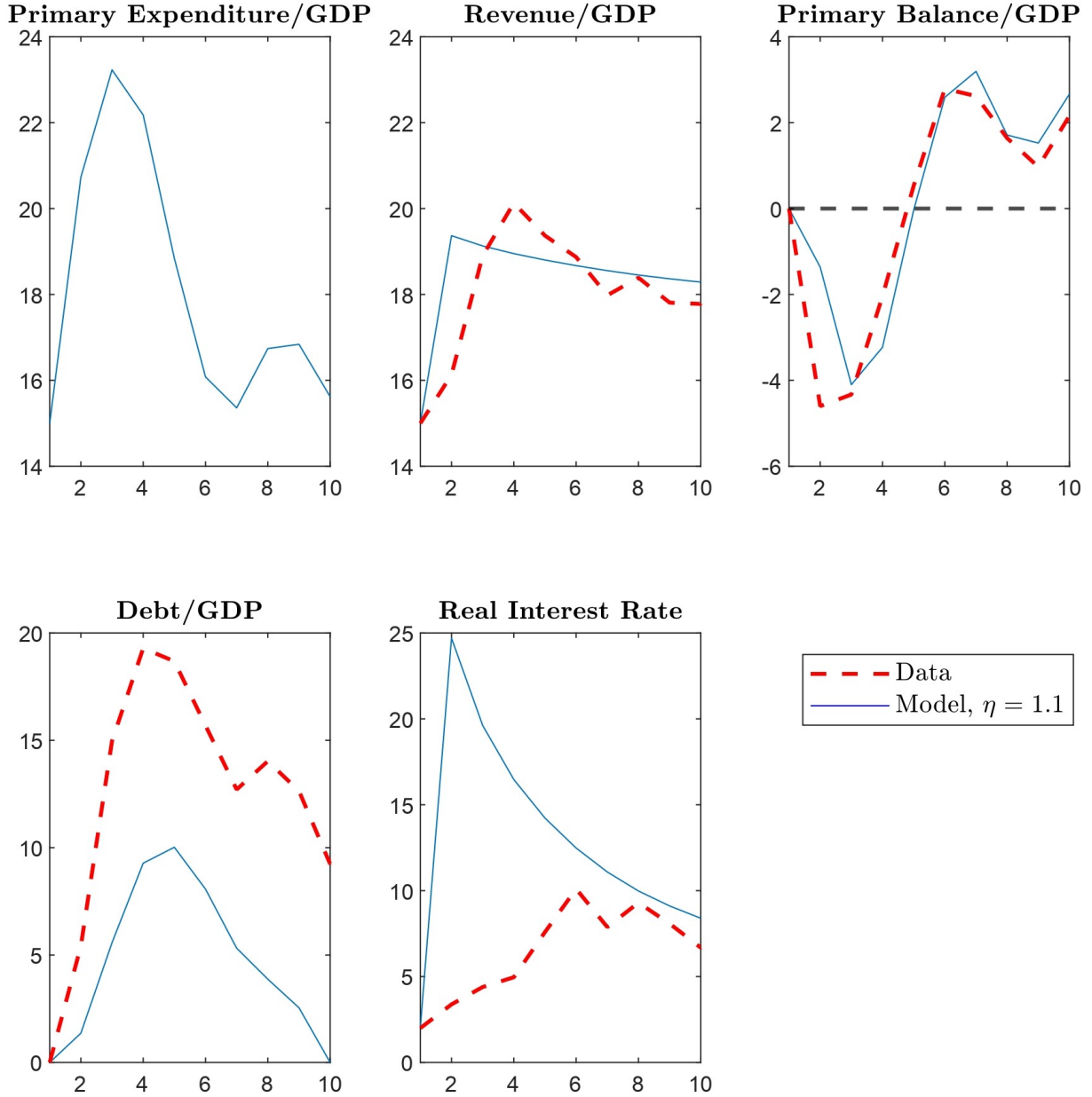


Figure 6: Impulso: Aumento del gasto público como porcentaje del PIB, como en los datos de Estados Unidos.

5.6 El rol clave de la tasa de interés

La simulación para diferentes valores de η se presenta en la Figura 7, donde rev/y representa recaudación/PIB, d/y denota deuda/PIB, pb/y indica resultado primario/PIB, y R representa la tasa de interés.

Nótese que la trayectoria de recaudación/PIB es creciente (decreciente) cuando $\eta < 1$ ($\eta > 1$), y constante cuando $\eta = 1$. Para comprender estos resultados, debemos remitirnos a la Figura 8.

En respuesta a un aumento del gasto público, la tasa de interés aumenta inicialmente

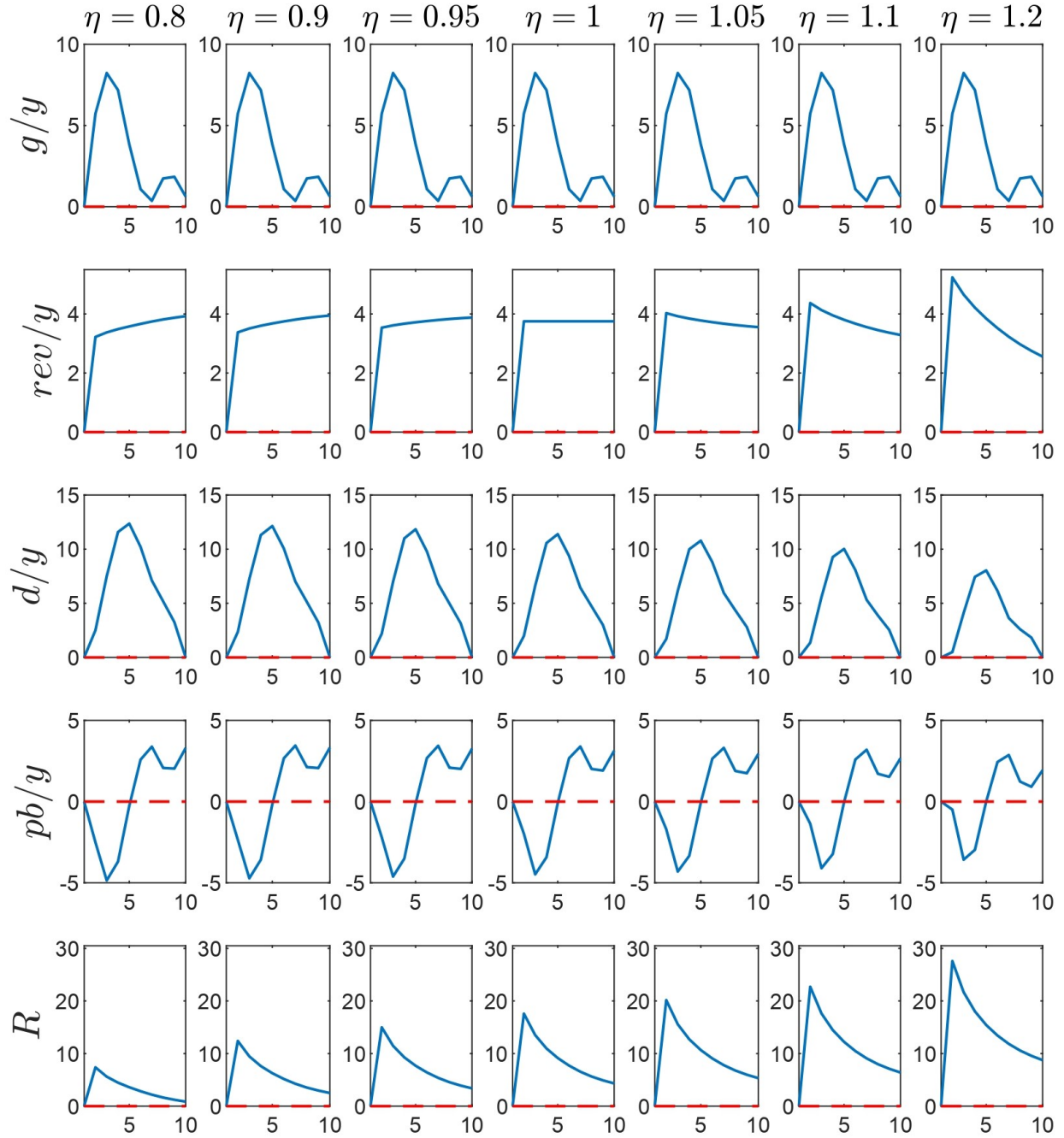


Figure 7: Impulso: Aumento del gasto público como porcentaje del PIB, como en los datos de Estados Unidos.

y luego disminuye. Esto provoca que la relación salario-renta del capital, w/r , siga una trayectoria inversa. En consecuencia, el producto marginal del trabajo (capital) —y por lo tanto y_t/n_t (y_t/k_t)— debe disminuir (aumentar) inicialmente y luego aumentar (disminuir). La dinámica de la recaudación impositiva como porcentaje del producto está determinada por la trayectoria de y_t/n_t . En particular, los ingresos tributarios como porcentaje del PIB

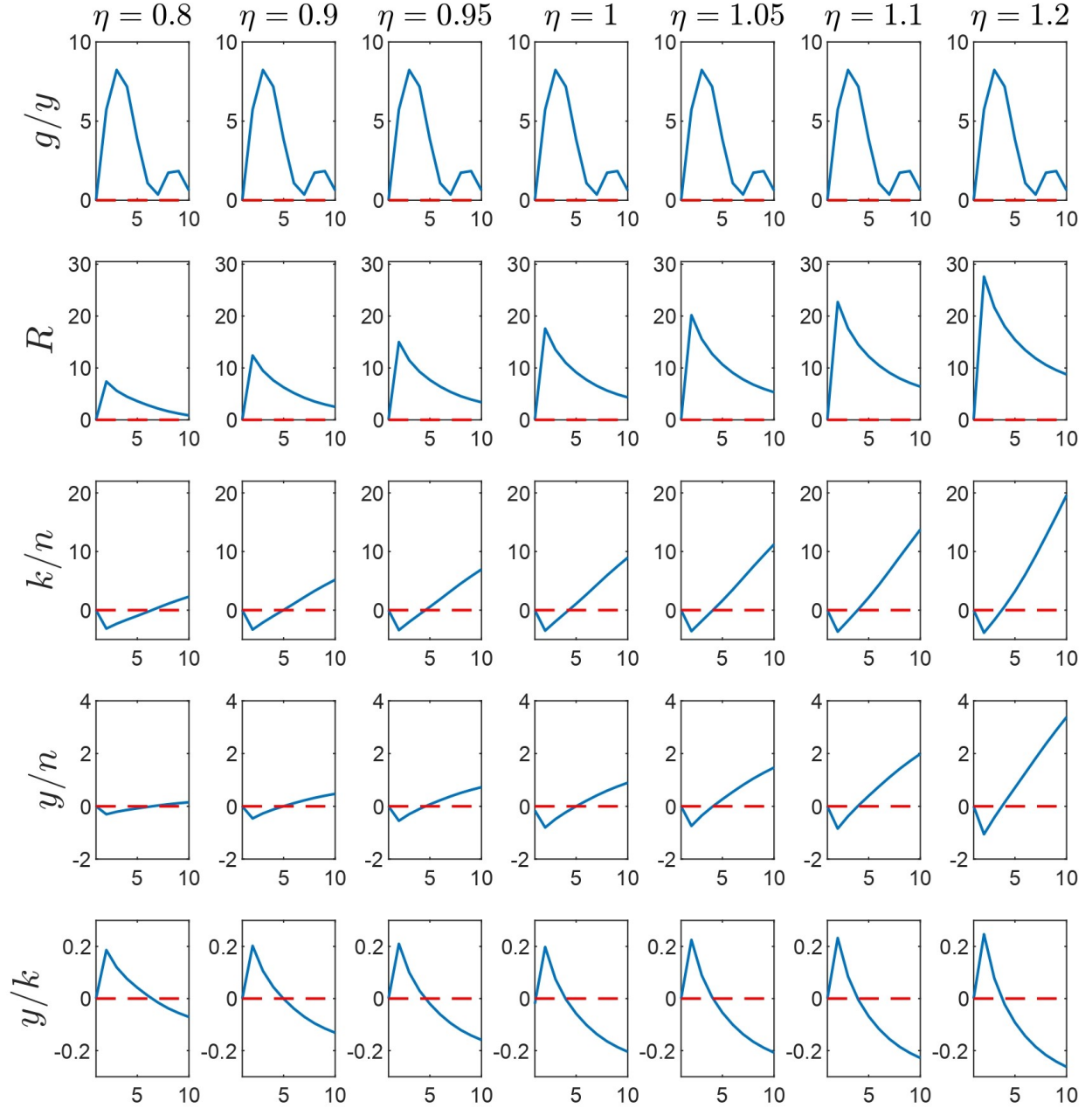


Figure 8: Impulso: Aumento del gasto público como porcentaje del PIB, como en los datos de Estados Unidos.

están dados por (véase el Apéndice 8.10):

$$revGDP_t = \tau^n (1 - \chi)^{1/\eta} \left(\frac{y_t}{n_t} \right)^{\frac{1}{\eta} - 1}$$

Por lo tanto, la dinámica de los ingresos tributarios como porcentaje del producto dependerá de la trayectoria de y_t/n_t y del valor de η . Como se indicó anteriormente, y_t/n_t disminuye inicialmente y luego aumenta. Esto implica que rev_t/y_t será (i) creciente si $\eta < 1$, (ii) decreciente si $\eta > 1$, y (iii) constante e igual a $\tau^n(1 - \chi)$ si $\eta = 1$. Cabe destacar que, aunque

y_t/n_t disminuye en el período del impacto, el ratio recaudación/PIB igualmente aumenta porque la tasa impositiva salta a un nuevo nivel constante debido al mayor valor presente descontado del gasto público.

En resumen, la respuesta de la tasa de interés ante el aumento del gasto público determina la dinámica del ratio PIB/trabajo. Esta, a su vez, combinada con el valor de la elasticidad de sustitución, determina la trayectoria óptima del ratio recaudación/PIB.

6 Conclusiones

Se llevó a cabo un estudio de eventos sobre episodios en la historia de Estados Unidos en los que el gasto público primario como porcentaje del PIB aumentó en más de un 50%. Los resultados sugieren que el ratio recaudación tributaria/PIB, si bien responde en menor proporción que el aumento del gasto, no lo hace de manera perfectamente constante; en cambio, sigue una trayectoria con forma de joroba. En consecuencia, la deuda no aumenta de forma permanente, sino que experimenta un incremento temporal seguido de una disminución. Estas observaciones se desvían de los resultados estándar en la literatura, comenzando con el trabajo precursor de Barro (1979) en un marco de equilibrio parcial, y seguido por otros estudios en equilibrio general con mercados completos, como los de Stokey y Lucas (1983) y Bohn (1990). El presente trabajo explora los mecanismos que pueden dar lugar a que los ingresos impositivos como porcentaje del PIB no se deban suavizar de manera perfecta.

El primer modelo analizado fue el modelo estocástico original de Barro, enmarcado en equilibrio general en una economía cerrada, lo que implica que la tasa de interés se determina endógenamente en lugar de ser fija. El hecho de que la tasa de interés aumente durante el episodio de mayor gasto público implica que, a diferencia de Barro (1979), no solo los impuestos presentan un costo marginal creciente, sino también la deuda. Como resultado, se vuelve óptimo que los impuestos aumenten abruptamente en el período del impulso y luego disminuyan gradualmente con el tiempo, convergiendo finalmente a un nivel superior al anterior al impacto. El resultado de Barro se obtiene únicamente en el caso específico en que la elasticidad de sustitución intertemporal es infinita, ya que una demanda completamente elástica por bonos impide que la tasa de interés varíe.

El segundo modelo considera una economía determinística de equilibrio general que incorpora trabajo y capital. Aunque las tasas impositivas óptimas se mantienen constantes, la trayectoria de la recaudación tributaria sobre el PBI no lo hace, salvo en el caso en que la elasticidad de sustitución (η) entre trabajo y capital sea igual a 1. Ante un aumento del gasto público, la tasa de interés se eleva, lo cual —a través de la condición de minimización de costos entre trabajo y capital— determina la dinámica del PBI por trabajador. Esta dinámica, combinada con el valor de la elasticidad de sustitución, determina la trayectoria óptima de los ingresos tributarios sobre el PBI: esta será creciente si $\eta < 1$, decreciente si $\eta > 1$, y constante si $\eta = 1$.

7 Referencias

- Aiyagari, S. R., Marcet, A., Sargent, T. J., & Seppälä, J. (2002). Optimal taxation without state-contingent debt. *Journal of Political Economy*, 110(6), 1220-1254.
- Bailey, M. J. (1956). The welfare cost of inflationary finance. *Journal of political Economy*, 64(2), 93-110.
- Barro, R. J. (1979). On the determination of the public debt. *Journal of political Economy*, 87(5, Part 1), 940-971.
- Bohn, H. (1990). Tax smoothing with financial instruments. *The American Economic Review*, 1217-1230.
- Chari, V. V., Christiano, L. J., & Kehoe, P. J. (1994). Optimal fiscal policy in a business cycle model. *Journal of political Economy*, 102(4), 617-652.
- Chari, V. V., & Kehoe, P. J. (1999). Optimal fiscal and monetary policy. *Handbook of macroeconomics*, 1, 1671-1745.
- Kingston, G. (1991). Should marginal tax rates be equalized through time?. *The Quarterly Journal of Economics*, 106(3), 911-924.
- Lucas Jr, R. E., & Stokey, N. L. (1983). Optimal fiscal and monetary policy in an economy without capital. *Journal of monetary Economics*, 12(1), 55-93.
- Phelps, E. S. (1973). Inflation in the theory of public finance. *The Swedish Journal of Economics*, 67-82.
- Werning, I. (2005). Tax smoothing with redistribution (No. 365). *Federal Reserve Bank of Minneapolis*.
- Werning, I. (2007). Optimal fiscal policy with redistribution. *The Quarterly Journal of Economics*, 122(3), 925-967.

8 Apéndice

8.1 Economía de Dotación: Optimización del Gobierno

El problema de optimización del gobierno está dado por:

$$\begin{aligned} \min_{\{\tau_t, d_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t \mathcal{D} \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) \\ \text{s.t.} \quad & d_{t+1} + \tau_t = g_t + d_t (1 + r_t) \end{aligned}$$

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[y_t \mathcal{D} \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) + \omega_t (g_t + d_t (1 + r_t) - d_{t+1} - \tau_t) \right] \right\}$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} [\tau_t] : \quad & \beta^t \left[y_t \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) \frac{1}{y_t} + \omega_t \cdot (-1) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) = \omega_t \\ [d_{t+1}] : \quad & \beta^t \left[\omega_t \cdot (-1) \right] + \mathbb{E}_t \left\{ \beta^{t+1} \left[\omega_{t+1} (1 + r_{t+1}) \right] \right\} = 0 \\ & \Rightarrow \quad \omega_t = \mathbb{E}_t \left\{ \beta (1 + r_{t+1}) \omega_{t+1} \right\} \\ [\omega_t] : \quad & d_{t+1} + \tau_t = g_t + d_t (1 + r_t) \\ [TVC. d] : \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \beta^T \omega_T d_{T+1} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Combinando $[\tau_t]$ con $[d_{t+1}]$ a través del multiplicador de Lagrange, las primeras dos condiciones de primer orden pueden ser condensadas en la siguiente expresión:

$$\mathcal{D}' \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) = \mathbb{E}_t \left\{ \beta (1 + r_{t+1}) \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_{t+1}}{y_{t+1}} \right) \right\}$$

Luego, el problema de optimización del gobierno está enteramente caracterizado por:

$$\begin{aligned} [SMCEE. 1] : \quad & \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_t}{y_t} \right) = \mathbb{E}_t \left\{ \beta (1 + r_{t+1}) \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_{t+1}}{y_{t+1}} \right) \right\} \\ [SMCEE. 2] : \quad & d_{t+1} + \tau_t = g_t + d_t (1 + r_t) \\ [SMCEE. 3] : \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \beta^T \mathcal{D}' \left(\frac{\tau_T}{y_T} \right) d_{T+1} \right\} = 0 \end{aligned}$$

8.2 Economía de Dotación: Optimización de los Hogares

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{s.t.} \quad & b_{t+1} + \tau_t + c_t = y_t + b_t(1 + r_t) \end{aligned}$$

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) + \phi_t (y_t + b_t(1 + r_t) - b_{t+1} - \tau_t - c_t) \right] \right\}$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} [c_t] : \quad & \beta^t \left[u'(c_t) + \phi_t \cdot (-1) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(c_t) = \phi_t \\ [b_{t+1}] : \quad & \beta^t \left[\phi_t \cdot (-1) \right] + \mathbb{E}_t \left\{ \beta^{t+1} \left[\phi_{t+1} (1 + r_{t+1}) \right] \right\} = 0 \\ & \Rightarrow \quad \phi_t = \mathbb{E}_t \left\{ \beta (1 + r_{t+1}) \phi_{t+1} \right\} \\ [\phi_t] : \quad & b_{t+1} + \tau_t + c_t = y_t + b_t (1 + r_t) \\ [TVC. b] : \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \beta^T \phi_T b_{T+1} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Combinando $[c_t]$ con $[b_{t+1}]$ a través del multiplicador de Lagrange, las primeras dos condiciones de primer orden pueden ser condensadas en la siguiente expresión:

$$u'(c_t) = \mathbb{E}_t \left\{ \beta (1 + r_{t+1}) u'(c_{t+1}) \right\}$$

Luego, el problema de optimización del hogar representativo está completamente caracterizado por:

$$\begin{aligned} [SMCEE. 4] : \quad & u'(c_t) = \mathbb{E}_t \left\{ \beta (1 + r_{t+1}) u'(c_{t+1}) \right\} \\ [SMCEE. 5] : \quad & b_{t+1} + \tau_t + c_t = y_t + b_t (1 + r_t) \\ [SMCEE. 6] : \quad & \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t \left\{ \beta^T u'(c_T) b_{T+1} \right\} = 0 \end{aligned}$$

8.3 Economía con Producción: Optimización de los Hogares

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}, d_{t+1}\}_{t=0}^T} \quad & \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, n_t) = \sum_{t=0}^T \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\
\text{s.t.} \quad & c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1+R_t} = w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t \\
& d_0, k_0 \text{ dados} \\
& d_{T+1} \geq 0 \quad (NPGC)
\end{aligned}$$

Lagrangiano:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \sum_{t=0}^T \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} + \gamma_t \left(w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t \right. \right. \\
\left. \left. - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - \frac{d_{t+1}}{1+R_t} \right) \right]
\end{aligned}$$

Condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
[c_t] : \quad & \beta^t \left[(1-\sigma) \frac{c_t^{1-\sigma-1}}{1-\sigma} + \gamma_t (-1) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad c_t^{-\sigma} = \gamma_t \\
[n_t^s] : \quad & \beta^t \left[-(1+\phi) \frac{n_t^{1+\phi-1}}{1+\phi} + \gamma_t ((1-\tau_t^n)w_t) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad n_t^\phi = \gamma_t (1-\tau_t^n)w_t \\
[k_{t+1}^s] : \quad & \beta^t \gamma_t (-1) + \beta^{t+1} \left[\gamma_{t+1} \cdot (r_{t+1} - \tau_{t+1}^k r_{t+1} + (1-\delta)) \right] = 0 \\
& \Rightarrow \quad \gamma_t = \beta \left[(1-\tau_{t+1}^k) r_{t+1} + (1-\delta) \right] \gamma_{t+1} \\
[d_{t+1}] : \quad & \beta^t \gamma_t \left(-\frac{1}{1+R_t} \right) + \beta^{t+1} [\gamma_{t+1} \cdot (1)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_t = \beta(1+R_t) \gamma_{t+1} \\
[\gamma_t] : \quad & c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1+R_t} = w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t \\
[TVC.k] : \quad & k_{T+1} = 0 \\
[TVC.d] : \quad & d_{T+1} = 0 \\
[Condiciones iniciales] : \quad & k_0, d_0 \text{ dados}
\end{aligned}$$

Combinando las condiciones de primer orden:

$$[SMCEP. 1]: \quad n_t^\phi c_t^\sigma = (1 - \tau_t^n)w_t \quad (\text{H.H.1})$$

$$[SMCEP. 2]: \quad R_t = (1 - \tau_{t+1}^k)r_{t+1} - \delta \quad (\text{H.H.2})$$

$$[SMCEP. 3]: \quad \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^\sigma = \beta(1 + R_t) \quad (\text{H.H.3})$$

$$[SMCEP. 4]: \quad c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} = w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t \quad (\text{H.H.4})$$

$$[SMCEP. 5]: \quad k_{T+1} = 0 \quad (\text{H.H.5})$$

$$[SMCEP. 6]: \quad d_{T+1} = 0 \quad (\text{H.H.6})$$

8.4 Economía con Producción: Restricción Presupuestaria Intertemporal de los Hogares

La restricción presupuestaria secuencial del hogar representativo es

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} = w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t + \pi_t$$

Dado que la tecnología exhibe retornos constantes a escala, los beneficios son nulos:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} &= w_t n_t + r_t k_t - \tau_t^n w_t n_t - \tau_t^k r_t k_t + d_t \\ c_t + k_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} &= (1 - \tau_t^n)w_t n_t + [(1 - \tau_t^k)r_t + (1 - \delta)]k_t + d_t \end{aligned}$$

De [SMCEP. 2] sabemos que $1 + R_t = (1 - \tau_{t+1}^k)r_{t+1} + 1 - \delta$. Luego, para todo $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} &= (1 - \tau_t^n)w_t n_t + (1 + R_{t-1})k_t + d_t \\ c_t - (1 - \tau_t^n)w_t n_t + k_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} &= (1 + R_{t-1})k_t + d_t \\ \frac{c_t - (1 - \tau_t^n)w_t n_t}{1 + R_{t-1}} + \frac{1}{1 + R_{t-1}} \left(k_{t+1} + \frac{d_{t+1}}{1 + R_t} \right) &= k_t + \frac{d_t}{(1 + R_{t-1})} \end{aligned}$$

Iterando hacia adelante, empezando en $t = 1$:

$$\begin{aligned} k_1 + \frac{d_1}{(1 + R_0)} &= \frac{c_1 - (1 - \tau_1^n)w_1 n_1}{1 + R_0} + \frac{1}{1 + R_0} \left(k_2 + \frac{d_2}{1 + R_1} \right) \\ &= \frac{c_1 - (1 - \tau_1^n)w_1 n_1}{1 + R_0} + \frac{1}{1 + R_0} \underbrace{\left(\frac{c_2 - (1 - \tau_2^n)w_2 n_2}{1 + R_1} + \frac{1}{1 + R_1} \left(k_3 + \frac{d_3}{1 + R_2} \right) \right)}_{k_2 + \frac{d_2}{1 + R_1}} \\ &= \frac{c_1 - (1 - \tau_1^n)w_1 n_1}{1 + R_0} + \frac{c_2 - (1 - \tau_2^n)w_2 n_2}{(1 + R_0)(1 + R_1)} + \frac{1}{(1 + R_0)(1 + R_1)} \left(k_3 + \frac{d_3}{1 + R_2} \right) \end{aligned}$$

Siguiendo iterando hasta $t = T$:

$$\begin{aligned} k_1 + \frac{d_1}{(1+R_0)} &= \frac{c_1 - (1 - \tau_1^n)w_1n_1}{1+R_0} + \frac{c_2 - (1 - \tau_2^n)w_2n_2}{(1+R_0)(1+R_1)} \\ &+ \dots + \frac{c_T - (1 - \tau_T^n)w_Tn_T}{(1+R_0)(1+R_1)\dots(1+R_{T-1})} \\ &+ \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1)\dots(1+R_{T-1})} \left(k_{T+1} + \frac{d_{T+1}}{1+R_T} \right) \end{aligned}$$

Recuérdese que

$$q_t \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0 \\ \frac{1}{\prod_{i=0}^{t-1} (1+R_i)} & \text{if } t \in \{1, 2, \dots\} \end{cases}$$

Luego:

$$k_1 + \frac{d_1}{(1+R_0)} = \sum_{t=1}^T q_t [c_t - (1 - \tau_t^n)w_tn_t] + q_T \left(k_{T+1} + \frac{d_{T+1}}{1+R_T} \right)$$

Si evaluamos la restricción secuencial en $t = 0$: $c_0 + k_1 + \frac{d_1}{1+R_0} = (1 - \tau_0^n)w_0n_0 + [(1 - \tau_0^k)r_0 + (1 - \delta)]k_0 + d_0 \Rightarrow k_1 + \frac{d_1}{1+R_0} = (1 - \tau_0^n)w_0n_0 + [(1 - \tau_0^k)r_0 + (1 - \delta)]k_0 + d_0 - c_0$. Entonces:

$$\underbrace{(1 - \tau_0^n)w_0n_0 + [(1 - \tau_0^k)r_0 + (1 - \delta)]k_0 + d_0 - c_0}_{k_1 + \frac{d_1}{(1+R_0)}} = \sum_{t=1}^T q_t [c_t - (1 - \tau_t^n)w_tn_t] + q_T \left(k_{T+1} + \frac{d_{T+1}}{1+R_T} \right)$$

$$[(1 - \tau_0^k)r_0 + (1 - \delta)]k_0 + d_0 = c_0 - (1 - \tau_0^n)w_0n_0 + \sum_{t=1}^T q_t [c_t - (1 - \tau_t^n)w_tn_t] + q_T \left(k_{T+1} + \frac{d_{T+1}}{1+R_T} \right)$$

Como $q_0 = 1$:

$$[(1 - \tau_0^k)r_0 + (1 - \delta)]k_0 + d_0 = q_0 [c_0 - (1 - \tau_0^n)w_0n_0] + \sum_{t=1}^T q_t [c_t - (1 - \tau_t^n)w_tn_t] + q_T \left(k_{T+1} + \frac{d_{T+1}}{1+R_T} \right)$$

$$[(1 - \tau_0^k)r_0 + (1 - \delta)]k_0 + d_0 = \sum_{t=0}^T q_t [c_t - (1 - \tau_t^n)w_tn_t] + q_T \left(k_{T+1} + \frac{d_{T+1}}{1+R_T} \right)$$

De [SMCEP. 5] y [SMCEP. 6], $d_{T+1} = 0$ y $k_{T+1} = 0$:

$$[(1 - \tau_0^k)r_0 + (1 - \delta)]k_0 + d_0 = \sum_{t=0}^T q_t [c_t - (1 - \tau_t^n)w_tn_t]$$

$$[(1 - \tau_0^k)r_0 + (1 - \delta)]k_0 + d_0 + \sum_{t=0}^T q_t (1 - \tau_t^n)w_tn_t = \sum_{t=0}^T q_t c_t$$

8.5 Economía con Producción: q_t y utilidades marginales

De (H.H.3):

$$\frac{u_{c,t}}{u_{c,t+1}} = \beta(1 + R_t)$$

$$(1 + R_t) = \frac{u_{c,t}}{\beta u_{c,t+1}}$$

Luego:

$$(1 + R_0)(1 + R_1) \dots (1 + R_{t-1}) = \frac{u_{c,0}}{\beta u_{c,1}} \frac{u_{c,1}}{\beta u_{c,2}} \dots \frac{u_{c,t-1}}{\beta u_{c,t}}$$

$$= \frac{u_{c,0}}{\beta^t u_{c,t}}$$

$$\frac{1}{(1 + R_0)(1 + R_1) \dots (1 + R_{t-1})} = \frac{\beta^t u_{c,t}}{u_{c,0}}$$

$$q_t = \frac{\beta^t u_{c,t}}{u_{c,0}}$$

8.6 Economía con Producción: Restricción de Implementabilidad

Restricción presupuestaria intertemporal de los hogares (IBC^h):

$$\sum_{t=0}^T q_t c_t = d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) r_0 + (1 - \delta) \right] k_0 + \sum_{t=0}^T q_t (1 - \tau_t^n) w_t n_t$$

De (H.H.1) sabemos que

$$(1 - \tau_t^n) w_t = n_t^\phi c_t^\sigma$$

y de (F.2) para $t = 0$:

$$r_0 = F_{k0}$$

Además (ver Apéndice 8.5):

$$q_t = \beta^t \frac{u_{c,t}}{u_{c,0}}$$

Luego:

$$\sum_{t=0}^T \beta^t \underbrace{\frac{u_{c,t}}{u_{c,0}}}_{q_t} c_t = d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) \underbrace{F_{k0}}_{r_0} + (1 - \delta) \right] k_0 + \sum_{t=0}^T \beta^t \underbrace{\frac{u_{c,t}}{u_{c,0}}}_{q_t} \underbrace{n_t^\phi c_t^\sigma}_{(1 - \tau_t^n) w_t} n_t$$

$$\sum_{t=0}^T \beta^t \underbrace{c_t^{-\sigma}}_{u_{c,t}} c_t = \underbrace{c_0^{-\sigma}}_{u_{c,0}} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right) + \sum_{t=0}^T \beta^t \underbrace{c_t^{-\sigma}}_{u_{c,t}} n_t^\phi c_t^\sigma n_t$$

$$\sum_{t=0}^T \beta^t c_t^{1-\sigma} = c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right) + \sum_{t=0}^T \beta^t n_t^{1+\phi}$$

$$\sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] = \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)}$$

que es la restricción de implementabilidad (IC).

8.7 Economía con Producción: Problema de Ramsey

$$\begin{aligned}
& \max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, n_t) = \sum_{t=0}^T \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] = \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)} \quad (IC) \\
& \quad \underbrace{F(k_t, n_t)}_{y_t} = c_t + g_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t \quad (RC) \\
& \quad k_0, d_0, \tau_0^k \text{ dados}
\end{aligned}$$

Lagrangiano:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_{t=0}^T \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\
& + \lambda \left[\sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] - \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)} \right] \\
& + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mu_t \left[F(k_t, n_t) - c_t - g_t - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t \right]
\end{aligned}$$

Condiciones de primer orden:

$$[c_t]: \quad (1 - \sigma) \frac{c_t^{-\sigma}}{1 - \sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_t^{-\sigma} + \mu_t \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_t^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_t^{-\sigma} = \mu_t \quad \forall t \geq 1$$

$$[n_t]: \quad -(1 + \phi) \frac{n_t^\phi}{1 + \phi} + \lambda \left[-(1 + \phi)n_t^\phi \right] + \mu_t F_{nt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_t^\phi + \lambda(1 + \phi)n_t^\phi = \mu_t F_{nt} \quad \forall t \geq 1$$

$$[k_{t+1}]: \quad \mu_t \left[-1 \right] + \beta \mu_{t+1} \left[F_{k,t+1} + (1 - \delta) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_t = \beta \mu_{t+1} \left[F_{k,t+1} + (1 - \delta) \right] \quad \forall t \geq 0$$

$$[c_0]: \quad (1 - \sigma) \frac{c_0^{-\sigma}}{1 - \sigma} + \lambda \left[(1 - \sigma)c_0^{-\sigma} - (-\sigma)c_0^{-\sigma-1} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right) \right] + \mu_0 \cdot (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_0^{-\sigma} + \lambda \left[(1 - \sigma)c_0^{-\sigma} + \sigma c_0^{-\sigma-1} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right) \right] = \mu_0$$

$$[n_0]: \quad -(1 + \phi) \frac{n_0^\phi}{1 + \phi} + \lambda \left[-(1 + \phi)n_0^\phi - c_0^{-\sigma} \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0,n0} \right] k_0 \right] + \mu_0 F_{n0} = 0$$

$$[\lambda]: \quad \sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] = \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)} \quad (IC)$$

$$[\mu_t]: \quad \underbrace{F(k_t, n_t)}_{y_t} = c_t + g_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t \quad (RC)$$

Combinando $[c_t]$ con $[n_t]$ a través de μ_t , y $[c_t]$ con $[k_{t+1}]$ a través de μ_t y μ_{t+1} :

$$[c_t, n_t]_{RP}: \quad n_t^\phi + \lambda(1 + \phi)n_t^\phi = \left[c_t^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_t^{-\sigma} \right] F_{nt} \quad \forall t \geq 1$$

$$[c_t, k_{t+1}]_{RP}: \quad c_t^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_t^{-\sigma} = \beta \left(c_{t+1}^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_{t+1}^{-\sigma} \right) \left[F_{k,t+1} + (1 - \delta) \right] \quad \forall t \geq 0$$

$$[c_0]_{RP}: \quad c_0^{-\sigma} + \lambda \left[(1 - \sigma)c_0^{-\sigma} + \sigma c_0^{-\sigma-1} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right) \right] = \mu_0$$

$$[n_0]_{RP}: \quad -n_0^\phi + \lambda \left[-(1 + \phi)n_0^\phi - c_0^{-\sigma} \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0,n0} \right] k_0 \right] + \mu_0 F_{n0} = 0$$

$$[\lambda]_{RP}: \quad \sum_{t=0}^T \beta^t \left[c_t^{1-\sigma} - n_t^{1+\phi} \right] = \underbrace{c_0^{-\sigma} \left(d_0 + \left[(1 - \tau_0^k) F_{k0} + (1 - \delta) \right] k_0 \right)}_{\equiv A(c_0, n_0, \tau_0^k)} \quad (IC)$$

$$[\mu_t]_{RP}: \quad \underbrace{F(k_t, n_t)}_{y_t} = c_t + g_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t \quad (RC)$$

8.8 Economía con Producción: Impuesto al Capital Nulo

De $[c_t, k_{t+1}]_{RP}$:

$$\begin{aligned} c_t^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_t^{-\sigma} &= \beta \left(c_{t+1}^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_{t+1}^{-\sigma} \right) \left[F_{k,t+1} + (1 - \delta) \right] \quad \forall t \geq 1 \\ c_t^{-\sigma} \left(1 + \lambda(1 - \sigma) \right) &= \beta c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + \lambda(1 - \sigma) \right) \left[F_{k,t+1} + (1 - \delta) \right] \\ \frac{c_t^{-\sigma}}{\beta c_{t+1}^{-\sigma}} &= F_{k,t+1} + (1 - \delta) \end{aligned}$$

De (H.H.3) sabemos que $1 + R_t = \frac{c_t^{-\sigma}}{\beta c_{t+1}^{-\sigma}}$ y de (F.2) que $r_t = F_{k,t}$. Luego:

$$\begin{aligned} 1 + R_t &= r_{t+1} + (1 - \delta) \\ R_t &= r_{t+1} - \delta \end{aligned}$$

Reemplazando esto dentro de (H.H.2):

$$\begin{aligned} R_t &= (1 - \tau_{t+1}^k) r_{t+1} - \delta \\ \underbrace{r_{t+1} - \delta}_{R_t} &= (1 - \tau_{t+1}^k) r_{t+1} - \delta \end{aligned}$$

Luego:

$$\tau_{t+1}^k = 0 \quad \forall t$$

8.9 Economía con Producción: Impuesto al Trabajo Constante

De $[c_t, n_t]_{RP}$:

$$\begin{aligned} n_t^\phi + \lambda(1 + \phi)n_t^\phi &= \left[c_t^{-\sigma} + \lambda(1 - \sigma)c_t^{-\sigma} \right] F_{n,t} \\ n_t^\phi [1 + \lambda(1 + \phi)] &= c_t^{-\sigma} [1 + \lambda(1 - \sigma)] F_{n,t} \\ n_t^\phi c_t^\sigma [1 + \lambda(1 + \phi)] &= [1 + \lambda(1 - \sigma)] F_{n,t} \end{aligned}$$

De (H.H.1) sabemos que $n_t^\phi c_t^\sigma = (1 - \tau_t^n)w_t$, y de (F.1), $w_t = F_{n,t}$:

$$\begin{aligned} \underbrace{n_t^\phi c_t^\sigma}_{=(1-\tau_t^n)w_t} [1 + \lambda(1 + \phi)] &= [1 + \lambda(1 - \sigma)] \underbrace{F_{n,t}}_{=w_t} \\ (1 - \tau_t^n)w_t [1 + \lambda(1 + \phi)] &= [1 + \lambda(1 - \sigma)] w_t \\ (1 - \tau_t^n) [1 + \lambda(1 + \phi)] &= [1 + \lambda(1 - \sigma)] \\ [1 + \lambda(1 + \phi)] - \tau_t^n [1 + \lambda(1 + \phi)] &= [1 + \lambda(1 - \sigma)] \\ 1 + \lambda(1 + \phi) - 1 - \lambda(1 - \sigma) &= \tau_t^n [1 + \lambda(1 + \phi)] \\ \lambda(1 + \phi) - \lambda(1 - \sigma) &= \tau_t^n [1 + \lambda(1 + \phi)] \\ \lambda[(1 + \phi) - (1 - \sigma)] &= \tau_t^n [1 + \lambda(1 + \phi)] \\ \lambda(\phi + \sigma) &= \tau_t^n [1 + \lambda(1 + \phi)] \end{aligned}$$

Luego:

$$\tau_t^n = \frac{\lambda(\phi + \sigma)}{1 + \lambda(1 + \phi)} \quad \forall t \geq 1$$

8.10 Economía con Producción: Ratio Recaudación/PIB

Función de producción:

$$y = F(k, n) = \left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}}$$

Producto marginal del trabajo:

$$\begin{aligned} PMgN &= \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left[\left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}} \right] \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta}} \left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}-1} \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}-1} \\ &= \left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}-1} (1 - \chi)^{1/\eta} n^{-\frac{1}{\eta}} \\ &= \underbrace{\left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}}}_{=y} \left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{-1} (1 - \chi)^{1/\eta} n^{-\frac{1}{\eta}} \\ &\stackrel{(*)}{=} y \underbrace{\left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{-1}}_{=y^{\frac{1}{\eta}-1}} (1 - \chi)^{1/\eta} n^{-\frac{1}{\eta}} = y y^{\frac{1}{\eta}-1} (1 - \chi)^{1/\eta} n^{-\frac{1}{\eta}} \\ &= y^{\frac{1}{\eta}} (1 - \chi)^{1/\eta} n^{-\frac{1}{\eta}} \\ \Rightarrow PMgN &= \left[(1 - \chi) \frac{y}{n} \right]^{1/\eta} \end{aligned}$$

donde en el paso (*) utilicé que $y = \left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\eta}}}$

$$\Rightarrow y^{1-\frac{1}{\eta}} = \left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right] \Rightarrow y^{\frac{1}{\eta}-1} = \left[\chi^{1/\eta} k^{1-\frac{1}{\eta}} + (1 - \chi)^{1/\eta} n^{1-\frac{1}{\eta}} \right]^{-1}$$

En cuanto al ratio recaudación/PIB:

$$\begin{aligned} revGDP &= \frac{rev}{y} = \frac{\tau^n w_t n_t + \tau^k r_t k_t}{y_t} = \frac{\tau^n w_t n_t + 0 \cdot r_t k_t}{y_t} = \frac{\tau^n w n}{y} \\ &= \frac{\tau^n \overbrace{\left[(1 - \chi) \frac{y}{n} \right]^{1/\eta} n}^{=PMgN=w}}{y} = \tau^n (1 - \chi)^{1/\eta} \left(\frac{y}{n} \right)^{1/\eta} \left(\frac{y}{n} \right)^{-1} \\ revGDP &= \tau^n (1 - \chi)^{1/\eta} \left(\frac{y}{n} \right)^{\frac{1}{\eta}-1} \end{aligned}$$