

**Departamento de Economía**

**Tipo de documento:** Tesis de maestría



*Maestría en Economía*

# Una comparación de la prima de riesgo de acciones y bonos utilizando modelos afines

**Autoría:** Mendoza Greco, Maximiliano

**Fecha:** 2025

## ¿Cómo citar este trabajo?

*Mendoza Greco, M. (2025). "Una comparación de la prima de riesgo de acciones y bonos utilizando modelos afines". [Tesis de maestría. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella*

<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13584>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la **Universidad Torcuato Di Tella** bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Internacional  
**Dirección:** <https://repositorio.utdt.edu>



**UNIVERSIDAD  
TORCUATO DI TELLA**

**UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA**

**MAESTRÍA EN ECONOMÍA**

**Una comparación de la prima de riesgo de acciones y bonos  
utilizando modelos afines**

Alumno: Maximiliano Mendoza Greco

Legajo: 22R1812

Tutor: Martin Sola

Fecha: 11/07/2025

# Una comparación de la prima de riesgo de acciones y bonos utilizando modelos afines\*

Maximiliano Mendoza Greco  
Universidad Torcuato di Tella

## Abstract

En esta tesis desarrollo y estimo un modelo afín para el precio de las acciones con el objetivo de analizar la evolución de la prima de riesgo, definida como el retorno esperado de mantener una acción durante un período en exceso de la tasa real de interés. El modelo se caracteriza por su simplicidad y flexibilidad dado que permite incorporar como factores de riesgo a variables que parecen afectar al precio de las acciones, tales como la tasa de desempleo. Con los factores elegidos obtengo estimaciones que se ajustan bien a los datos observados, lo cual sugiere que el modelo provee una buena caracterización de la evolución de la prima de riesgo. Al comparar los resultados con la prima de riesgo estimada para los bonos mediante modelos afines tradicionales, observo que las primas de ambos activos exhiben movimientos similares durante periodos de crecimiento económico, tendencia que se revierte durante trimestres previos a las recesiones. Asimismo, utilizo un método novedoso basado en la construcción de escenarios contrafácticos para evaluar la contribución de cada factor a la prima, y encuentro que la tasa de desempleo sigue de forma cercana la evolución de la prima de riesgo. Por último, extendiendo el modelo para permitir que la evolución de los factores dependa del estado de la economía (por ejemplo durante booms o recesiones), lo cual permite mejorar la estimación del precio de las acciones y, por consiguiente, de la prima de riesgo.

---

\*Quiero agradecer a mi supervisor Martin Sola por su valiosa orientación, paciencia y apoyo a lo largo de todo este trabajo, y a Constantino Hevia por sus sugerencias.

# 1. Introducción

La evidencia muestra que el precio de las acciones estadounidenses difiere sistemáticamente de las predicciones realizadas por los modelos de valor presente. Dentro de la literatura se han propuesto varias explicaciones para esta diferencia entre precios y valores fundamentales, como por ejemplo factores de descuento variables en el tiempo, inversores no racionales, y modas (Shiller (1989)). Si bien estas explicaciones tienen méritos, todavía no son capaces de explicar plenamente las discrepancias. Asimismo, existe una extensa literatura sobre valoración de activos en equilibrio general originada en el trabajo de Lucas (1978), quien intenta modelar y alinear las predicciones del modelo con la prima de riesgo observada. Diversos investigadores han intentado expandir este modelo para acomodar hechos estilizados no tomados en cuenta. Por ejemplo, Kreps y Porteus (1978) relajan el supuesto de aditividad temporal con el fin de separar la aversión al riesgo de la sustitución intertemporal, mientras que Epstein y Zin (1989) desarrollan una versión de las preferencias de Kreps-Porteus con una elasticidad de sustitución constante. El enfoque de la utilidad estocástica diferencial recursiva (Epstein y Zin (1989); Epstein y Zin (1991); Weil (1989); Weil (1990); Duffie y Epstein (1992)) ayuda a resolver el rompecabezas de la tasa libre de riesgo al generar menores tasas que se acercan más a las observadas.

Este trabajo contribuye a esta literatura desarrollando un modelo afín para el precio de las acciones con el objetivo de analizar la evolución de la prima de riesgo, definida como el retorno esperado de mantener una acción durante un período en exceso de la tasa real de interés. Este modelo en forma reducida, al igual que los utilizados tradicionalmente para estudiar el precio de los bonos (Piazzesi (2010); Christensen et al. (2011)), se caracteriza por su simplicidad y flexibilidad: en particular, permite introducir como factores de riesgo a diferentes variables que impactan en el precio de las acciones y en el descuento de dividendos futuros. En este trabajo considero al crecimiento de los dividendos, a la tasa real de interés, a un índice de sentimiento del consumidor, y a la tasa de desempleo. La

selección de esos factores es intencional, dado que son variables conocidas por influir en el movimiento del precio de las acciones. Por ejemplo, numerosos estudios (e.g., Otoo (1999), Chen (2011), Shen et al. (2017), Psaradakis et al. (2024)) demuestran que el sentimiento del consumidor afecta de forma significativa la evolución del precio de las acciones. Su inclusión como factor de riesgo en este trabajo ayuda a capturar el hecho de que el descuento puede diferir en buenos y malos tiempos. Gracias a la inclusión de estos factores se obtienen estimaciones que ajustan bien a los datos observados, y se pueden formular explicaciones más precisas de los cambios y los determinantes de la prima de riesgo de las acciones a lo largo del tiempo.

El modelo provee una caracterización robusta de la evolución de la prima de riesgo. Es necesario destacar que el objetivo de la tesis no es identificar un kernel que pueda cotizar simultáneamente todos los activos de la economía, sino establecer un kernel que pueda cotizar de forma efectiva las acciones<sup>1</sup>. Una ventaja de este enfoque es que se pueden comparar los resultados obtenidos contra la evolución de la prima de riesgo de los bonos construída con un modelo que utilice un kernel diferente. Realizando esa comparación encuentro que, pese a estar basadas en diferentes factores de riesgo, las primas de acciones y bonos exhiben trayectorias similares en periodos de crecimiento económico<sup>2</sup>.

Otra contribución del trabajo reside en la utilización de un novedoso método para medir la contribución de cada factor a la prima de riesgo. Para ello se construye una serie de economías contrafácticas donde se mantiene constante el valor de todos los factores a excepción de uno. Esto permite evaluar el impacto de dicho factor en eventos económicos notables, como por ejemplo el período de Volcker. Como resultado de este ejercicio encuentro que la evolución de la tasa de desempleo sigue de cerca la evolución de la prima de riesgo de las acciones.

---

<sup>1</sup>Existen investigaciones previas con modelos afines que cotizan tanto acciones como bonos utilizando el mismo conjunto de factores de riesgo (Bekaert y Grenadier (1999), d'Addona y Kind (2006), and Werner y Lemke (2009)). A diferencia de esos trabajos, este análisis se realiza sin considerar la relevancia de la "spanning hypothesis".

<sup>2</sup>De forma implícita estoy diciendo que el kernel utilizado en el modelo de bonos se asemeja al utilizado en el modelo del precio de las acciones.

Por último, extendiendo el modelo para contemplar la posibilidad de que el proceso que siguen los factores de riesgo sea determinado por el estado de la economía. De esta manera obtengo un modelo que se ajusta mejor a los datos y que, en consecuencia, provee una caracterización más fiable de la prima de riesgo de las acciones.

## 2. Un modelo afín para el precio de las acciones

En esta sección desarrollo un modelo libre de arbitraje para el precio de las acciones. Siguiendo la literatura de valuación de activos, especifico un proceso para la tasa de interés de corto plazo y para el factor de descuento estocástico<sup>3</sup>. Todos los detalles algebraicos no incluidos en esta sección se encuentran en los Apéndices.

### 2.1. El modelo libre de arbitraje

El tiempo es discreto y denotado por  $t = 0, 1, 2, \dots$ , donde cada periodo representa un trimestre. Sean  $P_t$  y  $D_t$  el precio de las acciones y los dividendos en términos reales en el periodo  $t$  respectivamente. En un modelo libre de arbitraje el precio de las acciones satisface la siguiente ecuación:

$$P_t = E_t [M_{t+1} (P_{t+1} + D_{t+1})], \quad (1)$$

donde  $M_{t+1}$  es el factor de descuento estocástico que cotiza flujos futuros de dinero. Como es tradicional en la literatura, impongo la siguiente estructura para  $M_{t+1}$ :

$$M_{t+1} = e^{-r_t - \frac{1}{2} \Lambda_t' \Lambda_t - \Lambda_t' \eta_{t+1}}, \quad (2)$$

donde  $r_t$  es la tasa real de interés en el periodo  $t$ , y  $\Lambda_t$  es una matriz de dimensión  $(p \times 1)$  usualmente conocida como el precio de mercado del riesgo. Esta matriz representa la

---

<sup>3</sup>La tasa de interés de corto plazo se utiliza como un factor de riesgo observado.

compensación que los inversores requieren en el momento  $t$  para enfrentar shocks futuros ( $\eta_{t+1}$ ). Estos precios del riesgo son una función de un vector de dimensión  $(p \times 1)$  de factores de riesgo observados y denotados por  $X_t$ :

$$\Lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t, \quad (3)$$

donde  $\lambda_0$  es un vector de  $(p \times 1)$ , y  $\lambda_1$  es una matriz de  $(p \times p)$ . El valor de los factores de riesgo en el período  $t + 1$  sigue el siguiente proceso:

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Gamma \eta_{t+1}, \quad (4)$$

donde  $\eta_{t+1} \sim N(0, I_{(p \times p)})$  y  $\Gamma$  es una matriz triangular inferior. Dado que solo contemplo variables observadas dentro de  $X_t$ , resulta natural elegir al crecimiento de los dividendos y a la tasa real de interés como factores de riesgo. Por este motivo puedo expresar esas variables a través de vectores de selección  $e_1$  y  $e_2$ :

$$g_t = e_1' X_t,$$

$$r_t = e_2' X_t,$$

donde  $g_t$  es la tasa de crecimiento de los dividendos.

Dado que la solución a la ecuación (1) es no lineal, utilizó una aproximación de Taylor para resolverla, la cual se encuentra detallada en el apéndice A. De esa manera obtengo que el logaritmo del rendimiento por dividendos, representado como  $k_t = \log(D_t/P_t)$ , toma una forma específica:

$$k_t = \gamma_0 + \gamma_1' X_t, \quad (5)$$

para un escalar  $\gamma_0$  y un vector  $p$  dimensional  $\gamma_1'$ :

$$\gamma_1 = \left( I - \kappa \Phi^{Q'} \right)^{-1} \left( e_2 - \Phi^{Q'} e_1 \right), \quad (6)$$

y

$$\gamma_0 = - \frac{\omega + (e_1' - \kappa \gamma_1') \mu^Q + \frac{1}{2} (e_1' - \kappa \gamma_1') \Gamma \Gamma' (e_1' - \kappa \gamma_1)}{1 - \kappa}, \quad (7)$$

donde  $\omega$  y  $\kappa$  son constantes que dependen del promedio histórico del logaritmo natural del rendimiento por dividendos ( $\mu_\kappa$ ):

$$\kappa = \frac{e^{-\mu_\kappa}}{1 + e^{-\mu_\kappa}}, \quad \omega = \log(1 + \exp(-\mu_\kappa)) + \kappa \mu_\kappa,$$

y donde  $\mu^Q$  y  $\Phi^Q$  son el vector de constantes y la matriz de coeficientes respectivamente bajo la medida neutral al riesgo. Estos son funciones de los coeficientes que determinan el precio del riesgo:

$$\mu^Q = \mu - \Gamma \lambda_0, \quad \Phi^Q = \Phi - \Gamma \lambda_1'.$$

## 2.2. Retornos esperados y prima de riesgo

Si bien existen muchas definiciones posibles para la prima de riesgo, en este trabajo voy a considerar los retornos esperados en exceso de la tasa real de interés. Esta es la diferencia entre el retorno esperado de mantener una acción durante un período y la tasa libre de riesgo de un período. En particular, muestro en el [apéndice B](#) que el logaritmo del retorno excedente de comprar una acción en el periodo  $t$  y venderla en el  $t + 1$  está dado por:

$$E_t [\log(P_{t+1} + D_{t+1})] - p_t = (e_1' - \kappa \gamma_1') \Gamma \lambda_0 - \frac{1}{2} (e_1' - \kappa \gamma_1') \Gamma \Gamma' (e_1' - \kappa \gamma_1) + [e_2' + (e_1' - \kappa \gamma_1') \Gamma \lambda_1'] X_t,$$

donde  $p_t = \ln(P_t)$ . Entonces, el retorno esperado de mantener una acción un período en exceso de la tasa real de interés de corto plazo  $r_t$  en el periodo  $t$  está dado por:

$$E_t [\log(P_{t+1} + D_{t+1})] - p_t - r_t = -\frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa\gamma_1) + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \Lambda_t. \quad (8)$$

Esta expresión permite notar que la prima de riesgo se mueve con el precio de mercado del riesgo  $\Lambda_t$  con un coeficiente de  $(e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma$ .

### 2.3. Dos estados de la naturaleza

Las variables consideradas en este trabajo suelen comportarse de forma distinta durante booms y recesiones. Por ese motivo, en esta sección extiendo el modelo para poder incorporar la posibilidad de que el comportamiento dinámico de los factores de riesgo dependa del estado de la economía. Para limitar el número de parámetros a estimar, voy a suponer que los únicos elementos que cambian de acuerdo con el estado son el vector de constantes y la matriz de varianzas y covarianzas:

$$X_{t+1} = \mu_{S_{t+1}} + \Phi X_t + \Gamma_{S_{t+1}} \eta_{t+1},$$

donde  $\{S_t \in \{1, 2\}\}$  son variables aleatorias independientes de  $\eta_{t+1}$  que determinan el estado de la economía en el período  $t$ . Se asume que estas variables forman una cadena de Markov temporalmente homogénea, cuyas probabilidades de transición están dadas por:

$$P_{ij} = P(S_{t+1} = j | S_t = i) \quad \text{con } i, j \in \{1, 2\}, \text{ y } 0 < P_{ij} < 1.$$

Para poder obtener una solución cerrada voy a seguir la convención adoptada por Dai et al. (2007), según la cual el valor de los factores de riesgo en  $t + 1$  depende del estado en

$t^4$ :

$$f(X_{t+1}|X_t, S_t = i, S_{t+1} = j) = f(X_{t+1}|X_t, S_t = i).$$

Esto quiere decir que, condicional en  $S_t = i$ , los factores de riesgo siguen el proceso:

$$X_{t+1} = \mu_i + \Phi X_t + \Gamma_i \eta_{t+1}.$$

Como consecuencia, el precio de mercado del riesgo y el factor de descuento estocástico también van a depender del estado de la economía<sup>5</sup>:

$$m_{t+1} = -r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_{t,S_t} \Lambda_{t,S_t} - \Lambda'_{t,S_t} \eta_{t+1},$$
$$\Lambda_{t,S_t} = \lambda_{0,S_t} + \lambda'_{1,S_t} X_t.$$

Para poder comparar apropiadamente los resultados, voy a considerar los mismos factores de riesgo que en el caso del modelo con un único estado de la economía. Esto quiere decir que también puedo expresar al crecimiento de los dividendos y a la tasa libre de interés a través de vectores indicadores:

$$g_t = e'_1 X_t,$$

$$r_t = e'_2 X_t.$$

Utilizando la misma aproximación de Taylor que en el modelo base, se obtiene que el logaritmo del rendimiento por dividendos es una función afín de los factores de riesgo:

$$k_t = \gamma_{0,S_t} + \gamma'_1 X_t,$$

---

<sup>4</sup>En tiempo continuo, esta formulación es idéntica a la formulación tradicional donde el valor en  $t + 1$  depende del estado en  $t + 1$ .

<sup>5</sup>En la literatura es común agregar un elemento adicional en la ecuación del factor de descuento estocástico ( $\Gamma(s_t, s_{t+1})$ ) para cotizar el riesgo de cambiar de un estado al otro. Sin embargo, no incluyo este término porque el parámetro no se encontraría identificado en el modelo ya que, a diferencia de la literatura de bonos, la ecuación del precio de las acciones es una sola.

donde, dados los supuestos de identificación, únicamente la constante depende del estado de la economía. La solución, detallada en el apéndice C, arroja que los coeficientes son iguales a:

$$\gamma_1 = (I - \kappa\Phi^{Q'})^{-1}(e_2 - \Phi^{Q'}e_1)$$

$$\gamma_{0,S_t} = -\frac{\omega + (e_1' - \kappa\gamma_1') \mu_{S_t}^Q + \frac{1}{2} (e_1' - \kappa\gamma_1') \Gamma_{S_t} \Gamma_{S_t}' (e_1 - \kappa\gamma_1)}{1 - \kappa}$$

donde las constantes  $\omega$  y  $\kappa$  son las mismas funciones del promedio histórico del logaritmo natural del rendimiento por dividendos ya mencionadas, y  $\mu_{S_t}^Q$  es el vector de constantes de la medida neutral al riesgo que depende del estado de la economía:

$$\mu_{S_t}^Q = \mu_{S_t} - \Gamma_{S_t} \lambda_{0,S_t}$$

### 3. Método de estimación

En esta sección voy a discutir los detalles de la estimación del modelo.

#### 3.1. Modelo Afín

Estimo este modelo por máxima verosimilitud. Las variables de estado siguen el proceso (4), y la ecuación de rendimiento por dividendos consiste en la forma afín de (5) junto con los coeficientes que satisfacen las ecuaciones (6) y (7), y aumentada con los errores de medición  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$  independientes de  $\eta_{t+1}$  y con una constante  $\sigma$  como el desvío estándar de estos errores:

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Gamma \eta_{t+1}, \quad (9)$$

$$k_t = \gamma_0 + \gamma_1' X_t + \sigma \varepsilon_t. \quad (10)$$

Para realizar la estimación específico 4 factores: el crecimiento de los dividendos reales, la tasa real de interés, el índice del sentimiento del consumidor y la tasa de desempleo. Es decir que el vector  $X_t$  se define como:

$$X_t = [g_t, r_t, z_t, l_t]'$$

Parametrizo el modelo y evalúo la función de log-verosimilitud en términos de los parámetros de las medidas físicas y neutrales al riesgo, es decir de  $\mu$ ,  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $\mu^Q$  y  $\Phi^Q$ . Luego recupero el valor de  $\lambda$  usando las ecuaciones que relacionan las medidas neutrales al riesgo y físicas:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \Gamma^{-1} (\mu - \mu^Q), \\ \lambda_1 &= \Gamma^{-1} (\Phi - \Phi^Q).\end{aligned}$$

Los coeficientes que componen  $\mu^Q$  y  $\Phi^Q$  son contemplados en la función de log-verosimilitud a través de las ecuaciones (6) y (7). Pero tomando en cuenta que  $\gamma_1$  es un vector de 4 elementos y que  $\gamma_0$  es un escalar, no es posible identificar todos los parámetros de  $\mu^Q$  y de  $\Phi^Q$ . Por ese motivo resulta pertinente imponer una serie de restricciones de identificación. Con respecto a  $\mu^Q$  voy a suponer que todos los elementos del vector son iguales, es decir que  $\mu^Q = [\mu_1^Q, \mu_1^Q, \mu_1^Q, \mu_1^Q]'$ . Para la matriz  $\Phi^Q$  voy a imponer la siguiente estructura:

$$\Phi^Q = \begin{bmatrix} \phi_1^Q & 0 & \phi_1^Q & 0 \\ \phi_3^Q & \phi_2^Q & 0 & \phi_4^Q \\ 0 & 0 & \phi_2^Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_2^Q \end{bmatrix}.$$

De esta manera todos los parámetros de las medidas neutrales al riesgo se encuentran exactamente identificados.

### 3.2. Modelo Afín con 2 estados de la naturaleza

Estimo el modelo con 2 estados de la naturaleza ( $S_t \in \{1, 2\}$ ), y donde las constantes y la matriz de varianzas y covarianzas del proceso seguido por los factores de riesgo cambia de acuerdo con el estado. Siguiendo la convención de Dai, Singleton et al. (2007) estimo de forma simultánea las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= \mu_{S_t} + \Phi X_t + \Gamma_{S_t} \eta_{t+1}, \\ k_t &= \gamma_{0,S_t} + \gamma_1' X_t + \sigma_{S_t} \varepsilon_t. \end{aligned}$$

donde  $\eta_{t+1} \sim N(0, I_{(p \times p)})$  es un vector de shocks aleatorios sin correlación serial, y  $\Gamma_{S_t}$  es una matriz triangular inferior que depende del estado de la naturaleza. Asimismo,  $\mu_{S_t}$  es una vector de medias que también difiere de acuerdo con el estado de la economía. Las variables aleatorias  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$  son errores de medición independientes de  $\eta_t$ , y  $\sigma_{S_t}$  es una constante que representa el desvío estándar de esos errores y que dependen del estado de la economía. Dada esta estructura, los parámetros que definen el precio de mercado del riesgo también cambian de acuerdo con el estado. Esto se puede notar en las ecuaciones que relacionan las medidas neutrales al riesgo y físicas:

$$\begin{aligned} \lambda_{0,S_t} &= \Gamma_i^{-1} \left( \mu_{S_t} - \mu_{S_t}^Q \right), \\ \lambda_{1,S_t} &= \Gamma_i^{-1} \left( \Phi - \Phi^Q \right). \end{aligned}$$

Al igual que en el caso con un solo estado, es necesario imponer restricciones para poder identificar los parámetros de las medidas neutrales al riesgo. Para poder realizar una comparación válida entre los resultados de los dos modelos estimados impongo los

mismos supuestos sobre las matrices  $\mu_{s_t}^Q$  y  $\Phi^Q$ :

$$\mu_1^Q = \begin{bmatrix} \mu_1^Q \\ \mu_1^Q \\ \mu_1^Q \\ \mu_1^Q \end{bmatrix}, \quad \mu_2^Q = \begin{bmatrix} \mu_2^Q \\ \mu_2^Q \\ \mu_2^Q \\ \mu_2^Q \end{bmatrix}, \quad \Phi^Q = \begin{bmatrix} \phi_1^Q & 0 & \phi_1^Q & 0 \\ \phi_3^Q & \phi_2^Q & 0 & \phi_4^Q \\ 0 & 0 & \phi_2^Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_2^Q \end{bmatrix}.$$

## 4. Datos

Uso datos trimestrales del periodo 1970-2019. Obtengo los datos del precio de las acciones estadounidenses, dividendos, índice de precios del consumidor, y tasa de interés nominal de 3 meses de la base de datos construida por Robert Shiller. Tomo el último valor de la serie mensual disponible como el valor trimestral para el precio de las acciones y para el índice de precios del consumidor. Uso datos en la tasa de interés nominal de 3 meses y del índice de precios del consumidor para derivar la tasa de interés real libre de riesgo y computar las tasas de interés ex-post.

La tasa de desempleo está ajustada por estacionalidad y es tomada del Infra-Annual Labor Statistics de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). El sentimiento del consumidor es tomado de un índice confeccionado por la Universidad de Michigan<sup>6</sup>.

Finalmente, cuando comparo las primas de riesgo de las acciones y de los bonos utilizo rendimientos de bonos del tesoro americano de una duración de 3 meses, 2 años y 5 años<sup>7</sup>. Utilizo datos de bonos cupón cero de Estados Unidos del período 1962-2019 compilados por Le y Singleton (2013) y actualizados por Anh Le.

---

<sup>6</sup>Estos datos pueden encontrarse en <https://data-explorer.oecd.org/> y <https://www.sca.isr.umich.edu/> respectivamente

<sup>7</sup>Uso estas variables para construir el nivel, la pendiente y la curvatura de la curva de rendimientos.

## 5. Resultados empíricos

La tabla 1 muestra los coeficientes estimados del modelo afín del precio de las acciones, junto con el desvío estándar estimado para cada coeficiente entre paréntesis. Se incluyen los valores estimados de los parámetros bajo las medidas física y neutral al riesgo, así como los valores implícitos de la matriz del precio de mercado del riesgo ( $\Lambda$ ) y de los coeficientes  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . El modelo está exactamente identificado debido a que hay una relación de uno a uno entre los elementos de la matriz de  $\Phi^Q$  y los parámetros de  $\gamma_1$ . Es relevante destacar que todos los autovalores de  $\Phi$  y de  $\Phi^Q$  se encuentran dentro del círculo unitario, lo cual sugiere que la prima de riesgo es una serie estacionaria.

Tabla 1: Modelo Afín para el precio de las acciones

$\mu$	$\Phi$				$\Gamma$				
$\begin{bmatrix} -1,958 \\ (1,499) \\ 0,034 \\ (0,417) \\ 0,254 \\ (0,467) \\ 2,136 \\ (0,201) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,597 & -0,521 & 0,228 & 0,11 \\ (0,05) & (0,169) & (0,119) & (0,097) \\ -0,067 & 0,786 & 0,023 & -0,002 \\ (0,021) & (0,054) & (0,035) & (0,031) \\ 0,014 & -0,027 & 0,936 & 0,05 \\ (0,025) & (0,064) & (0,042) & (0,032) \\ -0,039 & 0,085 & -0,179 & 0,893 \\ (0,014) & (0,027) & (0,02) & (0,015) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,382 & 0 & 0 & 0 \\ (0,078) & & & \\ 0,245 & 0,389 & 0 & 0 \\ (0,039) & (0,019) & & \\ -0,005 & 0,022 & -0,519 & 0 \\ (0,043) & (0,041) & (0,03) & \\ -0,03 & -0,041 & 0,087 & -0,24 \\ (0,02) & (0,019) & (0,021) & (0,012) \end{bmatrix}$							
$\mu^Q$	$\Phi^Q$				$\sigma$				
$\begin{bmatrix} 0,210 \\ (0,083) \\ 0,210 \\ (0,083) \\ 0,210 \\ (0,083) \\ 0,210 \\ (0,083) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,209 & 0 & 0,209 & 0 \\ (0,143) & & (0,143) & \\ -0,02 & 0,991 & 0 & 0,008 \\ (0,044) & (0,004) & & (0,003) \\ 0 & 0 & 0,991 & 0 \\ & & (0,004) & \\ 0 & 0 & 0 & 0,991 \\ & & & (0,004) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,262 \\ (0,018) \end{bmatrix}$							
$\Gamma\lambda_0$	$\Gamma\lambda_1$				$\gamma_0$	$\gamma_1$			
$\begin{bmatrix} -2,169 \\ -0,177 \\ 0,044 \\ 1,926 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,388 & -0,521 & 0,019 & 0,110 \\ -0,047 & -0,205 & 0,023 & -0,010 \\ 0,014 & -0,027 & -0,055 & 0,050 \\ -0,039 & 0,085 & -0,179 & -0,098 \end{bmatrix}$	$-3,266$	$\begin{bmatrix} -0,00983 \\ 0,2934 \\ -0,1201 \\ 0,06319 \end{bmatrix}$						
Log-Likelihood: 306,731	AIC: -541,462	BIC: -422,722							

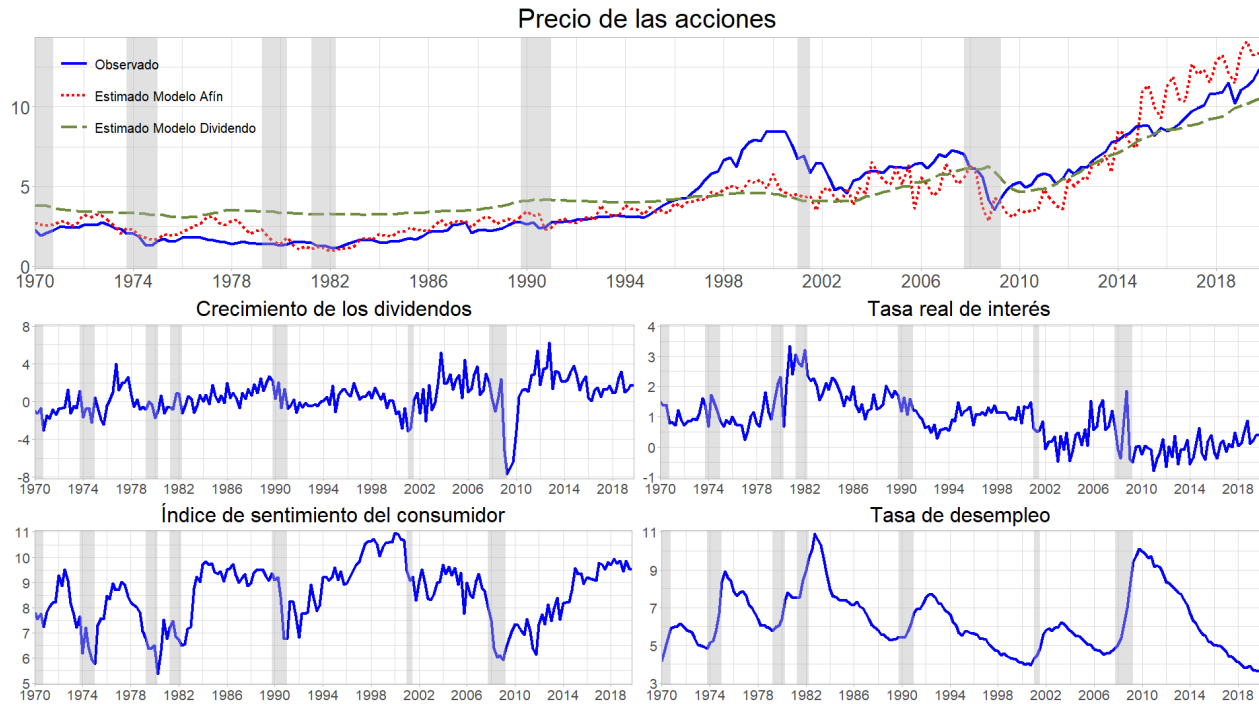
La figura 1 presenta tanto el valor observado como el estimado para el precio de las acciones, así como los factores de riesgo utilizados. Los años de recesión de la economía americana se encuentran sombreados en gris<sup>8</sup>. Es importante destacar que numerosas

<sup>8</sup>Las fechas fueron tomadas del índice de indicador de recesión construido por James Hamilton. La metodología para obtener estas fechas se encuentra detallada en <https://econbrowser.com/recession-index>

consideraciones guían la elección de los factores de riesgo. En primer lugar, al incorporar la tasa real de interés se relaja el supuesto implícito en muchos modelos en forma reducida en los cuales el descuento de flujos futuros es constante. En segundo lugar, la inclusión de variables que están fuertemente correlacionadas con el ciclo económico, como lo son el índice de sentimiento del consumidor y la tasa de desempleo, permite capturar diferencias en la valuación del riesgo entre períodos de expansión y recesión económica. Por último, al incluir el crecimiento de los dividendos se contempla el efecto que tiene el desempeño general de las compañías estadounidenses sobre el valor de las acciones.

A simple vista, el precio de las acciones estimado por el modelo parece ajustarse bien a los datos observados. Para corroborar esta afirmación de forma objetiva, estimo el precio de las acciones mediante un modelo estándar donde el descuento es constante, y depende únicamente del proceso seguido por el crecimiento de los dividendos. Comparando los resultados obtenidos con los del modelo afín, se corrobora que el ajuste es sustancialmente mejor en este último caso.

Figura 1: Evolución del precio de las acciones: actuales y estimadas en un modelo Afín



Sin embargo, se pueden identificar 3 momentos en los que las estimaciones difieren significativamente de los precios observados: los años 1996-2001, 2009-2012 y 2015-2019. El primero se caracteriza por el auge y la crisis de una serie de empresas tecnológicas estadounidenses relacionadas con el surgimiento de los servicios de internet, tales como Yahoo!. En este sentido, se puede considerar que el modelo no es capaz de cotizar adecuadamente la confianza depositada en las nuevas tecnologías de comunicación. El segundo período está relacionado con la salida de la crisis financiera de 2008, cuando la recuperación del precio de las acciones fue más rápida que el retorno a niveles previos a la crisis de la tasa de desempleo y del índice de confianza de los consumidores. Por último, si bien la etapa 2015-2019 se caracteriza por un crecimiento sostenido del PBI estadounidense acompañado de bajas tasas reales de interés y una caída del desempleo, el precio de las acciones no creció al mismo ritmo que el estimado por el modelo. Esta divergencia sugiere que durante esos años el proceso dinámico seguido por los factores y por el rendimiento por dividendos

fue diferente. Esta idea es explorada en el apartado siguiente.

### 5.1. Extensión con 2 estados de la economía

La literatura ofrece amplia evidencia sobre la relación entre los factores de riesgo aquí considerados y el estado de la economía (por ejemplo, Garcia y Perron (1996) estudian el caso de la tasa real de interés). Incorporar esta relación en el modelo resulta relevante por dos motivos: por un lado, permite obtener una caracterización más adecuada del proceso dinámico seguido por los factores. Por otro lado, el estado de la naturaleza también afecta la valuación del riesgo por parte de los agentes: dejando todo lo demás constante, los agentes demandan una compensación más grande por afrontar riesgos durante una recesión económica. Dado que esto repercute directamente en la prima de riesgo, resulta razonable esperar que esta extensión del modelo se ajuste mejor a los datos y, por consiguiente, provea una estimación más precisa de la evolución de la prima de riesgo.

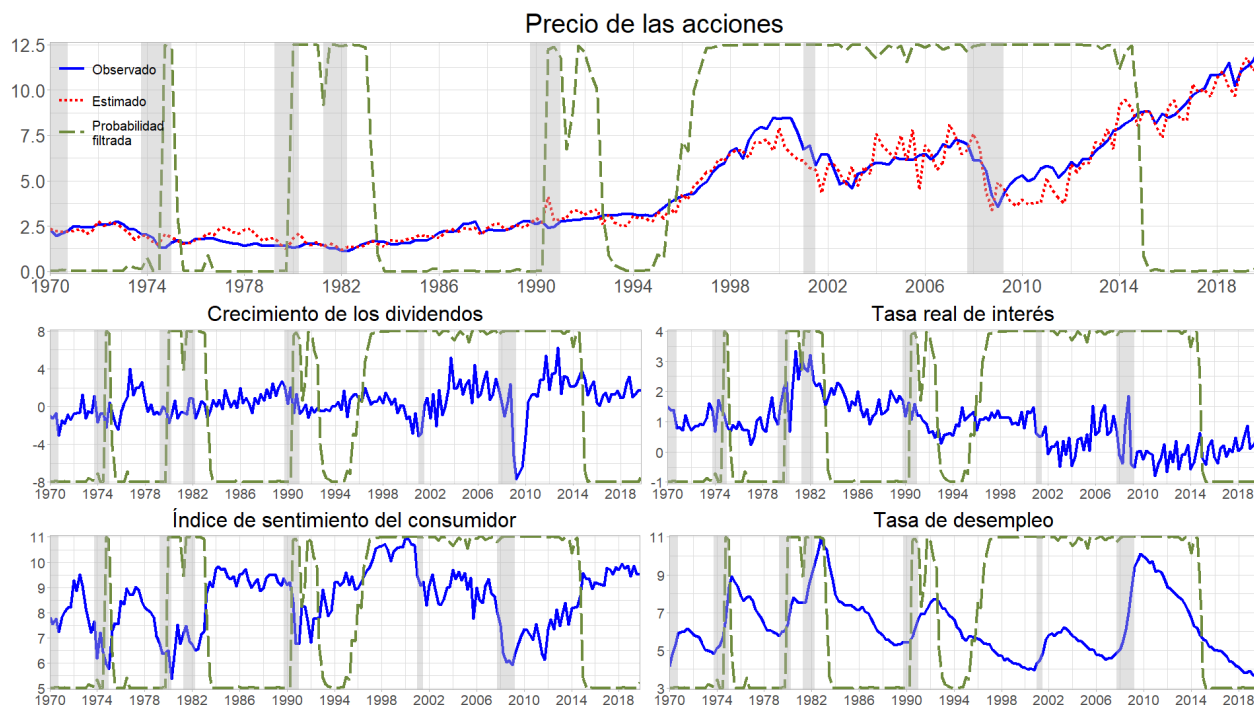
La tabla 2 presenta los resultados del modelo con 2 estados de la naturaleza, incluyendo los coeficientes estimados y, entre paréntesis, sus respectivos errores estándar. Al igual que en el caso del modelo con un solo régimen, todos los autovalores de la matriz  $\Phi^Q$  se encuentran dentro del círculo unitario, sugiriendo la estacionariedad de la prima de riesgo. A partir de la matriz de transición se puede corroborar que los dos regímenes son persistentes, con un tiempo esperado de permanencia en el estado 1 de 27,03 trimestres, y en el estado 2 de 21,73 trimestres. Comparando las matrices  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  se puede corroborar la existencia de un estado de baja volatilidad de los factores de riesgo en contraposición a otro de alta volatilidad. Asimismo, el estado de baja volatilidad se caracteriza, en términos relativos, por un menor crecimiento de los dividendos, mayores tasas de interés real, elevados valores del índice de confianza del consumidor, y menores tasas de desempleo.

Tabla 2: Modelo afín para el precio de las acciones con 2 regímenes

$\mu_1$	$\mu_2$	$\Phi$				$\Gamma_1$			
$\begin{bmatrix} -2,391 \\ (1,464) \\ -0,041 \\ (0,422) \\ 0,457 \\ (0,479) \\ 1,834 \\ (0,211) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2,272 \\ (1,423) \\ -0,103 \\ (0,408) \\ 0,397 \\ (0,478) \\ 2,006 \\ (0,201) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,538 & -0,436 & 0,285 & 0,085 \\ (0,066) & (0,187) & (0,129) & (0,088) \\ -0,08 & 0,795 & 0,029 & 0,006 \\ (0,025) & (0,056) & (0,04) & (0,03) \\ 0,01 & -0,06 & 0,912 & 0,06 \\ (0,031) & (0,08) & (0,045) & (0,035) \\ -0,031 & 0,107 & -0,155 & 0,892 \\ (0,015) & (0,029) & (0,021) & (0,015) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,007 & 0 & 0 & 0 \\ (0,09) & & & \\ 0,166 & -0,291 & 0 & 0 \\ (0,043) & (0,032) & & \\ 0,101 & 0,042 & 0,424 & 0 \\ (0,053) & (0,051) & (0,037) & \\ -0,019 & 0,027 & -0,048 & 0,197 \\ (0,024) & (0,033) & (0,025) & (0,019) \end{bmatrix}$						
$\mu_1^Q$	$\mu_2^Q$	$\Phi^Q$				$\Gamma_2$			
$\begin{bmatrix} 0,268 \\ (0,078) \\ 0,268 \\ (0,078) \\ 0,268 \\ (0,078) \\ 0,268 \\ (0,078) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,243 \\ (0,072) \\ 0,243 \\ (0,072) \\ 0,243 \\ (0,072) \\ 0,243 \\ (0,072) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,589 & 0 & 0,589 & 0 \\ (0,561) & & (0,561) & \\ 0,025 & 0,985 & 0 & 0,014 \\ (0,037) & (0,004) & & (0,003) \\ 0 & 0 & 0,985 & 0 \\ & & (0,004) & \\ 0 & 0 & 0 & 0,985 \\ & & & (0,004) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,687 & 0 & 0 & 0 \\ (0,175) & & & \\ 0,307 & 0,465 & 0 & 0 \\ (0,074) & (0,035) & & \\ -0,071 & 0,066 & 0,585 & 0 \\ (0,083) & (0,08) & (0,062) & \\ -0,042 & -0,038 & -0,119 & 0,254 \\ (0,037) & (0,033) & (0,045) & (0,017) \end{bmatrix}$						
$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\gamma_{0,1}$	$\gamma_{0,2}$	$\gamma_1 (\times 100)$	Matriz de transición				
$\begin{bmatrix} 0,150 \\ (0,011) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,177 \\ (0,019) \end{bmatrix}$	-2,984	-3,409	$\begin{bmatrix} 0,058 \\ 24,807 \\ -13,795 \\ 8,169 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,963 & 0,046 \\ (0,033) & \\ 0,037 & 0,954 \\ & (0,038) \end{bmatrix}$				
Log-Likelihood: 419,040		AIC: -730,342		BIC: -552,233					

La figura 2 muestra el valor estimado para el precio de las acciones junto con las probabilidades filtradas del segundo estado. Si bien resulta evidente que el segundo estado está asociado a las recesiones, no resulta igual de sencillo asociar ese régimen a la volatilidad de los factores como se mencionó anteriormente. Con ese objetivo también se incluye en la figura la evolución de los factores de riesgo, lo cual permite asociar de forma más directa al primer estado con años de caída sostenida en la tasa de desempleo, de elevada confianza de los consumidores y de baja volatilidad en general. Por ejemplo, durante el período 1996-2015 el desvío estándar del crecimiento de los dividendos fue del 2,57 %, mientras que en el periodo 1970-1995 fue solo del 1,21 %.

Figura 2: Evolución del precio de las acciones: actuales y estimadas en un modelo Afín con 2 estados

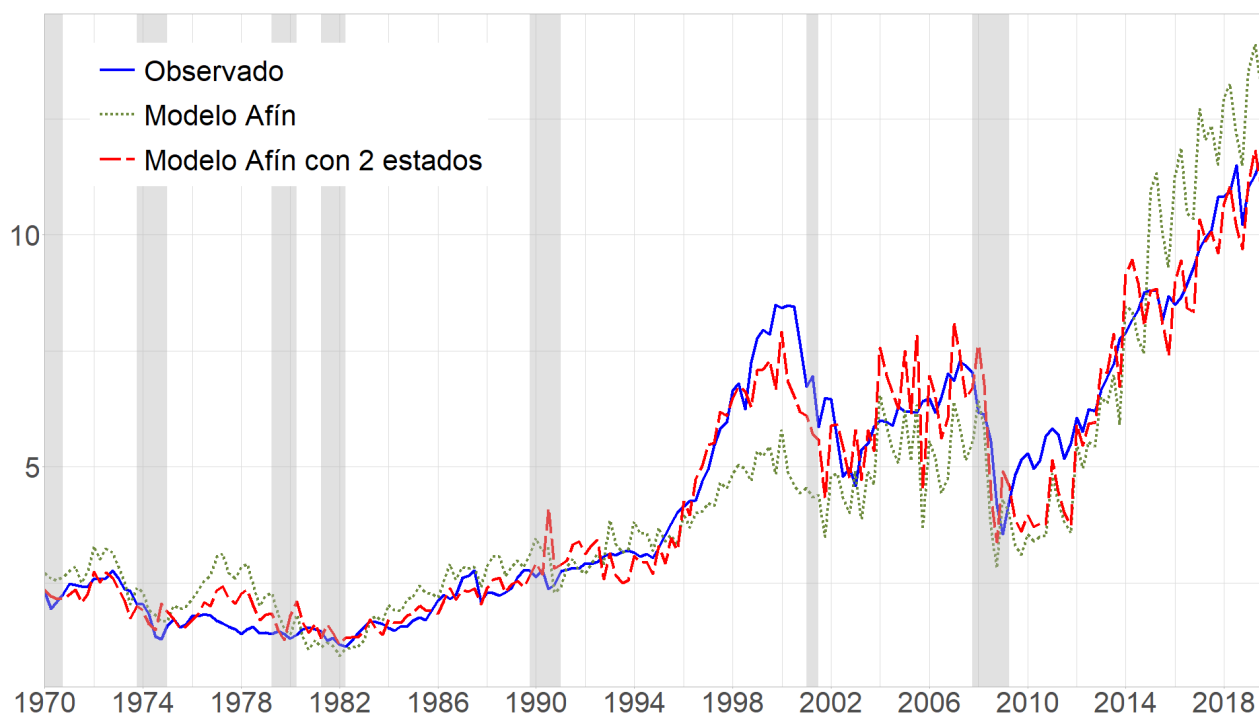


Considero diferentes métodos para comparar esta extensión con el modelo base. El primero se apoya en el trabajo de Psaradakis et al. (2009), quienes encuentran evidencia que justifica el uso de los criterio de información para seleccionar de manera fiable modelos no lineales. En este caso, comparando los valores del AIC y del BIC se concluye que el modelo con 2 estados es el preferido.

El segundo método consiste en contrastar las estimaciones obtenidas. Con este fin, la figura 3 muestra una comparación de los valores observados del precio de las acciones junto con los estimados por el modelo afín con uno y dos estados. A lo largo de todo el período bajo análisis el modelo con 2 regímenes se ajusta mejor a los datos, siendo la estimación sustancialmente mejor bajo dos períodos en particular: entre el tercer trimestre de 1996 y el último trimestre del 2001; y entre el primer trimestre de 2015 y el último de 2019. Como se mencionó previamente, durante estos años -asociados, respectivamente, con la expansión de las empresas de internet y con crecimiento sostenido de la economía americana- el ajuste

del modelo base resulta insuficiente. El mejor desempeño de la extensión puede explicarse porque, al contemplar dos estados de la naturaleza, el modelo es capaz de incorporar los valores máximos del índice de confianza de los consumidores observados hacia fines de siglo para cotizar adecuadamente el precio de las acciones estadounidenses. Asimismo, la estimación de que, en los años más recientes del período analizado, la economía presenta un comportamiento distinto —asociado a un estado de baja volatilidad— permite obtener estimaciones del precio de las acciones muy cercanas a los valores observados. Esto refuerza la idea de que incorporar cambios de régimen en el comportamiento dinámico de los factores mejora significativamente el desempeño del modelo.

Figura 3: Evolución del precio de las acciones: comparación de la estimación obtenida con uno y dos estados de la naturaleza



## 6. Análisis de la evolución de la prima de riesgo

En esta sección realizo un análisis detallado de la estimación de la prima de riesgo obtenida. A diferencia de lo que ocurre con el precio de las acciones, la prima de riesgo ex-ante no puede compararse directamente con los datos observados. Por este motivo es necesario validar la estimación antes de interpretar sus implicancias. Un primer método para realizar esa validación consiste en notar que dicha prima es una construcción dependiente del modelo utilizado: su fiabilidad está determinada por la capacidad del modelo para reproducir adecuadamente los datos observados. Como se ha visto en la sección anterior, los resultados obtenidos están respaldados por la evidencia empírica. Esto sugiere que la estimación de la prima ex-ante es razonablemente confiable.

Tomando en cuenta que este enfoque no ha sido previamente utilizado para las acciones, resulta pertinente proporcionar una validación externa adicional. Para ello comparo los resultados obtenidos con la prima de riesgo de los bonos derivada de uno de los modelos afines ampliamente utilizados en la práctica. Dado que ambos activos se ven influenciados por el desempeño general de la economía estadounidense, una trayectoria similar de ambas primas implicaría un respaldo adicional al modelo, sumado al ya mencionado ajuste adecuado a los datos observados. Con este objetivo estimo un modelo estándar afín de 3 factores observados para el precio de los bonos<sup>9</sup>. Esta comparación también es valiosa porque me permite evaluar potenciales similitudes y diferencias entre el movimiento de la prima de riesgo de los bonos y de las acciones.

La figura 4 muestra el resultado de esta comparación en el período bajo estudio tomando en cuenta los bonos a 2 y a 5 años. En líneas generales, la trayectoria de ambas primas es similar, lo cual refuerza la validez de la estimación obtenida para las acciones. Un análisis más detallado revela 2 períodos marcados: antes de 2005, la prima de riesgo tanto de las acciones como de los bonos sigue un patrón comparable; desde el 2005 en adelante la

---

<sup>9</sup>Los detalles de la estimación de este modelo se encuentran en el [apéndice D](#)

prima de riesgo de las acciones es relativamente más volátil.

En esa primera etapa, aunque la trayectoria para ambos activos es parecida, es posible identificar una diferencia relevante en el comportamiento previo a las recesiones económicas. Esos momentos se asocian con un incremento simultáneo de todas las tasas de interés. Por definición, esto repercute negativamente en la prima de riesgo de los bonos<sup>10,11</sup>. Este patrón se verifica en los meses previos a la crisis del petróleo de 1973, durante el período de aumento de tasas de interés bajo la presidencia de Volcker en la Reserva Federal de Estados Unidos, y antes de la crisis de principios de los '90. En esos trimestres la prima de riesgo de las acciones no solo no disminuyó, sino que por el contrario aumentó. Esto puede reflejar un cambio en el comportamiento de los inversores previo a las recesiones, valorando más activos libres de riesgo como los bonos, y demandando un retorno mayor por activos para mantener activos más riesgosos como las acciones. Este patrón se invirtió en los trimestres previos a la crisis de 2001, cuando la prima de las acciones subió mientras que la de los bonos aumentó. Esto se puede asociar a las características particulares de esa crisis y su relación con el precio de las acciones de ciertas compañías tecnológicas estadounidenses.

Para poder caracterizar lo ocurrido desde 2005 en adelante es necesario tomar en cuenta la política monetaria seguida por la Reserva Federal de Estados Unidos durante esos años: la tasa de interés de referencia se mantuvo en 0.25 % desde diciembre de 2008 hasta diciembre de 2015, alcanzando en la práctica el límite inferior conocido como “zero lower bound”. Esta situación permite explicar la baja volatilidad de las primas de riesgo de los bonos durante este periodo, y dificulta cualquier comparación con lo ocurrido en el mercado accionario. Una posible explicación para la elevada volatilidad de la prima de riesgo de las acciones es el aumento en la participación en el mercado financiero, facilitado

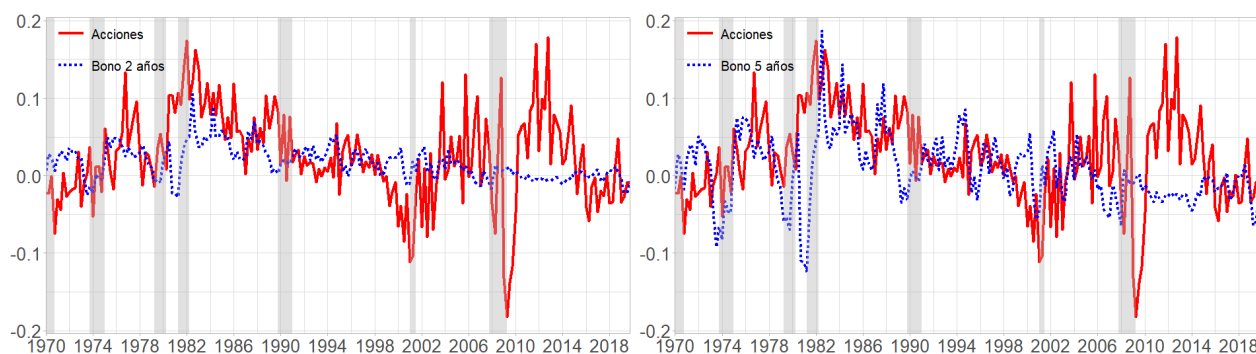
---

<sup>10</sup>La misma se define como la diferencia entre el retorno esperado y la tasa real de interés de corto plazo. Si la tasa real de interés de corto plazo sube, la prima baja.

<sup>11</sup>Este resultado apoya el poder predictivo de la pendiente de la curva de rendimientos (la diferencia entre las tasas de interés de largo y corto plazo), lo cual ha sido documentado en numerosos estudios (por ejemplo, Estrella y Hardouvelis (1991) y Rudebusch y Williams (2009)).

por el desarrollo de internet y las tasas cercanas a 0% de los bonos. Este fenómeno no necesariamente es específico de las acciones: por ejemplo, Hamilton y Wu (2014) utilizan un modelo afín para analizar el precio de los futuros de petróleo, y también observan un patrón diferente en las primas de riesgo para estos activos después de 2005. Los autores atribuyen el cambio al aumento en la participación en los mercados de futuros de petróleo por parte de los inversores. Por último, la volatilidad también se puede explicar a través del impacto generado por la crisis financiera global de 2008, el cual generó una drástica caída en el precio de las acciones.

Figura 4: Prima de riesgo de las acciones y los bonos



## 6.1. Contribución de los factores a la prima de riesgo

Habiendo establecido la relevancia empírica de los cuatro factores de riesgo del modelo base, en esta sección analizo cómo estas variables influyen la evolución de la prima de riesgo. Si bien es importante comprender la contribución específica de cada factor, este ejercicio representa un desafío metodológico porque todos los factores se mueven de forma simultánea. Por lo tanto, para poder aislar y evaluar el impacto individual de cada variable utilizaré el siguiente enfoque creado específicamente para este trabajo: estimo la prima de riesgo en una serie de economías contrafácticas, en donde todos los factores, excepto uno, se mantienen constantes en el valor de su media a lo largo del tiempo. Por ejemplo, para evaluar la contribución del crecimiento de los dividendos voy a usar (8) con

$\Lambda_t$  reemplazada por:

$$\Lambda_t^{(g)} = \lambda_0 + \lambda_1 X_t^{(g)},$$

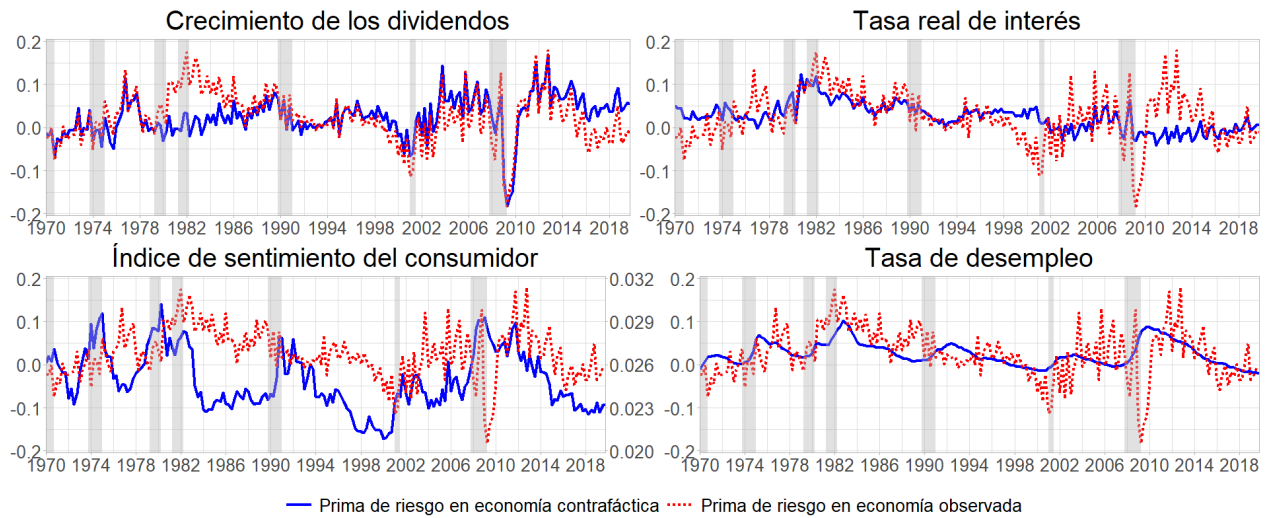
donde  $X_t^{(g)} = [g_t, \bar{r}, \bar{z}, \bar{u}]$ . Es decir, para construir el precio de mercado del riesgo en  $t$  tomo el crecimiento real de los dividendos en  $t$  y el valor de los otros factores en su media incondicional. Realizo un análisis similar para los factores restantes.

La evolución de la prima de riesgo y los resultados del método detallado en el párrafo anterior están ilustrados en la figura 5, donde cada cuadrante representa una economía contrafactual posible. Se pueden obtener varias conclusiones de esta figura: en primer lugar, el panel superior izquierdo indica que el crecimiento de los dividendos permite explicar casi la totalidad de la dinámica de la prima de riesgo. Esto resulta lógico ya que el desempeño de las acciones debería estar determinado por el desempeño de su componente real. Lo notorio es la incapacidad de esta variable para explicar lo que sucede durante el régimen de Volcker. Durante esos años el principal factor impulsando el aumento en la prima de riesgo fueron las elevadas tasas de interés reales, lo cual se puede comprobar con el segundo panel de la figura. El panel inferior izquierdo muestra que la influencia del sentimiento del consumidor sobre la prima es relativamente baja<sup>12</sup>. Sin embargo, sigue de cerca los movimientos de corto plazo de la variable, lo cual es consistente con el hecho de que la variable es altamente significativa como factor. Por último, encuentro que la tasa de desempleo captura de forma precisa los movimientos de largo plazo de la prima. Este resultado es relevante porque sugiere una relación directa entre la prima de riesgo y el desempeño general de la economía.

---

<sup>12</sup>El eje derecho del panel inferior izquierdo es el que se corresponde con la prima de riesgo bajo la economía contrafáctica donde solo ese factor toma diferentes valores a lo largo del tiempo.

Figura 5: Contribución de los factores a la prima de riesgo

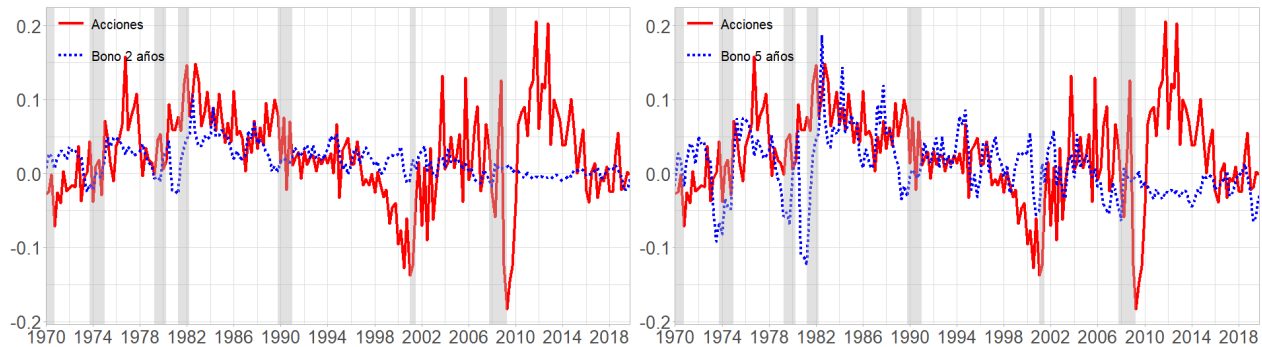


Cada gráfico muestra una economía contrafáctica en la que solo uno de los factores varía en el tiempo, mientras que los restantes permanecen fijos en todos los períodos.

## 6.2. Evolución de la prima de riesgo en diferentes estados de la economía

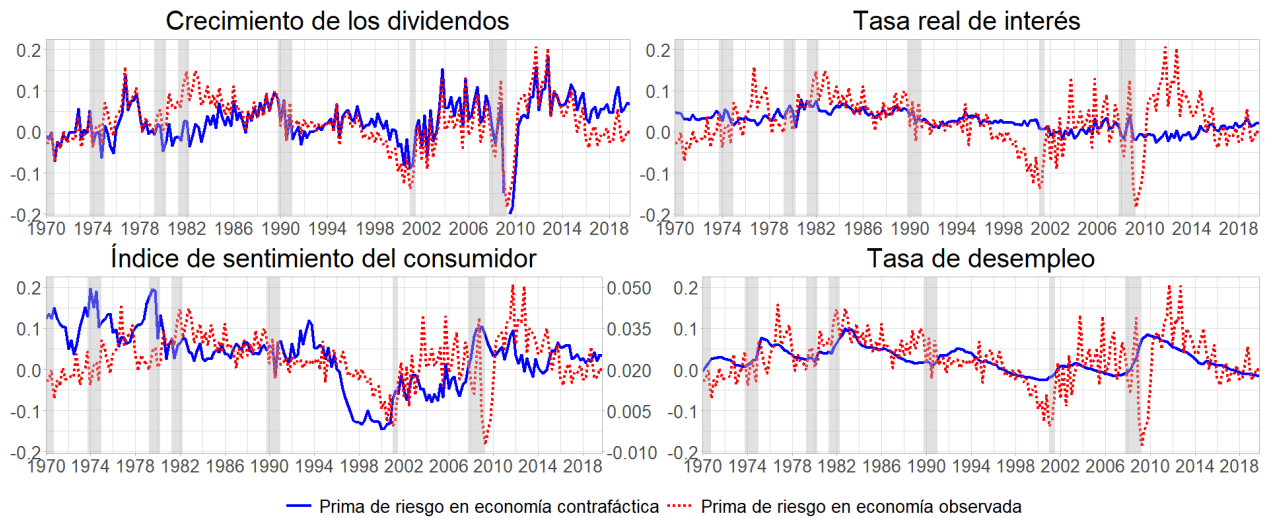
Los agentes ajustan su comportamiento frente a activos riesgosos según el estado de la economía. Por este motivo resulta relevante evaluar el comportamiento de la prima de riesgo en la extensión del modelo donde se contemplan dos estados de la naturaleza. En la figura 6 muestro la comparación de la prima de riesgo estimada a partir del modelo afín con 2 estados de la economía con la prima de riesgo de los bonos de 2 y 5 años obtenida a partir del modelo afín tradicional. Los resultados análogos a los expuestos en la sección anterior: la prima de ambos tipos de activos siguen una trayectoria similar en las décadas previas al 2005, con tendencias inversas en los años previos a las recesiones de la economía americana. Luego del 2005 esa similitud se rompe como consecuencia de las bajas tasas de interés impuestas por la reserva federal.

Figura 6: Prima de riesgo de las acciones y los bonos en un modelo afín con 2 estados de la naturaleza



La figura 7 detalla la contribución específica de cada factor a la prima de riesgo utilizando la misma metodología expuesta anteriormente. En comparación con el modelo base, el impacto del crecimiento de los dividendos, de la tasa real de interés y de la tasa de desempleo es similar. La principal diferencia radica en la contribución del índice de sentimiento del consumidor. En este sentido se pueden destacar dos elementos: por un lado, la prima de riesgo de la economía contrafáctica del panel inferior izquierdo es más volátil en términos relativos. Esto se evidencia en los valores del eje derecho, los cuales se extienden desde el -0.01 hasta el 0.05, mientras que en la figura 5 solo se observan valores entre el 0.02 y el 0.032. Por otro lado, la trayectoria de la prima en ambos casos también es diferente: con diferentes estados de la economía se evidencia una caída abrupta de la prima de riesgo en el período 1996-2001 y valores más elevados para el período 2015-2019. Ambos períodos coinciden con dos de las etapas de mejor desempeño de las estimaciones del modelo extendido en relación al modelo base. Esto sugiere que la incorporación de dos estados de la economía permite capturar de forma más adecuada la influencia del sentimiento de los consumidores sobre la prima de riesgo.

Figura 7: Contribución de los factores a la prima de riesgo en un modelo Afín con 2 estados de la naturaleza



En general las estimaciones de la prima de riesgo bajo ambos modelos son similares. Sin embargo, hay 3 períodos en los cuales se observa una discrepancia significativa. Para poder visualizarlos mejor, la figura 8 presenta el valor de la diferencia entre la prima de riesgo estimada bajo ambos modelos para cada trimestre analizado.

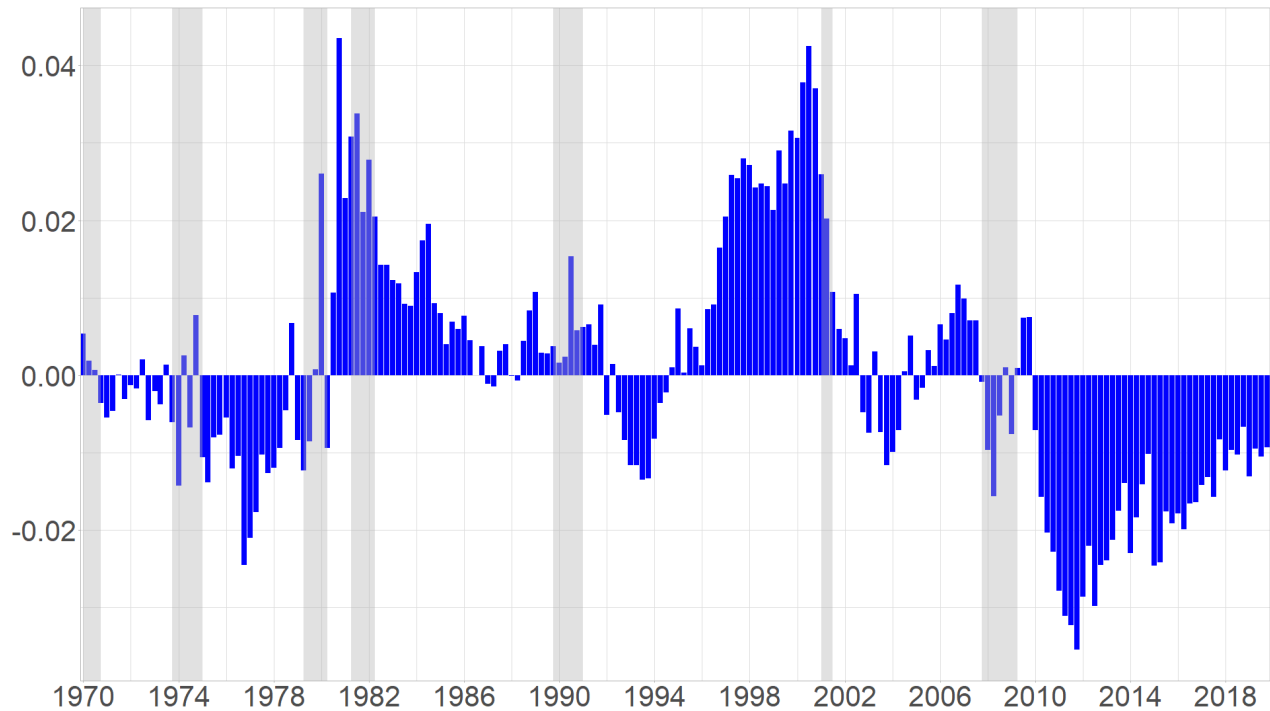
El primer período donde se observa una diferencia sistemática es el comprendido entre el tercer trimestre de 1980 y el primer trimestre de 1986, durante el cual la prima estimada con el modelo base es relativamente más elevada. Esto coincide con los años de elevadas tasas de interés bajo la presidencia de Paul Volcker en la Reserva Federal. Es posible que al asociar las condiciones monetarias extremas a un régimen particular, el modelo con 2 estados provea una estimación más adecuada de la dinámica subyacente y, por consiguiente, de la prima de riesgo. Esta idea se ve reforzada por el hecho de que durante este período las estimaciones del precio de las acciones bajo el modelo con 2 estados se ajustan mejor a los datos.

Entre el tercer trimestre de 1996 y el primer trimestre de 2001 también se advierte que la prima estimada por el modelo base es sustancialmente mayor. Ya se ha mencionado que estos años se asocian a la etapa de crecimiento de las compañías basadas en internet. Dada

la percepción generalizada sobre el carácter revolucionario de esta nueva tecnología, es probable que los inversores estuvieran dispuestos a aceptar una prima de riesgo más baja. Esto se ve reflejado en los datos a través del índice de sentimiento de consumidor, el cual alcanza sus valores máximos en esos años. Considerando que la principal discrepancia en la contribución de los factores en ambos modelos recae en ese índice, no sorprende que exista una diferencia entre las estimaciones de la prima durante este periodo. Además, durante esta etapa el modelo base subestima sustancialmente el precio de las acciones, lo cual tiene su correlato en una sobreestimación de la prima de riesgo y, por ende, a una diferencia positiva entre ambas estimaciones de la prima. Esto sugiere que la prima estimada con 2 estados es más confiable.

Por último, a partir del primer trimestre del 2011 la prima de riesgo estimada a través del modelo con 2 estados es sistemáticamente más elevada. Estos años están asociados con tasas reales de interés cercanas al 0 y por un crecimiento sostenido del PBI estadounidense. Al igual que antes, gran parte de la diferencia en la estimación radica en la contribución del índice de sentimiento del consumidor: ya se ha mencionado que la influencia de este factor es más significativa hacia finales del periodo bajo estudio en el modelo extendido. Esta etapa también está asociada a un error en la cotización del precio de las acciones por parte del modelo base. Sin embargo, en este caso es una sobreestimación de los precios, lo cual se traslada a una subestimación de la prima de riesgo. En definitiva, esto refuerza la fiabilidad de las estimaciones realizadas con el modelo con 2 estados de la naturaleza.

Figura 8: Diferencia entre la prima de riesgo estimada con el modelo base y el modelo con dos estados de la economía



## 7. Conclusión

He desarrollado y estimado un modelo afín en forma reducida para la determinación del precios de las acciones. La simplicidad y flexibilidad del modelos permitió incorporar como factores de riesgo a 4 variables que afectan al precio de las acciones: el crecimiento de los dividendos, la tasa real de interés, un índice de sentimiento del consumidor, y la tasa de desempleo. De esta forma se obtuvo un modelo que se ajusta notablemente bien a los datos, y que provee una caracterización robusta de la evolución de la prima de riesgo ex-ante, definida como el retorno excedente esperado de mantener una acción por un período.

Para poder validar los resultados del modelo he realizado una comparación con la prima de riesgo para los bonos obtenida a partir de un modelo tradicional y ampliamente

utilizado en la práctica. Se verificó que ambas primas exhiben trayectorias similares, a excepción de los años previos a las recesiones de la economía americana y cuando las tasas de interés son cercanas al 0. Asimismo, he implementado un método basado en la construcción de economías contrafácticas para poder medir la contribución de cada factor a la prima de riesgo. De esta forma he encontrado que también la evolución de la tasa de desempleo siguen de cerca los movimientos de largo plazo de la evolución de la prima de riesgo de las acciones, mientras que el índice de confianza del consumidor captura los movimientos de corto plazo.

Por último, he realizado una extensión del modelo para incorporar dos estados de la economía al movimiento de los factores de riesgo. Esto me permitió mejorar la estimación del precio de las acciones y de la prima de riesgo, en particular en tres períodos asociados a eventos económicos extremos: altas tasas de interés, elevados niveles de confianza del consumidor debido al desarrollo del internet, y bajas tasas reales de interés impulsadas por la política monetaria de la Reserva Federal.

## 8. Apéndice A: Derivación de la solución a la ecuación del precio de una acción

En este apéndice detallo los pasos para obtener los resultados exhibidos en la [sección 2](#). Sean  $P_t$  y  $D_t$  el precio y el dividendo de una acción respectivamente en el período  $t$ , y  $M_{t+1}$  el factor de descuento estocástico. Si no existieran oportunidades de arbitraje, el precio de una acción en el período  $t$  está determinado por el valor esperado del precio más los dividendos en el período siguiente:

$$P_t = E_t [M_{t+1} (P_{t+1} + D_{t+1})].$$

Operando algebraicamente, y dividiendo y multiplicando por  $D_t$  al interior de la esperanza se obtiene que:

$$1 = E_t \left[ M_{t+1} \frac{D_{t+1}}{D_t} \frac{1 + P_{t+1}/D_{t+1}}{P_t/D_t} \right].$$

Sean  $K_t = D_t/P_t$  el retorno por dividendos, y  $G_{t+1} = D_{t+1}/D_t$  el crecimiento de los dividendos. Reemplazando estas definiciones en la ecuación anterior:

$$1 = E_t [M_{t+1} G_{t+1} K_t (1 + 1/K_{t+1})]. \quad (11)$$

Utilizando letras minúsculas para hacer referencia al logaritmo natural (por ejemplo,  $m_{t+1} = \log M_{t+1}$ ), y aplicándolo al término dentro de la esperanza:

$$\log (M_{t+1} G_{t+1} K_t (1 + 1/K_{t+1})) = m_{t+1} + g_{t+1} + k_t + \log [1 + e^{-k_{t+1}}].$$

Siguiendo a Campbell et al. (1997), considero la siguiente aproximación de Taylor del último término de la expresión alrededor del valor de largo plazo del logaritmo natural

del rendimiento por dividendos,  $\mu_k$ , es decir:

$$\log \left[ 1 + e^{-k_{t+1}} \right] \approx \log \left( 1 + e^{-\mu_k} \right) - \kappa (k_{t+1} - \mu_k),$$

donde

$$\kappa = \frac{e^{-\mu_k}}{1 + e^{-\mu_k}} < 1.$$

Esta aproximación permite escribir el término previo como una función lineal del logaritmo de las variables del modelo, y de esa manera encontrar una solución cerrada. Es decir que:

$$\begin{aligned} \log (M_{t+1} G_{t+1} K_t (1 + 1/K_{t+1})) &\approx m_{t+1} + g_{t+1} + k_t + \log (1 + e^{-\mu_k}) - \kappa (k_{t+1} - \mu_k), \\ &\approx \omega + m_{t+1} + g_{t+1} - k_t + \kappa k_{t+1}, \end{aligned}$$

donde, para simplificar la notación, defino una constante  $\omega$  que depende de  $\mu_k$ :

$$\omega = \log (1 + e^{-\mu_k}) + \kappa \mu_k.$$

De manera que puedo expresar al término al interior de la esperanza en la ecuación 11 como:

$$M_{t+1} G_{t+1} K_t (1 + 1/K_{t+1}) = e^{\omega + m_{t+1} + g_{t+1} + k_t - \kappa k_{t+1}}.$$

Es decir que se puede escribir la expresión original como:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}_t \left[ e^{\omega + m_{t+1} + g_{t+1} + k_t - \kappa k_{t+1}} \right], \\ e^{-k_t - \omega} &= \mathbb{E}_t \left[ e^{m_{t+1} + g_{t+1} - \kappa k_{t+1}} \right], \end{aligned} \tag{12}$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden para el retorno por dividendos ( $k_t$ ).

Para poder resolver el modelo es necesario suponer una cierta estructura a las variables consideradas, para lo cual utilizo la estructura afín estándar. En primer lugar postulo la

existencia de un vector  $X_t$  de factores de riesgo de dimensión  $(4 \times 1)$  que siguen un proceso VAR(1):

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Gamma \eta_{t+1},$$

donde  $\eta_{t+1}$  es una secuencia de vectores aleatorios i.i.d. normalmente distribuidos con  $E_t [\eta_{t+1}] = 0$  y  $E_t [\eta_{t+1} \eta_{t+1}'] = I$ , y  $\Gamma$  es una matriz triangular inferior. También asumo que el logaritmo del factor de descuento estocástico se puede escribir como:

$$m_{t+1} = -r_t - \frac{1}{2} \Lambda_t' \Lambda_t - \Lambda_t' \eta_{t+1},$$

donde  $r_t$  es la tasa libre de riesgo y  $\Lambda_t$  es vector de  $(4 \times 1)$  que representa el precio de mercado del riesgo, es decir la compensación que los inversores requieren en el momento  $t$  para enfrentar shocks futuros  $\eta_{t+1}$ . Se asume que este vector depende de los factores de riesgo mediante una estructura afín:

$$\Lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1' X_t.$$

Por último, considero que la tasa real de interés y que el crecimiento de los dividendos son factores de riesgo observados. Esto implica que se los puede expresar a través de las matrices de selección  $e_1' = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  y  $e_2' = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ :

$$g_t = e_1' X_t$$

$$r_t = e_2' X_t$$

Con esta estructura se puede encontrar una solución para el valor que debe tomar el logaritmo del rendimiento por dividendos ( $k_t = \log(D_t/P_t)$ ) para que se cumpla la condición de no arbitraje. Para encontrar esta solución utilizo el método de “guess and

verify", postulando que  $k_t$  también tiene una estructura afín:

$$k_t = \gamma_0 + \gamma'_1 X_t.$$

Reemplazando estas expresiones en (12) y reordenando obtengo:

$$\begin{aligned} e^{-\gamma_0 - \gamma'_1 X_t - \omega} &= \mathbb{E}_t \left[ e^{-r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Lambda_t - \Lambda'_t \eta_{t+1} + e'_1 X_{t+1} - \kappa (\gamma_0 + \gamma'_1 X_{t+1})} \right], \\ &= e^{-r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_t \Lambda_t - \kappa \gamma_0 + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) (\mu + \Phi X_t)} \mathbb{E}_t \left[ e^{[(e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma - \Lambda'_t] \eta_{t+1}} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Utilizando propiedades de la distribución normal multivariada encuentro que:

$$\mathbb{E}_t \left[ e^{[(e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma - \Lambda'_t] \eta_{t+1}} \right] = e^{\frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa \gamma_1) + \frac{1}{2} \Lambda'_t \Lambda_t - (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Lambda_t},$$

lo cual me permite escribir (13) como:

$$e^{-\gamma_0 - \gamma'_1 X_t + r_t - \omega} = e^{-\kappa \gamma_0 + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) (\mu + \Phi X_t) + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa \gamma_1) - (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Lambda_t}.$$

Tomando logaritmo a ambos lados, y reemplazando con  $r_t = e'_2 X_t$  y la estructura afín de  $\Lambda_t$  se llega a que:

$$\begin{aligned} (e'_2 - \gamma'_1) X_t - \gamma_0 - \omega &= -\kappa \gamma_0 + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) (\mu - \Gamma \lambda_0) + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa \gamma_1) \\ &\quad + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) (\Phi - \Gamma \lambda'_1) X_t. \end{aligned}$$

Como es tradicional en la literatura, en este punto resulta útil definir los coeficientes del proceso seguido por los factores de riesgo bajo la medida neutral al riesgo en relación a los coeficientes de la medida física:

$$\mu^Q \equiv \mu - \Gamma \lambda_0, \quad \Phi^Q \equiv \Phi - \Gamma \lambda'_1.$$

Reemplazando con estas expresiones la condición de no arbitraje se puede expresar como:

$$(e'_2 - \gamma'_1) X_t - \gamma_0 - \omega = \kappa \gamma_0 + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa \gamma_1) + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi^Q X_t.$$

Para encontrar los valores de  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  emparejo los coeficientes:

$$e'_2 - \gamma'_1 = (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi^Q, \quad -\gamma_0 - \omega = -\kappa \gamma_0 + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa \gamma_1).$$

A partir de lo cual encuentro que el valor que debe tomar  $\gamma_1$  es:

$$\begin{aligned} e'_2 - \gamma'_1 &= (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi^Q \\ e'_2 &= \gamma'_1 + e'_1 \Phi^Q - \kappa \gamma'_1 \Phi^Q \\ \gamma'_1 (I - \kappa \Phi^Q) &= e'_2 - e'_1 \Phi^Q \\ \gamma_1 &= (I - \kappa \Phi^{Q'})^{-1} (e_2 - \Phi^{Q'} e_1) \end{aligned}$$

Reemplazando este valor en la segunda ecuación y reordenando los términos se obtiene una expresión para  $\gamma_0$ :

$$\gamma_0 = -\frac{\omega + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa \gamma_1)}{1 - \kappa}.$$

## 9. Apéndice B: Derivación del valor esperado del logaritmo del retorno por tenencia

En esta sección derivó una expresión para la prima de riesgo de las acciones como función de los coeficientes del modelo y el valor de los factores de riesgo observados. Para eso comienzo por definir el retorno bruto realizado de mantener una acción por un

período,  $R_{t+1}^s$ , como:

$$\begin{aligned} R_{t+1}^s &= \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t} \\ &= \frac{D_{t+1}}{D_t} \frac{1 + P_{t+1}/D_{t+1}}{P_t/D_t} \\ &= G_{t+1} K_t (1 + 1/K_{t+1}). \end{aligned}$$

Entonces el logaritmo del retorno se puede expresar como:

$$r_{t+1}^s = g_{t+1} + k_t + \log \left[ 1 + e^{-k_{t+1}} \right]$$

Usando la misma aproximación alrededor de la media del retorno por dividendos que en el apéndice anterior, puedo obtener la siguiente expresión para el logaritmo del retorno bruto:

$$r_{t+1}^s \approx \omega + g_{t+1} + k_t - \kappa k_{t+1}$$

Reemplazando con el proceso del crecimiento de los dividendos y la solución del retorno por rendimientos se obtiene que:

$$\begin{aligned} r_{t+1}^s &= \omega + e'_1 X_{t+1} + (\gamma_0 + \gamma'_1 X_t) - \kappa (\gamma_0 + \gamma'_1 X_{t+1}) \\ &= \omega + \gamma_0 (1 - \kappa) + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu + [\gamma'_1 + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi] X_t + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \eta_{t+1} \quad (14) \end{aligned}$$

Para llegar al resultado deseado, primero noto que de la expresión para  $\gamma_0$  obtenida en el apéndice anterior se desprende que:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= - \frac{\omega + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa \gamma_1)}{1 - \kappa} \\ \omega + (1 - \kappa) \gamma_0 &= - (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu^Q - \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa \gamma_1) \end{aligned}$$

Sumando  $(e'_1 - \kappa\gamma'_1) \mu$  a ambos lados:

$$\omega + \gamma_0(1 - \kappa) + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \mu = (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \left( \mu - \mu^Q \right) - \frac{1}{2} (e_1 - \kappa\gamma_1) \Gamma \Gamma' (e'_1 - \kappa\gamma_1) \quad (15)$$

Tambi3n noto que de la soluci3n para  $\gamma_1$  se desprende que:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left( I - \kappa \Phi^{Q'} \right)^{-1} \left( e_2 - \Phi^{Q'} e_1 \right) \\ \gamma'_1 \left( I - \kappa \Phi^Q \right) &= e'_2 - e'_1 \Phi^Q \\ \gamma'_1 &= e'_2 - (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Phi^Q \end{aligned}$$

Sumando  $(e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Phi$  a ambos lados:

$$\gamma'_1 + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Phi = e'_2 + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \left( \Phi - \Phi^Q \right) \quad (16)$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones (15) y (16) en la ecuaci3n (14) obtengo la siguiente expresi3n para el logaritmo de los retornos realizados:

$$r_{t+1}^s = (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \left( \mu - \mu^Q \right) - \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa\gamma_1) + \left[ e'_2 + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \left( \Phi - \Phi^Q \right) \right] \chi_t + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \eta_{t+1}$$

y usando  $\mu - \mu^Q = \Gamma \lambda_0$  y  $\Phi - \Phi^Q = \Gamma \lambda'_1$ , llego al siguiente resultado para el logaritmo de los retornos:

$$r_{t+1}^s = (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \lambda_0 - \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa\gamma_1) + \left[ e'_2 + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \lambda'_1 \right] \chi_t + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \eta_{t+1}$$

Por consiguiente el retorno esperado es:

$$E_t \left[ r_{t+1}^s \right] = (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \lambda_0 - \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \Gamma' (e_1 - \kappa\gamma_1) + \left[ e'_2 + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma \lambda'_1 \right] \chi_t,$$

y el retorno excedente de mantener una acción un período es:

$$\begin{aligned} E_t [r_{t+1}^s] - r_t &= (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma\lambda_0 - \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma\Gamma' (e_1 - \kappa\gamma_1) + [e'_2 + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma\lambda'_1] X_t - e'_2 X_t \\ &= -\frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma\Gamma' (e_1 - \kappa\gamma_1) + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma [\lambda_0 + \lambda'_1 X_t], \end{aligned}$$

o

$$E_t [r_{t+1}^s] - r_t = -\frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma\Gamma' (e_1 - \kappa\gamma_1) + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma\Lambda_t \quad (17)$$

De esta forma encuentro que los retornos excedentes esperados se mueven con el precio de mercado del riesgo ( $\Lambda_t$ ) con un coeficiente igual a  $(e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma$ .

## 10. Apéndice C: Derivación del modelo afín para el precio de las acciones con 2 regímenes

Teniendo en cuenta que las variables consideradas en este trabajo pueden comportarse de forma distinta durante booms y recesiones, en esta sección extiendo el modelo para poder incorporar la posibilidad de que el comportamiento dinámico de los factores de riesgo dependa del estado de la economía. Para limitar el número de parámetros a estimar, voy a considerar que los únicos elementos que cambian de acuerdo con el estado son el vector de constantes y la matriz de varianzas y covarianzas:

$$X_{t+1} = \mu_{S_{t+1}} + \Phi X_t + \Gamma_{S_{t+1}} \eta_{t+1},$$

donde  $\{S_t \in \{1, 2\}\}$  son variables aleatorias independientes de  $\eta_{t+1}$  que determinan el estado de la economía en el período  $t$ . Se asume que estas variables forman una cadena de Markov temporalmente homogénea, cuyas probabilidades de transición están dadas por:

$$P_{ij} = P(S_{t+1} = j | S_t = i) \quad \text{con } i, j \in \{1, 2\}, \text{ y } 0 < P_{ij} < 1.$$

Para poder obtener una solución cerrada voy a seguir la convención adoptada por Dai, Singleton et al. (2007), según la cual el valor de los factores de riesgo en  $t + 1$  depende del estado en  $t$ :

$$f(X_{t+1}|X_t, S_t = i, S_{t+1} = j) = f(X_{t+1}|X_t, S_t = i).$$

Esto quiere decir que, condicional en  $S_t = i$ , los factores de riesgo siguen el proceso:

$$X_{t+1} = \mu_i + \Phi X_t + \Gamma_i \eta_{t+1}.$$

Al igual que en el [apéndice A](#) parto de la condición de no arbitraje para poder derivar el proceso que debe seguir el rendimiento por dividendos, con la diferencia de que en este caso es necesario condicionar en estado de la economía en  $t$ :

$$P_t = E_t [M_{t+1} (P_{t+1} + D_{t+1}) | S_t = i].$$

lo cual implica que:

$$1 = E [M_{t+1} G_{t+1} K_t (1 + 1/K_{t+1}) | S_t = i]$$

Dado que solo se consideran 2 estados, la esperanza se puede plantear como:

$$1 = \sum_{j=1}^2 P_{ij} E [M_{t+1} G_{t+1} K_t (1 + 1/K_{t+1}) | S_t = i, S_{t+1} = j].$$

Utilizando la misma aproximación de Taylor alrededor del valor de largo plazo del logaritmo del rendimiento por dividendos se puede plantear la expresión anterior como:

$$1 = \sum_{j=1}^S P_{ij} e^{\omega + k_t} E [e^{m_{t+1} + g_{t+1} - \kappa k_{t+1}} | S_t = i, S_{t+1} = j]. \quad (18)$$

Para poder obtener una solución cerrada impongo la misma estructura que en el modelo base, con la única diferencia de que el precio de mercado de riesgo (el vector  $\Lambda_{t, S_t}$ ) en este

caso va a depender del estado de la economía en t:

$$\begin{aligned}
m_{t+1} &= -r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_{t,S_t} \Lambda_{t,S_t} - \Lambda'_{t,S_t} \eta_{t+1} \\
\Lambda_{t,S_t} &= \lambda_{0,S_t} + \lambda'_{1,S_t} X_t \\
r_t &= e'_2 X_t \\
g_t &= e'_1 X_t.
\end{aligned}$$

Por último, utilizo el método de “Guess and verify” donde el valor del logaritmo del rendimiento por dividendos es una función afín de los factores de riesgo, y la constante depende del estado de la economía:

$$k_{t+1} = \gamma_{0,S_t} + \gamma'_1 X_{t+1}.$$

Reemplazando con estos elementos encuentro la siguiente expresión para el término dentro de la esperanza en (18), condicional en  $S_t = i$ :

$$\begin{aligned}
m_{t+1} + g_{t+1} - \kappa k_{t+1} &= -r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_{t,i} \Lambda_{t,i} - \Lambda'_{t,i} \eta_{t+1} + e'_1 X_{t+1} - \kappa [\gamma_{0,i} + \gamma'_1 X_{t+1}] \\
&= -r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_{t,i} \Lambda_{t,i} - \kappa \gamma_{0,i} - \Lambda'_{t,i} \eta_{t+1} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) [\mu_i + \Phi X_t + \Gamma_i \eta_{t+1}] \\
&= -r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_{t,i} \Lambda_{t,i} - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) (\mu_i + \Phi X_t) - \Lambda'_{t,i} \eta_{t+1} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i \eta_{t+1} \\
&= -r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_{t,i} \Lambda_{t,i} - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) (\mu_i + \Phi X_t) + [(e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i - \Lambda'_{t,i}] \eta_{t+1}.
\end{aligned}$$

De manera que por propiedades de la normal multivariada la esperanza en (18) es igual a:

$$\begin{aligned}
E_t \left[ e^{m_{t+1} + g_{t+1} - \kappa k_{t+1}} | S_t = i, S_{t+1} = j \right] &= e^{-r_t - \frac{1}{2} \Lambda'_{t,i} \Lambda_{t,i} - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) (\mu_i + \Phi X_t)} E_t \left[ e^{[(e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i - \Lambda'_{t,i}] \eta_{t+1}} \right] \\
&= e^{-r_t - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) (\mu_i + \Phi X_t - \Gamma_i \Lambda_{t,i}) + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i \Gamma'_i (e_1 - \kappa \gamma_1)}.
\end{aligned}$$

El término entre paréntesis se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\mu_i + \Phi X_t - \Gamma_i \Lambda_{t,i} &= \mu_i - \Gamma_i \lambda_{0,i} + (\Phi - \Gamma_i \lambda'_{1,i}) X_t \\ &= \mu_i^Q + \Phi^Q X_t,\end{aligned}$$

donde  $\mu_i^Q$  y  $\Phi^Q$  son los coeficientes del proceso de  $X_t$  bajo la medida neutral al riesgo, donde solo el vector de constantes depende del estado de la economía:

$$\mu_i^Q = \mu_i - \Gamma_i \lambda_{0,i}, \quad \Phi^Q = \Phi - \Gamma_i \lambda'_{1,i}.$$

Reemplazando con esta expresión la esperanza es:

$$E_t \left[ e^{m_{t+1} + g_{t+1} - \kappa k_{t+1}} | S_t = i, S_{t+1} = j \right] = e^{-r_t - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu_i^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i \Gamma'_i (e_1 - \kappa \gamma_1) + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi^Q X_t}$$

Es decir que la condición de no arbitraje que determina el precio de una acción es:

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{j=1}^S P_{ij} e^{\omega + k_t} e^{-r_t - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu_i^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i \Gamma'_i (e_1 - \kappa \gamma_1) + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi^Q X_t} \\ e^{r_t - k_t} &= \sum_{j=1}^S P_{ij} e^{\omega - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu_i^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i \Gamma'_i (e_1 - \kappa \gamma_1) + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi^Q X_t}\end{aligned}$$

Reemplazando con el "guess":

$$e^{-\gamma_{0,i} + (e'_2 - \gamma'_1) X_t} = e^{\omega - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu_i^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i \Gamma'_i (e_1 - \kappa \gamma_1) + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi^Q X_t} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^S P_{ij} \right)}_{=1}$$

Tomando logaritmo a ambos lados de la expresión:

$$-\gamma_{0,i} + (e'_2 - \gamma'_1) X_t = \omega - \kappa \gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \mu_i^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Gamma_i \Gamma'_i (e_1 - \kappa \gamma_1) + (e'_1 - \kappa \gamma'_1) \Phi^Q X_t$$

Por último, emparejando coeficientes se pueden despejar los valores de  $\gamma_{0,i}$  y de  $\gamma_1$ :

$$(e'_2 - \gamma_1) = (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Phi^Q \quad (19)$$

$$-\gamma_{0,i} = \omega - \kappa\gamma_{0,i} + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \mu_i^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma_i \Gamma'_i (e_1 - \kappa\gamma_1) \quad (20)$$

De (19):

$$\begin{aligned} (e'_2 - \gamma'_1) &= (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Phi^Q \\ \gamma'_1(I - \kappa\Phi^Q) &= (e'_2 - e'_1\Phi^Q) \\ \gamma'_1 &= (e'_2 - e'_1\Phi^Q)(I - \kappa\Phi^Q)^{-1} \\ \gamma_1 &= (I - \kappa\Phi^{Q'})^{-1}(e_2 - \Phi^{Q'}e_1) \end{aligned}$$

y de (20) reemplazando con el resultado anterior:

$$\gamma_{0,i} = -\frac{\omega + (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \mu_i^Q + \frac{1}{2} (e'_1 - \kappa\gamma'_1) \Gamma_i \Gamma'_i (e_1 - \kappa\gamma_1)}{1 - \kappa}$$

## 11. Apéndice D: Un modelo afín para el precio de los bonos

En este apéndice describo un modelo homocedástico y afín para el precio de los bonos utilizado en la sección empírica del trabajo. Los factores de riesgo están representados por un vector de estado de variables latentes  $X_t \in \mathfrak{X}^n$  donde el tiempo  $t$  está medido en meses. La dinámica del vector de estado está gobernado por el siguiente proceso VAR:

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Gamma \eta_{t+1}, \quad (21)$$

donde  $\eta_{t+1}|X_t \sim N(0, I)$  y  $\Gamma$  son matrices triangulares inferiores. Los flujos de dinero nominales se cotizan utilizando el siguiente factor de descuento estocástico afín:

$$M_{t+1} = e^{-r_t - \frac{1}{2}\Lambda_t'\Lambda_t - \Lambda_t'\eta_{t+1}}, \quad (22)$$

$$\Lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t, \quad (23)$$

donde  $r_t$  denota la tasa de interés real de un período y  $\Lambda_t \in \mathfrak{R}^n$  es la compensación por el riesgo de enfrentar shocks los shocks  $\eta_{t+1}$ .

La tasa de interés nominal de un período  $r_t$  es una función afín de las variables de estado:

$$r_t = \delta_0 + \delta_1' X_t, \quad (24)$$

donde  $\delta_0$  es un escalar y  $\delta_1$  es un vector de  $n$  dimensiones. El precio de los bonos descontado puede ser obtenido a través de argumentos de no arbitraje tradicionales.

### 11.1. Cotizando bonos del gobierno

Sea  $P_t^{(\tau)}$  y  $y_t^{(\tau)}$  el precio y el retorno, respectivamente, de un bono cupón cero de  $\tau$  periodos. La ausencia de arbitraje implica que el logaritmo del precio de los bonos es una función afín de los factores de riesgo:

$$\log P_t^{(\tau)} = A_\tau + B_\tau' X_t, \quad (25)$$

donde el escalar  $A_\tau$  y el vector de  $(n \times 1)$   $B_\tau$  de cargas satisface las recursiones:

$$A_{\tau+1} = A_\tau - \delta_0 + \mu^Q B_\tau + \frac{1}{2} B_\tau' \Gamma \Gamma' B_\tau, \quad (26)$$

$$B_{\tau+1} = \Phi^Q B_\tau - \delta_1, \quad (27)$$

donde  $\mu^Q = (\mu - \Gamma\lambda_0)$ ,  $\Phi^Q = (\Phi - \Gamma\lambda_1)$ , y con las condiciones iniciales  $A_0 = 0$  y  $B_0 = 0$  (ver Ang y Piazzesi (2003)). De manera que el retorno de un bono cupón cero de  $\tau$  periodos en el momento  $t$  está dado por:

$$y_t^{(\tau)} = -\log \left( P_t^{(\tau)} \right) / \tau = a_\tau + b'_\tau X_t, \quad (28)$$

donde  $a_\tau = -A_\tau/\tau$  and  $b_\tau = -B_\tau/\tau$ .

## 11.2. Retornos por tenencia

El logaritmo del retorno excedente por tenencia de un período o *term premium* (esto equivale al retorno de tomar un crédito a la tasa libre de riesgo  $r_t$  para abrir una posición en un bono de periodo  $\tau$  en el momento  $t$  y luego cerrar la posición vendiendo el bono en  $t + 1$ ) es  $p_{t+1}^{(\tau-1)} - p_t^{(\tau)} - r_t$ , donde  $p_t^{(\tau)} = \log P_t^{(\tau)}$ . Usando la estructura afín, la esperanza condicional de esta estrategia en el período  $t$  es:

$$\begin{aligned} E_t[p_{t+1}^{(\tau-1)} - p_t^{(\tau)} - r_t] &= J_{\tau-1} + B'_{\tau-1} \Gamma \Lambda_t - \delta_0 - \delta'_1 X_t, \\ E_t[p_{t+1}^{(\tau-1)} - p_t^{(\tau)} - r_t] &= J_{\tau-1} + B'_{\tau-1} (\mu - \mu^Q) - \delta_0 + (B'_{\tau-1} (\Phi - \Phi^Q) - \delta'_1) X_t, \end{aligned} \quad (29)$$

donde

$$J_{\tau-1} = -\frac{1}{2} B'_{\tau-1} \Gamma \Gamma' B_{\tau-1}.$$

El primer componente es un término de desigualdad de Jensen. Los otros términos capturan la variación estocástica en la prima de riesgo a través del tiempo.

En la estimación empírica del modelo, consideré tres factores observables construidos a partir del retorno de los bonos. Los factores son el nivel, (el valor negativo de) la pendiente y la curvatura de la curva de rendimientos. El nivel de la curva de rendimientos se define como el rendimiento del bono de 10 años, la pendiente es el rendimiento del bono de 10 años menos el del bono de 3 meses, y la curvatura es el doble del rendimiento del bono de

2 años menos la suma del rendimiento de los bonos de 10 años y 3 meses. Esto implica que los factores de riesgo presentes en el vector  $X_t$  son  $y_t^{120}$ ,  $-(y_t^{120} - y_t^3)$ , y  $2y_t^{24} - y_t^{120} - y_t^3$ . El rendimiento de los bonos  $y_t^n$  que no fueron utilizados para construir esos factores son observados para las madureces de  $n \in N = \{6, 12, 36, 60, 108\}$  meses.

Parametrizo el modelo y evalúo la función de verosimilitud en términos de los parámetros de las medidas neutrales al riesgo y físicas. Dado un valor para esos parámetros, recupero  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$  usando las ecuaciones  $\lambda_0 = \Sigma^{-1} (\mu - \mu^Q)$  y  $\lambda_1 = \Sigma^{-1} (\Phi - \Phi^Q)$ .

Para identificar el modelo también impongo los siguientes supuestos. Primero, dado que el término  $\mu^Q/B_\tau$  aparece en la ecuación (26) es un escalar, solo puedo identificar un único parámetro en  $\mu^Q$ . Por eso fijo  $\mu^Q = [\mu_1^Q, 0, 0]'$ . Segundo, impongo que la matriz  $\Phi^Q$  tiene la siguiente estructura:

$$\Phi^Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^Q & \phi_2^Q \\ 0 & 0 & \phi_1^Q \end{bmatrix}.$$

Los supuestos previos implican que estimo el modelo:

$$y_t^n = a^n + b^n X_t + v_t \quad \forall n \in N, \quad (30)$$

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Sigma \epsilon_{t+1}, \quad (31)$$

donde  $y_t^n \in \{y_t^6, y_t^{12}, y_t^{36}, y_t^{60}, y_t^{108}\}$  es el conjunto de retornos observados,  $X_t$  es el vector de factores observados,  $v_t \in \mathfrak{R}^5$  es un error de medición distribuido normalmente con media cero y matriz de covarianzas  $H$ ;  $\mu \in \mathfrak{R}^3$  es un vector de medias,  $\Phi$  es un matriz de  $(3 \times 3)$ , y  $\epsilon_{t+1} \in \mathfrak{R}^3$  es un vector distribuido normalmente con media cero y matriz de varianzas y covarianzas  $I_3$ .

## Referencias

- Ang, Andrew y Monika Piazzesi** (2003). "A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables". *Journal of Monetary Economics* 50, págs. 745-787.
- Bekaert, Geert y Steven R. Grenadier** (1999). "Stock and Bond Pricing in an Affine Economy". *Working Paper*. National Bureau of Economic Research.
- Campbell, John Y., Andrew W. Lo y A.Craig MacKinlay** (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- Chen, Shiu-Sheng** (2011). "Lack of consumer confidence and stock returns". *Journal of Empirical Finance* 18.2, págs. 225-236.
- Christensen, Jens H. E., Francis X. Diebold y Glenn D. Rudebusch** (2011). "The affine arbitrage-free class of Nelson–Siegel term structure models". *Journal of Econometrics* 164.1, págs. 4-20.
- d'Addona, Stefano y Axel H. Kind** (2006). "International stock–bond correlations in a simple affine asset pricing model". *Journal of Banking & Finance* 30.10, págs. 2747-2765.
- Dai, Qiang, Kenneth Singleton y Wei Yang** (2007). "Regime Shifts in a Dynamic Term Structure Model of U.S. Treasury Bond Yields". *The Review of Financial Studies* 20.5, págs. 1669-1706.
- Duffie, Darrell y Larry G. Epstein** (1992). "Stochastic Differential Utility". *Econometrica* 60.2, págs. 353-394.
- Epstein, Larry G. y Stanley E. Zin** (1989). "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework". *Econometrica* 57.4, págs. 937-969.
- (1991). "Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis". *Journal of Political Economy* 99.2, págs. 263-286.

- Estrella, Arturo y Gikas A. Hardouvelis** (1991). "The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity". *The Journal of Finance* 46.2, págs. 555-576.
- Garcia, René y Pierre Perron** (1996). "An Analysis of the Real Interest Rate Under Regime Shifts". *The Review of Economics and Statistics* 78.1, págs. 111-125.
- Hamilton, James D. y Jing Cynthia Wu** (2014). "Risk premia in crude oil futures prices". *Journal of International Money and Finance* 42, págs. 9-37.
- Kreps, David M. y Evan L. Porteus** (1978). "Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory". *Econometrica* 46.1, págs. 185-200.
- Le, Anh y Kenneth Singleton** (2013). "The structure of risks in equilibrium affine models of bond yields". *Working Paper*. University of North Carolina.
- Lucas, Robert E.** (1978). "Asset Prices in an Exchange Economy". *Econometrica* 46.6, págs. 1429-1445.
- Otoo, Maria Ward** (1999). "Consumer sentiment and the stock market". *Finance and Economics Discussion Series* 1999-60.
- Piazzesi, Monika** (2010). "Affine Term Structure Models". *Handbook of Financial Econometrics: Tools and Techniques*. Vol. 1. Handbooks in Finance. San Diego: North-Holland, págs. 691-766.
- Psaradakis, Zacharias, Francisco Rapetti, Martin Sola y Patricio Yunis** (2024). "The Role of Consumer Sentiment in the Stock Market: A Multivariate Dynamic Mixture Model with Threshold Effects". *Working Paper*. Universidad Torcuato Di Tella.
- Psaradakis, Zacharias, Martin Sola, Fabio Spagnolo y Nicola Spagnolo** (2009). "Selecting nonlinear time series models using information criteria". *Journal of Time Series Analysis* 30.4, págs. 369-394.
- Rudebusch, Glenn D. y John C. Williams** (2009). "Forecasting Recessions: The Puzzle of the Enduring Power of the Yield Curve". *Journal of Business & Economic Statistics* 27.4, págs. 492-503.

- Shen, Junyan, Jianfeng Yu y Shen Zhao** (2017). “Investor sentiment and economic forces”. *Journal of Monetary Economics* 86, págs. 1-21.
- Shiller, Robert J.** (1989). *Market Volatility*. The MIT Press.
- Weil, Philippe** (1989). “The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle”. *Journal of Monetary Economics* 24.3, págs. 401-421.
- (1990). “Nonexpected Utility in Macroeconomics”. *The Quarterly Journal of Economics* 105.1, págs. 29-42.
- Werner, Thomas y Wolfgang Lemke** (2009). “The term structure of equity premia in an affine arbitrage-free model of bond and stock market dynamics”. *Working Paper*. European Central Bank.