

Departamento de Economía

Tipo de documento: Tesis de Grado



Licenciatura en Economía

El Problema de la Mesa: Un Comensal Inescrupuloso, Secuencial y Altruista

Autorías: Chouela, Teo; Dolanyi, Pedro; Levinas, Matías; Lucero Torres, Salvador; Sívori, Octavio

Fecha: 2025

¿Cómo citar este trabajo?

Chouela, T., et al. (2025). "El Problema de la Mesa: Un Comensal Inescrupuloso, Secuencial y Altruista". [Tesis de Grado. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella

<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13651>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la **Universidad Torcuato Di Tella** bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

Dirección: <https://repositorio.utdt.edu>

El Problema de la Mesa: Un Comensal Inescrupuloso, Secuencial y Altruista

Chouela, Dolanyi, Levinas, Lucero Torres, Sivori

Universidad Torcuato Di Tella

Licenciatura en Economía - Departamento de Economía

Tutor: Federico Weinschelbaum

August 2025

Abstract

En el presente trabajo se extiende el análisis del Dilema del Comensal Inescrupuloso en tres dimensiones principales. Antes de introducir modificaciones, se formalizan los equilibrios en los escenarios clásicos de pago colectivo e individual, reproduciendo los resultados empíricos previos: el pago colectivo induce sobreconsumo, mientras que el pago individual sostiene el equilibrio eficiente. En la primera modificación del dilema original se incorpora una fase de votación sobre el régimen de pago tras la elección de los platos. Esta modificación no altera la estructura de incentivos, dado que las estrategias de voto quedan endógenamente determinadas por la elección del plato, preservando los equilibrios originales. Luego, se incorpora secuencialidad en las órdenes, manteniendo la votación como instancia posterior. Esta variante restringe el rango de parámetros que sostienen el equilibrio ineficiente, al introducir la posibilidad de anticipar y coordinar decisiones estratégicas. Finalmente, al incorporar preferencias altruistas, se demuestra que dicho componente restringe aún más el espacio del equilibrio ineficiente con respecto a las demás variaciones del juego. Sin embargo, no se logra resolver el Dilema.

1 Introducción

Es muy probable que, alguna vez en la vida, uno se sienta perjudicado con cómo se acuerda el pago de la cuenta en una cena con colegas. Uno puede sentir que, aquel que pidió un plato relativamente caro, se está aprovechando de los demás cuando la cuenta se divide en partes iguales, como también puede sentir que establecer un régimen de pago individual es de tacaño.

Este escenario tan familiar es conocido como el *Dilema del Comensal Inescrupuloso*, en el cual N individuos cenan en un restaurante y tienen la posibilidad de elegir entre platos caros y baratos, sabiendo de antemano si la cuenta se va a dividir en partes iguales o de manera individual.

La teoría económica clásica, que indica que los agentes son maximizadores de su propia utilidad, predice que cuanto menos pague porcentualmente un comensal, más caro será su pedido. Por ende, si un agente logra transferir el costo de un plato caro a los demás mediante un régimen de pago colectivo, va a tener la posibilidad de disfrutar ese extra de utilidad a expensas del resto. Lógicamente, dado que se asume racionalidad y conocimiento común de la racionalidad, bajo un régimen de pago colectivo se llegará a un equilibrio donde hay sobreconsumo.

Gneezy, Haruvy y Yafe (2004) fueron pioneros en el análisis de este dilema, y presentaron un enfoque experimental para analizar el comportamiento de N individuos en el contexto de una cena grupal. En su trabajo titulado "*The Inefficiency of Splitting the Bill*", observan el comportamiento de los comensales bajo 4 regímenes posibles: Individual, colectivo, gratuito (los experimentadores pagaron la cena), y uno intermedio en el cual cada comensal paga una fracción igual a $\frac{1}{N}$ del costo de su propio plato (el monto restante fue cubierto por los experimentadores). Una vez definido exógenamente el régimen de pago, se invita a los comensales a ordenar simultáneamente un plato, caro o barato, sin conocer las decisiones de los demás.

Los hallazgos de este trabajo son, en gran medida, consistentes con lo que predice la teoría económica. Cuando el régimen de pago es individual, los comensales tienden a elegir el plato barato, mientras que optan por el plato caro bajo un esquema de división equitativa. Adicionalmente, al comparar el tratamiento del pago colectivo con el tratamiento intermedio (pagan $\frac{1}{N}$ del costo de su plato), no se observan diferencias significativas en el comportamiento. Esta similitud sugiere que los comensales no internalizan la externalidad que su decisión impone sobre el resto del grupo.

No obstante, en una segunda fase del estudio, los autores replican el experimento en un entorno de laboratorio, con un diseño controlado similar al del restaurante, y encuentran diferencias significativas entre el tratamiento colectivo y el interme-

dio. Este resultado deja abierta la posibilidad de que, en ciertos contextos, los participantes consideren, al menos parcialmente, el bienestar de los demás, lo cual podría interpretarse como evidencia de la presencia de un componente altruista en las preferencias de los comensales.

Estudios experimentales adicionales han puesto en cuestión la validez de los modelos que asumen un comportamiento estrictamente egoísta. Si bien el marco teórico predice que, en presencia de bienes públicos y externalidades, los agentes tienen incentivos a aprovecharse del esfuerzo ajeno, la magnitud observada de dicho comportamiento suele ser menor a la que anticipan los modelos clásicos de externalidades. En equilibrio, la teoría predice que cada jugador internaliza únicamente el beneficio privado de su contribución, ignorando completamente su impacto sobre el bienestar del resto. Sin embargo, la evidencia empírica sugiere que este supuesto es demasiado restrictivo para describir con precisión el comportamiento observado en la práctica.

Zhukova (2010) ofrece evidencia complementaria que refuerza las críticas a los modelos de comportamiento puramente egoístas. En su trabajo *"Is Monetary Gain the Only Motivation?"*, la autora investiga si factores como la reciprocidad y el altruismo influyen en la decisión de qué plato ordenar en el contexto de una cena grupal. Siguiendo una metodología experimental, compara el comportamiento de los comensales bajo tres regímenes de pago distintos: individual, colectivo, y un tercero denominado "chain pay", en el cual cada comensal paga el plato pedido por el comensal sentado a su izquierda.

El argumento central de la autora es claro: si los individuos actuaran de forma puramente egoísta, bajo el régimen de pago de "chain pay", cada uno debería pedir el plato más caro posible, ya que su costo individual es nulo. Sin embargo, los resultados muestran algo diferente, sugiriendo que la reciprocidad y el altruismo son factores importantes a la hora de tomar decisiones en este contexto. Bajo el régimen de "chain pay", el 52% de los participantes optó por el plato barato, una proporción mayor que en el régimen colectivo (47%) y sólo levemente inferior al observado en el pago individual (59%).

Dado el contexto del dilema, la teoría de juegos presenta un marco teórico ideal para modelar el mismo a través de modelos matemáticos rigurosos, mediante los cuales se pueden caracterizar problemas de decisiones interdependientes entre varios jugadores con conductas estratégicas.

Este trabajo se organiza en 4 secciones principales. En primer lugar, la Sección 2 presenta una formalización del *Dilema del Comensal Inescrupuloso* y caracteriza los equilibrios que denominaremos "clásicos", en referencia a los resultados observados empíricamente en la literatura experimental.

En la sección siguiente, se propone una extensión al modelo original mediante la incorporación de una fase de votación posterior a la elección de los platos. Esta modificación permite endogeneizar el régimen de pago y analizar cómo se modifica el espacio de los equilibrios "clásicos". Se prueba que las condiciones de estabilidad del equilibrio son las mismas que en el dilema original. Asimismo, se incorpora una segunda extensión, en la cual las órdenes de los platos se realizan de manera secuencial, lo que permite explorar el rol de la información observada en las decisiones estratégicas. En este nuevo contexto, se encuentra que el equilibrio asociado al sobreconsumo se ve más restringido.

Finalmente, en la Sección 4, se introduce una última extensión, en la cual los comensales poseen preferencias altruistas mediante funciones de utilidad ponderadas por un coeficiente de altruismo *à la Levine*. Se demuestra que, en este contexto, el altruismo restringe aún más el espacio del equilibrio ineficiente.

2 El Dilema del Comensal Inescrupuloso

Es de gran utilidad formalizar en un juego estático con información completa el *Dilema del Comensal Inescrupuloso*, dado que autores previos no han realizado dicho trabajo hasta la fecha. Se usará la forma normal, Γ_N , para describir dicho juego.

Sea $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ $\forall i \in \mathcal{I} \in \mathbb{N}$ la cantidad de comensales presentes en una cena. Cada uno de ellos tiene 2 estrategias posibles, $O_i = \{H, L\}$, siendo H un plato caro y L un plato barato, asociadas a sus respectivas valuaciones, u_H y u_L y a sus respectivos costos, p_H y p_L ($p_H > p_L$, lógicamente, pero $u_H - p_H < u_L - p_L$). Sea R una variable que indica el régimen de pago, de manera tal que si $R = C$, la cuenta se divide en partes iguales, mientras que si $R = I$, cada uno paga su plato. Sea $k \equiv \#\{i \in \mathcal{I} : O_i = H\}$ el número de platos caros ordenados.

La función de utilidad del comensal i está dada por la diferencia entre la valuación del plato y su costo, $U_i = u_{O_i} - c_i$, donde el costo dependerá del régimen de pago:

$$c_i = \begin{cases} \frac{kp_H + (N-k)p_L}{N} & \text{si } R = C \\ p_{O_i} & \text{si } R = I \end{cases}$$

Toda la información relevante del modelo se resume en un parámetro $\alpha \in (0, 1)$, definido como el cociente entre la utilidad marginal del plato caro respecto al barato y su costo marginal adicional:

$$\alpha \equiv \frac{u_H - u_L}{p_H - p_L}$$

A lo largo del trabajo, este parámetro jugará un rol central para caracterizar los equilibrios bajo distintos escenarios. Las condiciones necesarias para que $\alpha \in (0, 1)$ se presentan en el Apéndice 1.

Dado que en el dilema original el régimen de pago se encuentra determinado de manera exógena, se analizarán por separado los dos escenarios posibles: el régimen de pago colectivo y el régimen de pago individual. En cada caso, se derivarán las condiciones necesarias sobre los parámetros del modelo para que se sostengan como equilibrio los resultados observados en los experimentos.

Pago Colectivo ($R = C$)

Supóngase que el pago de la cuenta total se da colectivamente en partes iguales. Si en un perfil de estrategias $O = (O_i, O_{-i})$ se ordenan k platos caros y $N - k$

platos, la utilidad neta del comensal i será:

$$U_i(O_i|O_{-i}) = u_{O_i} - \frac{kp_H + (N - k)p_L}{N}$$

Gneezy et al. (2004) muestran que, bajo este escenario, el equilibrio observado corresponde al perfil en el que todos los comensales ordenan el plato caro. En consecuencia, el objetivo es determinar una condición sobre el parámetro α que garantice la existencia de dicho equilibrio como un equilibrio de Nash.

Resultado 1: Bajo un régimen de pago colectivo, el perfil simétrico (H, H, \dots, H) constituye un Equilibrio de Nash si $\alpha \geq \frac{1}{N}$.

Demostración: Ver apéndice 2

Este resultado se obtiene al analizar los incentivos al desvío de un jugador cuando todos los demás eligen el plato caro, H . Si el comensal también elige H , su utilidad será $u_H - p_H$. Si, en cambio, ordena el plato barato, L , su costo disminuye al dejar de contribuir al plato caro ($p_H > \frac{(N-1)p_H + p_L}{N}$), pero también obtiene una utilidad menor ($u_H > u_L$). El desvío es conveniente sólo si la ganancia en costo compensa la pérdida en valoración del plato, dado por la condición de $\alpha \geq \frac{1}{N}$. Si se cumple, implica que el plato es lo suficientemente "valioso" en relación a su sobreprecio, considerando que se diluye entre todos los comensales.

Más aún, si $\alpha > \frac{1}{N}$, ordenar H se vuelve una estrategia estrictamente dominante, por lo que L está estrictamente dominada por H , y, por racionalidad de los comensales, nunca jugarán dicha estrategia. En consecuencia, el único equilibrio posible en estrategias puras es el perfil simétrico (H, \dots, H) .

En el caso donde $\alpha = \frac{1}{N}$, el comensal i está indiferente entre ordenar H ó L , dado que ambas le brindan la misma utilidad. Por simplicidad, en lo que sigue se descarta el análisis de dicho caso. Sólo se analizarán equilibrios simétricos.

En el caso de que $\alpha < \frac{1}{N}$, el perfil de estrategias (H, \dots, H) deja de ser equilibrio. Dado que no se pretende una caracterización exhaustiva del conjunto de equilibrios, sino determinar las regiones del espacio de parámetros para los cuales los resultados experimentales se sostienen como equilibrios, no se amplía el análisis sobre este caso: lo único relevante es que el perfil de sobreconsumo deja de constituir un equilibrio en puras cuando $\alpha < \frac{1}{N}$.

Finalmente, para el escenario de pago colectivo se puede establecer:

$$EN : \left\{ (H, \dots, H), \alpha > \frac{1}{N} \right\}$$

Pago Individual ($R = I$)

Bajo el régimen de pago individual, la utilidad del comensal i está dada por:

$$U_i(O_i) = u_{O_i} - p_{O_i}$$

y Gneezy et al. (2004) muestran que el equilibrio resultante es el perfil de estrategias donde todos ordenan el plato barato.

Resultado 2: Bajo un régimen de pago individual, el perfil simétrico (L, \dots, L) constituye un Equilibrio de Nash para cualquier valor de $\alpha \in (0, 1)$.

Demostración: Ver Apéndice 3

Nótese que, bajo el régimen de pago individual, no hay presencia de externalidades. Por supuesto del modelo, L domina estrictamente a H , lo que genera que, si los jugadores son racionales, nunca jueguen H y el único equilibrio posible en estrategias puras sea (L, \dots, L) .

Por lo tanto:

$$EN : \{(L, \dots, L)\}, \forall \alpha$$

Vale remarcar que el perfil de equilibrios donde los comensales ordenan el plato barato, L , es Pareto óptimo. Esta configuración minimiza el costo total de la mesa, y asegura que cada agente afronte exclusivamente el costo de su propia decisión. Más aún, el Equilibrio de Nash (L, L, \dots, L) Pareto domina a (H, H, \dots, H) . Por ende, cuando se hable de "resolver" el dilema, en el fondo se estará refiriendo a garantizar la realización del equilibrio Pareto óptimo en la cena.

Para ilustrar los resultados obtenidos y clarificar la lógica de los equilibrios bajo ambos regímenes, a continuación se presenta un ejemplo numérico simple: Sea $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ y sean $u_H = 100$, $u_L = 40$, $p_L = 20$ y $p_H = 90$, los valores de los parámetros de manera tal que se cumpla que $\alpha > \frac{1}{2}$.

Bajo el régimen de pago colectivo, la matriz de pagos resultante es:

	H	L
H	10; 10	75; -15
L	-15; 75	20; 20

Table 1: Matriz de pagos con división colectiva

$$EN : \{(H, H)\}$$

De este modo, se observa que el perfil (L, L) Pareto domina a (H, H) , y, sin embargo, no constituye un equilibrio dado que H es una estrategia estrictamente dominante para ambos jugadores.

Por otro lado, la matriz de pagos bajo el régimen individual es:

	H	L
H	10; 10	10; 20
L	20; 10	20; 20

Table 2: Matriz de pagos con división individual

$$EN : \{(L, L)\}$$

ilustrando así los resultados obtenidos en el caso general.

3 El Problema de la Mesa

3.1 Juego Simultáneo con Votación

En esta sección se introduce una modificación al dilema original mediante la incorporación de una fase de votación posterior a la elección de los platos. Mientras que en la versión estándar del juego los comensales conocen ex-ante el régimen de pago, en este juego la decisión sobre cómo dividir la cuenta es endógena.

Específicamente, el nuevo juego contiene 2 etapas. En la primera, los comensales ordenan sus platos, y, posteriormente, votan si la cuenta se paga de manera colectiva o individual. Se define mediante un criterio de mayoría simple.

Formalmente, sea Γ'_N la forma normal del juego, caracterizada por $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ $\forall i \in \mathcal{I} \in \mathbb{N}$ la cantidad de comensales presentes en la cena, $s_i = (O_i, V_i(O))$ la estrategia del comensal i , con $O \in \{H, L\}$ siendo la orden y $V \in \{C, I\}$ el voto, siendo a su vez C el voto por el pago colectivo e I el voto por el pago individual, y sea $U_i = u_{O_i} - c_{O_i}$ la utilidad del comensal i .

Se realizará el análisis de equilibrio mediante un proceso de inducción hacia atrás.

Segunda etapa: Votación

En la segunda etapa, una vez que todos los jugadores realizaron su pedido, cada comensal emite un voto sobre cómo dividir la cuenta. El régimen que prevalece es aquel que consiga la mayoría de votos, por lo que el régimen de pago del juego se puede definir como: ¹

$$R = \begin{cases} C & \text{si } \#\{V_i = C\} > \frac{N}{2} \\ I & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Resultado 3: El voto está completamente determinado por la orden.

Demostración: Ver Apéndice 4.

La etapa de votación está determinada endógenamente por los pedidos llevados a cabo en la primera etapa. Dados los incentivos del juego, votar C tras pedir H y votar I tras pedir L constituyen estrategias débilmente dominantes para todos los jugadores. En este trabajo, se restringe el análisis a aquellos equilibrios en los que

¹Nótese que si N es par, hay que definir una *tie-breaking rule*. Sin embargo, resulta trivial para este análisis. Bajo reglas que favorezcan el pago colectivo o el individual, se preservan las condiciones

los jugadores adoptan estas estrategias, es decir, aquellos equilibrios en estrategias débilmente dominantes.

Esta selección no simplifica el tratamiento formal, sino que también se encuentra sólidamente justificada desde un punto de vista conceptual. Tal como sucede en las subastas de segundo precio (Vickrey, 1961), donde los equilibrios en puras se dan cuando los participantes juegan estrategias débilmente dominantes, en este juego se adopta el mismo foco. Como consecuencia, el análisis de equilibrio se restringe a aquellos donde el voto queda completamente determinado, y por lo tanto, la única decisión estratégicamente relevante se encuentra en la primera etapa: la elección del plato.

A modo de resumen visual:

$$\begin{array}{l} \text{Ordenó } H \quad \rightarrow \quad \text{Vota } C \\ \text{Ordenó } L \quad \rightarrow \quad \text{Vota } I \end{array}$$

Primera etapa: Pedidos

En la primera etapa del juego, los individuos que participan de la cena pueden elegir entre H y L , sabiendo que, si eligen H , en la segunda etapa votarán por C , y si eligen L , votarán por I . Dicho esto, los pagos que enfrentan son los siguientes:

$$U(H, C|H, C) = u_H - p_H$$

para el plato caro, y

$$U(L, I|L, I) = u_L - p_L$$

para el plato barato.

Dado que la primera etapa es un juego estático, ningún comensal observa lo que el otro ordenó, por lo que cada uno busca maximizar su utilidad para toda estrategia posible de los demás jugadores.

En pos de una mayor eficiencia, sabiendo que el voto está determinado por el plato, directamente se analizarán los perfiles de estrategias "clásicos" $((L, I)^N$ y $(H, C)^N$) y se buscarán condiciones para los incentivos al desvío. Nótese que el análisis de los perfiles "inversos" $((H, I) \wedge (L, C))$ son absurdos dadas las conclusiones y supuestos de la primera etapa. No es posible votar I luego de haber pedido H , como tampoco es posible votar C luego de haber pedido L .

Resultado 4: Bajo los supuestos del modelo y restringiendo el análisis a perfiles simétricos en estrategias puras donde el voto queda determinado por la orden, los

Equilibrios de Subjuegos Perfectos del juego con votación están dados por $(H, C)^N$ si $\alpha > \frac{1}{N}$ y $(L, I)^N \forall \alpha$.²

Demostración: Ver Apéndice 5.

De forma similar:

$$ESP : \{(L, I)^N\}, \quad \left\{ (H, C)^N, \alpha > \frac{1}{N} \right\}$$

Dados los supuestos de este juego, se logra una estructura en la que el voto no induce incentivos estratégicos adicionales, sino que simplemente revela las preferencias implícitas en la elección del plato. Por ende, la etapa de votación actúa únicamente como un mecanismo automático que selecciona el régimen de pago.

En este marco, los incentivos de la primera etapa coinciden con los del dilema original, y como consecuencia, se reproduce el mismo umbral sobre el parámetro α , que determina qué perfil simétrico se sostendrá en equilibrio.

²Lógicamente, además se pide que $\alpha \in (0, 1)$. Esto será supuesto para la caracterización de todos los equilibrios.

3.2 Juego Secuencial con Votación

En esta sección se analiza una extensión del juego presentado anteriormente, en la que los N comensales ordenan sus platos de manera secuencial. El orden de los pedidos se da acorde a la posición de los comensales en la mesa, es decir, el más cercano al mozo pide primero, el segundo más cercano al mozo pide segundo, y así sucesivamente hasta llegar al N -ésimo comensal. La resolución del juego se realiza mediante un proceso de inducción hacia atrás.³

Segunda etapa: Votación

Nótese que la segunda etapa del juego no se modifica con respecto al juego anterior, por lo que todo comensal que haya elegido el plato H votará C , mientras que aquellos que hayan ordenado el plato L votarán I . De este modo, el voto queda endógenamente determinado por la acción en la primera etapa.

Primera etapa: Pedidos

Dado que el voto está inducido por el pedido, los jugadores saben que sus decisiones afectan tanto el régimen de pago (al igual que antes) como también las decisiones de los jugadores que los siguen. En este contexto, la cantidad de platos caros observados hasta un momento dado se convierte en una señal directa sobre qué régimen de pago se implementará, ya que la regla de votación depende del número total de votos a favor de C , que es equivalente al número de platos caros observados, k . Decimos que el comensal es *pivotal* si, con su pedido, determina qué régimen de pago prevalecerá.

En contraste con el juego simultáneo, en el modelo secuencial no resulta trivial el caso de empates, por lo que se llevará a cabo un análisis de equilibrio para dos escenarios: N comensales impares y N comensales pares por separado.

3.2.1 Juego Secuencial con Votación para N Jugadores Impares

Sea $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ con $N = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, la cantidad de comensales presentes en la cena.

Resultado 5: En el juego secuencial con votación y número impar de comensales, el espacio de Equilibrios de Subjuegos Perfectos está dado por $(H, C)^N$ si $\alpha > \frac{m+1}{2m+1}$ y $(L, I)^N \forall \alpha$.

Demostración: Ver Apéndice 6

³La forma normal del juego sigue siendo Γ'_N

El resultado indica que:

$$ESP : \{ (L, I)^N \}, \quad \left\{ (H, C)^N, \alpha > \frac{m+1}{2m+1} \right\}$$

Nótese que el umbral para α en el juego secuencial es mayor al que figuraba en el juego simultáneo. En el último mencionado, cada jugador elegía su plato sin conocer las decisiones de los demás, todos decidían "a ciegas". Y para que nadie quisiera desviarse del perfil de sobreconsumo, se pedía que la reducción de utilidad por el cambio a L sea mayor a la reducción de costo total. La condición crítica, $\alpha > \frac{1}{N}$ reflejaba esa lógica.

En el juego secuencial, en cambio, cada jugador toma su decisión condicionado a la información revelada por los pedidos previos. Esta estructura modifica de manera fundamental los incentivos, ya que permite que cada jugador actualice su creencia sobre el régimen de pago final en función de las órdenes observadas.

Por ejemplo, si un comensal observa que ya se ordenaron suficientes platos caros H como para garantizar una mayoría, sabe que el régimen de pago colectivo C se implementará independientemente de su propia orden. Simétricamente, si observa que no es posible alcanzar una mayoría de platos caros H , infiere que el pago será individual, I , y por lo tanto su mejor respuesta será pedir L .

En consecuencia, solo los casos donde el jugador es pivotal (y por ende es el que establece qué régimen prevalece en la segunda etapa) son los que definen el umbral crítico para sostener los equilibrios, dado que se exige que el comensal prefiera no desviarse del perfil simétrico. En particular, el valor $\alpha = \frac{m+1}{2m+1}$ refleja el incentivo necesario para que el jugador pivotal, que observa m pedidos previos del plato H como también de L , prefiera pedir el plato H y consolidar el régimen de pago C antes que pedir L y establecer el régimen I .

Este nuevo umbral entonces resulta más exigente que el correspondiente al juego simultáneo, debido a que el desvío del jugador pivotal desde (H, C) ofrece, en comparación a la situación estática, una ganancia mayor con respecto a la reducción de costos. En el juego previo, el régimen de pago ya estaba establecido, por lo tanto el desvío al plato barato reducía el costo individual a $\frac{(N-1)p_H + p_L}{N}$. Sin embargo, en este juego secuencial la acción del jugador pivotal define qué régimen se va a implementar, por lo que si se desvía a L , su costo individual será p_L , con $p_L < \frac{(N-1)p_H + p_L}{N}$.

Por lo tanto, para inducir el sobreconsumo, se necesita que la utilidad marginal de H con respecto a L sea mayor que antes. Se tienen que contrarrestar ambos

incentivos, lo que genera un valor crítico de α mayor.

3.2.2 Juego Secuencial con Votación para N Jugadores Pares

Sea $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ con $N = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, la cantidad de comensales presentes en la cena. Dado que es un número par y hay empates, se define la siguiente *tie-breaking rule* $\tau(\cdot)$:

$$\tau(\cdot) = \begin{cases} \tau(C) & \text{se resuelve a favor del Pago Colectivo} \\ \tau(I) & \text{se resuelve a favor del Pago Individual} \\ \tau(\pi) & \text{se resuelve probabilísticamente} \end{cases}$$

siendo $\tau(\pi) = \pi C + (1 - \pi)I$, con $\pi = Pr(C)$

Resultado 6: Con $N = 2$ y una tie breaking rule individual, se resuelve el Dilema del Comensal Inescrupuloso.

Demostración: Ver apéndice 7

Resultado 7: En el juego secuencial con votación y número par de comensales, la regla de desempate que más restringe el equilibrio ineficiente es $\tau(I)$, luego $\tau(\pi)$, y por último $\tau(C)$

Demostración: Ver apéndice 8

De esta manera, dada la regla de desempate, se pueden caracterizar los equilibrios como:

$$ESP_{\tau(C)} : \{(L, I)^N\}, \quad \left\{ (H, C)^N, \alpha > \frac{1}{2m} \right\}$$

$$ESP_{\tau(I)} : \{(L, I)^N\}, \quad \left\{ (H, C)^N, \alpha > \frac{m+1}{2m} \right\}$$

$$ESP_{\tau(\pi)} : \{(L, I)^N\}, \quad \left\{ (H, C)^N, \alpha > \frac{1}{2m} + \frac{1-\pi}{2} \right\}$$

Los umbrales críticos que resultan de las distintas reglas de desempate son α_C

para $\tau(C)$, α_I para $\tau(I)$ y α_π para $\tau(\pi)$. El umbral más restrictivo resulta ser α_I , seguido por α_π , y, por último, α_C .

La razón por la cual la regla $\tau(I)$ resulta ser la más restrictiva se debe a que, ante un empate, el jugador conoce con certeza que si elige el plato caro deberá afrontar el costo completo de manera individual. Esta estructura elimina toda posibilidad de diluir el gasto entre los demás comensales, generando así el menor beneficio neto esperado por desviarse hacia la elección de H en comparación con las otras reglas. En consecuencia, el jugador sólo estará dispuesto a seleccionar el plato caro si α es suficientemente elevado, es decir, si la utilidad marginal generada por el plato caro excede proporcionalmente su mayor costo.

En el caso de la regla probabilística $\tau(\pi)$, el desincentivo a elegir el plato caro opera de forma distinta: se introduce incertidumbre respecto del régimen de pago. El jugador no sabe si deberá asumir el costo completo o si el mismo será diluido entre todos los comensales. Esta ambigüedad eleva el costo esperado de elegir H en relación con el escenario colectivo, y por ende también incrementa el umbral crítico de α necesario para sostener el equilibrio ineficiente, aunque en menor medida que bajo la regla individual.

Finalmente, la regla $\tau(C)$ es la menos restrictiva, dado que garantiza al jugador que el costo del plato caro será compartido entre todos en el caso de un empate. Esta certeza reduce significativamente el incentivo a desviarse hacia L , lo cual favorece la estabilidad del equilibrio ineficiente incluso para valores "bajos" de α .

Gráficamente:

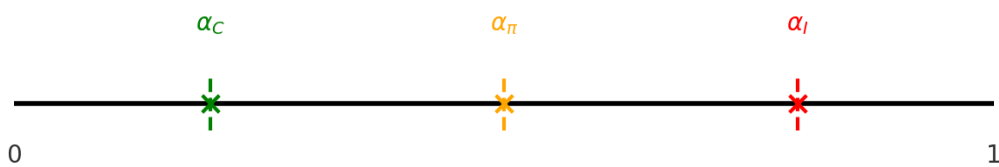


Figure 1: Valor de los umbrales críticos necesarios para sostener el equilibrio simétrico ineficiente bajo distintas reglas de desempate

4 El Problema de la Mesa con Altruismo

Con el objetivo de analizar cómo se ven afectados los equilibrios del dilema original al incorporar preferencias altruistas, se adopta una función de utilidad propuesta por Levine en su trabajo *"Modeling Altruism and Spitefulness in Experiments"* (1997). Dicha función permite capturar tanto la preocupación por el bienestar ajeno como actitudes de reciprocidad positiva o negativa. La utilidad del jugador i se define como:

$$v_i = (u_i - c_i) + \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} (u_j - c_j)$$

donde $a_i \in (-1, 1)$ es el coeficiente de altruismo del jugador i , tal que $a_i > 0$ denota un jugador altruista, $a_i < 0$ denota un jugador malévolo, y $a_i = 0$ denota un jugador egoísta. Por otro lado, λ es el parámetro que mide el nivel de reciprocidad con respecto al grado de altruismo de los otros jugadores.

Se mantienen todos los supuestos del juego original. El análisis con las funciones de utilidad *à la Levine* se hará para los juegos simultáneo y secuencial.

4.1 Juego simultáneo con Votación y Preferencias Altruistas

Considérese un juego bayesiano con N comensales en el cual cada uno tiene una estrategia $s_i = (O_i, V_i(O))$ y un tipo $a_i \in \{a^-, a^{\sim}, a^+\}$ que determina su coeficiente de altruismo, junto con las funciones de utilidad previamente establecidas.

Segunda etapa: Votación

Resultado 8: Con funciones de utilidad altruistas, el voto se mantiene completamente determinado por la orden si $a_i \leq \frac{1+\lambda}{N-1} - \lambda \bar{a}_i$, donde $\bar{a}_{-i} \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} a_j$.

Demostración: Ver apéndice 9

Este resultado sigue siendo válido, aún bajo preferencias altruistas, siempre que el coeficiente a_i sea menor al a crítico. Se hará un análisis únicamente del caso donde se cumple dicha condición. En efecto, votar coherentemente con el pedido constituye una estrategia débilmente dominante para todo jugador que no sea

excesivamente altruista. Esto implica que nuevamente observamos:

$$\begin{aligned} \text{Ordenó } H &\rightarrow \text{ Vota } C \\ \text{Ordenó } L &\rightarrow \text{ Vota } I \end{aligned}$$

En el caso de que el jugador fuese excesivamente altruista, al pedir H votaría I , y al pedir L votaría C . Este resultado da a entender que, si el comensal i no cumple con el umbral crítico de altruismo, entonces valora más el bienestar de los demás en comparación a su propia felicidad, dado que la reducción de costos que él genera sobre los $j \neq i$ agentes le brinda una mayor utilidad que la satisfacción dada por el plato ordenado.

Primera etapa: Pedidos. Caso: Información Completa

Dado que, una vez más, el voto queda completamente determinado por el pedido, la única instancia de decisión estratégica relevante se concentra en la primera etapa del juego. En este escenario simultáneo, cada comensal elige entre los platos H y L , con el objetivo de maximizar su utilidad total, considerando tanto su beneficio directo como el impacto que su decisión genera sobre los demás.

Comenzaremos analizando el caso en el que los tipos a_i de los jugadores son de conocimiento común.

Resultado 9: Bajo preferencias altruistas e información completa, los Equilibrios de Subjuegos Perfectos del juego en dos etapas están dados por $(H, C)^N$ si $\alpha > \frac{1+(N-1)\omega_{max}}{N}$ y $(L, I)^N$ si $\alpha < \frac{1+(N-1)\omega_{max}}{N}$.

Demostración: Ver apéndice 10

De forma similar:

$$ESP : \left\{ (L, I)^N \right\}, \quad \left\{ (H, C)^N, \alpha > \frac{1 + (N - 1)\omega_{max}}{N} \right\}$$

Al analizar una desviación del perfil (L, I) , se observa que la decisión de un jugador entre pedir el plato caro o el barato no está influenciada por el grado de altruismo. En efecto, dado que, bajo el régimen de pago individual cada agente asume íntegramente el costo de su consumo, los términos altruistas se cancelan, por lo que la decisión se reduce exclusivamente a una comparación entre el beneficio marginal de consumo y el costo marginal que implica el plato caro.

Por el contrario, bajo el régimen de pago colectivo, la elección de un jugador afecta

directamente el bienestar de los demás al alterar el costo total compartido. En este caso, el parámetro de altruismo incide de forma directa sobre la decisión individual: un comensal altruista internaliza el aumento en el costo que impone sobre el resto al elegir un plato más caro. Por lo tanto, el umbral de desvío depende positivamente de ω_i , el peso efectivo que cada agente asigna al bienestar ajeno. Así, los jugadores más altruistas enfrentan una condición más restrictiva para ordenar el plato caro, mientras que aquellos con preferencias maliciosas o egoístas enfrentan condiciones más laxas.

En ausencia de altruismo, es decir, cuando $a_i = 0$ para todo i , el umbral de equilibrio bajo el régimen colectivo coincide con el obtenido en el caso sin altruismo. La introducción de preferencias altruistas modifica esta dinámica: cuando el altruismo es positivo, actúa como un mecanismo regulador que desalienta el consumo excesivo al hacer más costosa, desde el punto de vista del bienestar social internalizado, la elección del plato caro.

Primera etapa: Pedidos. Caso: Información Incompleta

Consideremos ahora una variación del análisis anterior, en la que los tipos a_i de los agentes no son conocidos, sino que se distribuyen de manera idéntica e independiente según una función de distribución acumulada F_a y media μ_a . Esta especificación introduce incertidumbre sobre el grado de altruismo de los demás jugadores, y obliga a cada agente a formar expectativas sobre el comportamiento ajeno a partir de la distribución común.

Resultado 10: Bajo preferencias altruistas e información imperfecta, los Equilibrios Bayesiano de Nash del juego en dos etapas están dados por $(H, C)^N$ si $\alpha > \frac{1+(N-1)\omega_{sup}}{N}$ y $(L, I)^N$ si $\alpha < \frac{1+(N-1)\omega_{sup}}{N}$.

Demostración: Ver apéndice 11

De forma similar:

$$EBN : \left\{ (L, I)^N \right\}, \quad \left\{ (H, C)^N, \alpha > \frac{1 + (N - 1)\omega_{sup}}{N} \right\}$$

Bajo información incompleta, el jugador i elige quedarse en el plato caro H si el parámetro α supera un umbral individual que depende tanto de su propio altruismo como de la creencia sobre los demás. Para sostener el equilibrio simétrico en el que todos eligen H , se requiere que todos los posibles tipos cumplan esa condición.

Por tanto, la condición más exigente se da para el tipo más altruista en el soporte, \bar{a} .

En comparación con el caso de información completa, la conclusión es similar, salvo que cada jugador puede tomar decisiones conociendo los altruismos reales de los demás. En ese contexto, la condición de estabilidad del equilibrio también depende de los pesos ω_i , pero estos pueden ajustarse al contexto real y no solo a la creencia media.

En el caso privado, para sostener el equilibrio “todos en H ”, se requiere que incluso el tipo más altruista con incertidumbre sobre los demás quiera quedarse. Esta es una condición más restrictiva que en el caso de información completa, donde los jugadores pueden saber si los demás son poco altruistas y ajustar su acción en consecuencia.

5 Conclusiones

En el presente trabajo, se extendió el Dilema del Comensal Inescrupuloso a través de 3 dimensiones principales: el orden de las decisiones, secuencialidad en los pedidos, y preferencias altruistas. Los resultados obtenidos permiten evaluar con precisión el impacto que las distintas modificaciones institucionales y de preferencias sociales tienen sobre los incentivos y la eficiencia colectiva.

En líneas generales, la introducción de la fase de votación no alteró los resultados vistos en los experimentos. Lógicamente, al haber quedado el voto completamente determinado por el pedido, y al no haber modificado la fase de pedidos con respecto al dilema original, el dilema persiste de la misma manera que en el juego preexistente.

Por otro lado, la introducción de secuencialidad en la fase de pedidos generó que el equilibrio pareto dominado, $(H, C)^N$, se dé en un espacio más restringido para α . Este juego destaca la importancia de las señales informativas para poder lograr equilibrios eficientes en el sentido de Pareto.

Finalmente, la incorporación de preferencias altruistas al modelo introduce la mayor fuerza moderadora posible sobre el consumo "excesivo" en equilibrio entre todas las modificaciones presentadas del Dilema. Adicionalmente, se indica que, mientras menos información tengan los comensales sobre los tipos del resto, más limitado se encontrará el espacio del equilibrio ineficiente.

Definiendo $\alpha^{SIM} \equiv \frac{1}{N}$, $\alpha^{SEC} \equiv \frac{m+1}{2m+1}$, $\alpha^{LEV} \equiv \frac{1+(N-1)\omega_{max}}{N}$ y $\alpha^{INC} \equiv \frac{1+(N-1)\omega_{sup}}{N}$, se puede observar de manera gráfica cómo cada juego restringe el espacio de equilibrios:⁴

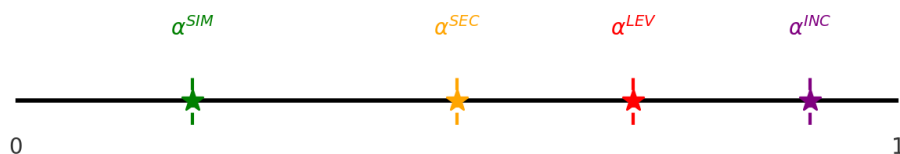


Figure 2: Valor de los umbrales críticos necesarios para sostener el equilibrio simétrico ineficiente bajo las distintas modificaciones del Dilema

Si bien se logra restringir el soporte del equilibrio Pareto dominado mediante mod-

⁴Válido si $N \geq 3$ y $\omega_{max} > 0.5$

ificaciones estructurales del juego y de preferencias, los efectos de las mismas son limitados con respecto a la resolución del Dilema, dado que para ciertos valores de α , persiste la coordinación en el sobreconsumo.

6 Referencias

1. Gneezy, U., Haruvy, E., & Yafe, H. (2004). *The inefficiency of splitting the bill*. The Economic Journal, 114(495), 265–280.
2. Levine, D. K. (1997). *Modeling altruism and spitefulness in experiments*. Review of Economic Dynamics, 1(3), 593–622.
3. Vickrey, W. (1961). *Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders*. The Journal of Finance, 16(1), 8–37
4. Zhukova, V. (2010). *Is monetary gain the only motivation? Evidence from Diner's Dilemma experiment*. University of Passau.

Apéndice 1

En este apéndice se resumen los supuestos del Dilema del Comensal inescrupuloso en la condición de $\alpha \in (0, 1)$

Tenemos:

$$\begin{aligned} u_L - p_L > u_H - p_H & \quad \wedge \quad u_H > u_L \\ u_H - u_L < p_H - p_L & \quad \wedge \quad u_H - u_L > 0 \end{aligned}$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} \Delta u &\equiv u_H - u_L \\ \Delta p &\equiv p_H - p_L \end{aligned}$$

Por lo que el sistema original queda:

$$\begin{cases} \Delta u < \Delta p \\ \Delta u > 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 0 < \Delta u < \Delta p \\ 0 < \frac{\Delta u}{\Delta p} < 1 \end{aligned}$$

Si se define:

$$\alpha \equiv \frac{\Delta u}{\Delta p}$$

Se llega a:

$$0 < \alpha < 1$$

Apéndice 2

Demostración del Resultado 1

Veamos que el Equilibrio de Nash de sobreconsumo cuando los jugadores saben de antemano que el pago de la cuenta será colectivo se da únicamente cuando $\alpha > \frac{1}{N}$.

Si bien éste es un juego estático, supongamos que todos los comensales $i \neq j$ pidieron el plato caro. Si el jugador i pide barato, obtiene una utilidad neta de:

$$U_i(L|O_{-i}) = u_L - \frac{(N-1)p_H + p_L}{N}$$

Pero si el jugador i pide caro, obtiene una utilidad neta de:

$$U_i(H|O_{-i}) = u_H - \frac{Np_H + 0p_L}{N}$$

$$U_i(H|O_{-i}) = u_H - p_H$$

Dado un régimen de pago colectivo establecido, el jugador i siempre querrá pedir el plato caro si se cumple que:

$$\begin{aligned} U_i(H|O_{-i}) &\geq U_i(L|O_{-i}) \\ u_H - p_H &\geq u_L - \frac{(N-1)p_H + p_L}{N} \\ u_H - u_L &\geq \frac{p_H - p_L}{N} \\ \frac{\Delta u}{\Delta p} &\geq \frac{1}{N} \\ \alpha &\geq \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Se toma con igualdad estricta por el motivo explicado en el desarrollo.

Apéndice 3

Demostración del Resultado 2

Veamos que el Equilibrio de Nash cuando los jugadores saben de antemano que el pago de la cena será individual es la situación donde todos piden el plato barato.

Para sostener un equilibrio donde todos piden barato, no deben existir incentivos al desvío en la situación donde todos están pidiendo L :

$$\begin{aligned} U(L|O_{-i}) &\geq U(H|O_{-i}) \\ u_L - p_L &\geq u_H - p_H \\ u_H - u_L &\leq p_H - p_L \\ \alpha &\leq 1 \end{aligned}$$

la cual se cumple siempre por supuesto del modelo.

Apéndice 4

Demostración del Resultado 3

En este apéndice, se demuestra que el voto está completamente ligado al plato pedido en la primera etapa.

El comensal i votará pagar colectivamente, C , siempre y cuando la utilidad de dividir en partes iguales para un plato O sea mayor a la utilidad de pagar individualmente:

$$\begin{aligned}
 U_i(O, C|s_{-i}) &\geq U_i(O, I|s_{-i}) \\
 u_O - \left(\frac{kp_H + (N - k)p_L}{N}\right) &\geq u_O - p_O \\
 p_O &\geq \frac{kp_H + (N - k)p_L}{N}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Esto implica que, lógicamente, si el costo individual de pedir un plato O es mayor o igual que el costo de dividir todo el pedido en partes iguales, los comensales optarán por la segunda opción.

Observemos ahora la elección de cada plato por separado en la primera etapa y su impacto en la desigualdad (1). Si el comensal i pidió el plato caro, H , votará dividir la cuenta en partes iguales, C si:

$$\begin{aligned}
 p_H &\geq \frac{k_{O_i}p_H + (N - k_{O_i})p_L}{N} \\
 p_H - \frac{k_{O_i}p_H}{N} &\geq \frac{(N - k_{O_i})p_L}{N} \\
 \frac{Np_H - k_{O_i}p_H}{N} &\geq \frac{(N - k_{O_i})p_L}{N} \\
 (N - k_{O_i})p_H &\geq (N - k_{O_i})p_L \\
 p_H &\geq p_L
 \end{aligned}$$

que siempre se cumple, por lo que se puede afirmar que siempre que el comensal i pida el plato caro, votará por dividir la cuenta en partes iguales.

Por otro lado, si el comensal i pidió el plato barato, L , votará dividir la cuenta en

partes iguales, C si:

$$\begin{aligned}
p_L &\geq \frac{k_{si}p_H + (N - k_{si})p_L}{N} \\
p_L - \left(\frac{N - k_{si}}{N}\right)p_L &\geq \frac{k_{si}p_H}{N} \\
\frac{Np_L - (N - k_{si})p_L}{N} &\geq \frac{k_{si}p_H}{N} \\
\frac{k_{si}p_L}{N} &\geq \frac{k_{si}p_H}{N} \\
p_L &\geq p_H
\end{aligned}$$

lo cual no se cumple nunca, lo que indica que si el comensal i pide el plato barato, jamás votará por dividir en partes iguales; votará por pagar su plato individualmente.

Apéndice 5

Demostración del Resultado 4

En este apéndice se demuestra que, al endogeneizar el voto sobre la división de la cuenta, los perfiles de equilibrio y las condiciones necesarias para sostenerlos se mantienen idénticas respecto al Dilema del Comensal original.

Se hace un análisis mediante incentivos al desvío de perfiles extremos.

Perfil $(L, I)^N$

Comenzando por el caso donde todos los individuos presentes en la cena piden L y votan I , el comensal i tendrá incentivos al desvío si:

$$U^{desvio} \geq U^{EQ}$$

Su mejor desvío posible es elegir el plato H y votar por el pago C . Sin embargo, al ser un régimen de pago determinado por mayoría simple, su voto no es determinante, y la cuenta se sigue pagando individualmente. La desigualdad pasa a ser:

$$\begin{aligned}
u_H - p_H &\geq u_L - p_L \\
\alpha &\geq 1
\end{aligned}$$

Por supuesto del modelo, dicha desigualdad no se cumple, y el perfil de estrategias $(L, I)^N$ es un equilibrio de sub juegos perfecto.

Perfil $(H, C)^N$

El comensal i se desviará de pedir H y votar C si

$$U^{desvio} \geq U^{EQ}$$

Su mejor desvío posible es elegir el plato L y votar por I , solo que la cuenta se sigue dividiendo en partes iguales. Bajo el pago equitativo, cada jugador paga $\frac{Np_H}{N} = p_H$, pero si se desvía, paga $\frac{(N-1)p_H + p_L}{N}$. Para desviarse, entonces, tiene que valer que:

$$\begin{aligned} u_L - \left(\frac{k_{si}p_H + (N - k_{si})p_L}{N} \right) &\geq u_H - p_H \\ u_L - \left(\frac{(N-1)p_H + p_L}{N} \right) &\geq u_H - p_H \end{aligned}$$

Expresando el incentivo al desvío como Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (u_H - p_H) - \left[u_L - \left(\frac{(N-1)p_H + p_L}{N} \right) \right] \\ \Delta &= (u_H - u_L) - \left[p_H - \left(\frac{(N-1)p_H + p_L}{N} \right) \right] \\ \Delta &= (u_H - u_L) - \left(\frac{p_H + p_L}{N} \right) \end{aligned}$$

Y para que $(H, C)^N$ sea un equilibrio de subjugos perfecto, debe valer que:

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 &\iff u_H - u_L \geq \frac{p_H + p_L}{N} \\ \alpha &\geq \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Apéndice 6

Demostración del Resultado 5

El objetivo de este apéndice es mostrar que la incorporación de secuencialidad para el caso de N comensales impares restringe el espacio del equilibrio donde hay sobreconsumo.

Primero, se analiza el juego con 3 comensales para ganar intuición. Luego, se generaliza mediante un argumento de inducción.

En este caso, el esquema de pagos se decide por mayoría simple, y sigue valiendo que el voto queda determinado por la orden. A diferencia de los juegos anteriores, donde se hacía un análisis directo de perfiles extremos, primero se encuentran las funciones de mejor respuesta a través de un proceso de inducción hacia atrás, y luego se analiza la estabilidad de los perfiles extremos.

Elección del Tercer Comensal:

Sea $k_{sj} \in \{0, 1, 2\}$ la cantidad de platos H pedidos observados por el tercer comensal, y sea R el régimen de pago. Nótese que k resume toda la información sobre las estrategias de los comensales previos. Sus posibles niveles de utilidad al pedir los distintos platos, H o L , dadas las decisiones de los comensales previos, $O_j \in \{H, L\}$, $j \neq i$, serán:

$$U_3(H|k_{sj} = k) = \begin{cases} u_H - p_H, & k = 2 \quad (R = C), \\ u_H - \frac{2p_H + p_L}{3}, & k = 1 \quad (R = C), \\ u_H - p_H, & k = 0 \quad (R = I) \end{cases}$$

y

$$U_3(L|k_{sj} = k) = \begin{cases} u_L - \frac{2p_H + p_L}{3}, & k = 2 \quad (R = C), \\ u_L - p_L, & k = 1 \quad (R = I), \\ u_L - p_L, & k = 0 \quad (R = I) \end{cases}$$

respectivamente.

Si $k = 2$, el tercer comensal elegirá el plato caro H si:

$$\begin{aligned} u_H - p_H &\geq u_L - \frac{2p_H + p_L}{3} \\ \Delta u &\geq \frac{1}{3} \Delta p \\ \alpha &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por otra parte, si $k = 1$, elegirá H cuando

$$\begin{aligned} u_H - \frac{2p_H + p_L}{3} &\geq u_L - p_L \\ \alpha &\geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, si $k = 0$, es trivial demostrar que la decisión óptima será L sin importar el valor de α .

La decisión del tercer comensal puede resumirse en:

$$O_3(k, \alpha) = \begin{cases} H & \text{si } k = 2, \alpha \geq \frac{1}{3} \\ H & \text{si } k = 1, \alpha \geq \frac{2}{3} \\ L & \text{si } k = 2, \alpha < \frac{1}{3} \vee k = 1, \alpha < \frac{2}{3} \vee k = 0 \quad \forall \alpha \end{cases}$$

Elección del Segundo Comensal

Definiendo $k'_{sj} \in \{0, 1\}$ como la cantidad de platos H observados por el segundo comensal, es posible redefinir k_{sj} como $k_{sj} = k'_{sj} + 1\{O_2 = H\}$, con el último argumento denotando una función indicadora que toma valor 1 cuando el segundo comensal ordena el plato H .

Volviendo al foco principal de la sección, el problema del segundo individuo se resume en comparar los distintos niveles de utilidad asociados a los posibles outcomes, teniendo en cuenta la función de mejor respuesta del tercer comensal:

Intuitivamente, si el comensal 2 observó un plato caro, su acción a su vez influenciará sobre el último comensal. Si pide un plato caro, el último comensal observará 2 platos caros, y entonces pedirá el plato caro si $\alpha \geq \frac{1}{3}$. Por otro lado, si es menor a $\frac{1}{3}$, el último comensal pedirá L . Formalmente

$$U_2(H|k'_{sj} = k', \alpha) = \begin{cases} u_H - p_H & k' = 1, \alpha \geq \frac{1}{3} \\ u_H - \frac{2p_H - p_L}{3} & k' = 1, \alpha < \frac{1}{3} \vee k' = 0, \alpha \geq \frac{2}{3} \\ u_H - p_H & k' = 1, \alpha < \frac{1}{3} \vee k' = 0, \alpha < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Por otro lado, si el primer comensal pidió H y el segundo pide L , influencia la decisión del último comensal de manera tal que sólo observa 1 plato caro pedido. Por ende, la utilidad del comensal 2 de pedir el plato L es:

$$U_2(L|k'_{sj} = k', \alpha) = \begin{cases} u_L - \frac{2p_H + p_L}{3}, & k' = 1, \alpha \geq \frac{2}{3} \\ u_L - p_L, & k' = 1, \alpha < \frac{2}{3} \vee k' = 0 \end{cases}$$

Analizando para los distintos valores de k' , se obtiene que la mejor respuesta del segundo comensal está dada por:

$$O_2(\alpha) = \begin{cases} H & \text{si } \alpha \geq \frac{2}{3} \\ L & \text{si } \alpha < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Se deriva de comparar todos los distintos casos. Primero, supongamos que $k' = 1$

Si $\alpha \geq 2/3$, eligirá H si

$$\begin{aligned} u_H - p_H &\geq u_L - \frac{2p_H + p_L}{3} \\ \Delta u &\geq \frac{p_H - p_L}{3} \\ \alpha &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Si $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, eligirá H si

$$u_H - p_H \geq u_L - p_L$$

condición que es absurda.

Si $\alpha < \frac{1}{3}$, eligirá H si

$$\begin{aligned} u_H - \frac{2p_H + p_L}{3} &\geq u_L - p_L \\ \Delta u &\geq \frac{2p_H - 2p_L}{3} \\ \alpha &\geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Por ende, para $k' = 1$, eligirá H si $\alpha \geq \frac{2}{3}$ y L caso contrario.

Ahora, supongamos que $k' = 0$.

Si $\alpha < \frac{2}{3}$, eligirá H si

$$u_H - p_H \geq u_L - p_L$$

lo cual es absurdo.

Si $\alpha \geq \frac{2}{3}$, eligirá H si

$$\begin{aligned} u_H - \frac{2p_H + p_L}{3} &\geq u_L - p_L \\ \alpha &\geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $k' = 0$, la función de mejor respuesta para el segundo comensal estará dada por H si $\alpha \geq \frac{2}{3}$ y L en caso contrario.

Si se integran ambas mejores respuestas, se obtiene lo enunciado previo a la demostración.

Elección del Primer Comensal

El primer comensal maximiza su utilidad sujeto a las funciones de mejor respuesta de los otros dos comensales. Sus distintos niveles de utilidad asociados a los distintos platos son:

$$U_1(H|\alpha) = u_H - p_H$$

y

$$U_2(L|\alpha) = \begin{cases} u_L - \frac{2p_H + p_L}{3} & \alpha \geq \frac{2}{3} \\ u_L - p_L & \alpha < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Nótese que si el primer comensal pide H , para cualquier nivel de α , su utilidad será la misma. O el pago será colectivo y el costo promedio será el individual (dado que todos piden H), o los demás pedirán L y el pago será individual.

Es claro entonces que la decisión óptima del primer comensal está dada por:

$$O_1(\alpha) = \begin{cases} H & \text{si } \alpha \geq \frac{2}{3} \\ L & \text{si } \alpha < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ya habiendo obtenido las funciones de mejor respuesta de todos los jugadores, es posible analizar la estabilidad de los equilibrios del dilema clásico.

Perfil (L, L, L)

El perfil de equilibrio en el cual todos los comensales piden el plato barato se da únicamente cuando $\alpha < \frac{2}{3}$. En dicho caso, el primer comensal ordena L , por lo que $k' = 0$, obligando al segundo comensal a ordenar también L . Esto último genera que $k = 0$, y la decisión óptima del tercer comensal en dicho caso coincide con la de los otros dos individuos.

Perfil (H, H, H)

Es posible realizar el mismo argumento para el análisis del segundo equilibrio simétrico del dilema original. Todos los comensales pedirán el plato caro cuando $\alpha \geq \frac{2}{3}$.

Ahora se busca generalizar el resultado encontrado para 3 comensales. Sea $N = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{N}$. Al igual que en el juego anterior, la cuenta se divide en partes iguales (régimen C) si y sólo si la cantidad total de pedidos caros k supera la mitad estricta de los comensales, esto es $k > m$ ⁵. Nuevamente, el voto está completamente inducido por la orden: pedir H implica votar C y pedir L implica votar I . Procedemos de la misma manera que en el juego anterior. Se encontrarán las funciones de mejor respuesta por inducción hacia atrás, y luego se analizará la estabilidad de los perfiles extremos.

Elección del $2m + 1$ -ésimo comensal

Sea $k_{sj} \in \{0, \dots, 2m\}$ la cantidad de platos H pedidos observados por el último comensal. Decimos que el comensal es *pivotal* si, con su pedido, determina qué régimen de pago prevalecerá. En caso contrario, la trayectoria del equilibrio ya estará determinada, y el comensal actúa siguiendo los pedidos anteriores. Buscamos la función de mejor respuesta separando en los posibles casos a los que se puede enfrentar dicho comensal.

Si $k > m$, el $2m + 1$ -ésimo comensal elegirá H siempre que:

$$\begin{aligned}
 & U(H|\cdot) \geq U(L|\cdot) \\
 u_H - \frac{(k+1)p_H + (2m-k)p_L}{2m+1} & \geq u_L - \frac{kp_H + (2m+1-k)p_L}{2m+1} \\
 \Delta u & \geq \frac{\Delta p}{2m+1} \\
 \alpha & \geq \frac{1}{2m+1} := \alpha_{min} \tag{5}
 \end{aligned}$$

Si $k < m$, elegirá H siempre que

$$\begin{aligned}
 & U(H|\cdot) \geq U(L|\cdot) \\
 u_H - p_H & \geq u_L - p_L
 \end{aligned}$$

lo cual no se cumple nunca.

⁵La mitad "justa" es $m + 0.5$, por lo que el régimen que ganará será aquel que contenga más de m votos

Por último, si $k = m$, eligirá H siempre que

$$\begin{aligned}
u_H - \frac{(m+1)p_H + mp_L}{2m+1} &\geq u_L - p_L \\
\Delta u &\geq \frac{\Delta p(m+1)}{2m+1} \\
\alpha &\geq \frac{m+1}{2m+1} \equiv \alpha^*
\end{aligned} \tag{6}$$

La decisión del último comensal puede resumirse en:

$$O_{2m+1}(k, \alpha) = \begin{cases} H & \text{si } k > m, \alpha \geq \alpha_{min} \\ H & \text{si } k = m, \alpha \geq \alpha^* \\ L & \text{si } k < m, \forall \alpha \vee k > m, \alpha < \alpha_{min} \vee k = m, \alpha < \alpha^* \end{cases}$$

Elección del 2m-ésimo comensal

Sea $k'_{sj} \in \{0, \dots, 2m-1\}$ la cantidad de platos H observados por el 2m-ésimo comensal antes de realizar su pedido. Al igual que en la sección anterior, se puede definir $k = k' + 1\{O_{2m} = 1\}$ como el total parcial de pedidos caros si el comensal 2m elige H .

Resulta más simple encontrar la función de mejor respuesta del anteúltimo comensal de forma intuitiva. Recordando que el régimen de pago colectivo prevalecerá únicamente si la cantidad de platos pedidos es mayor a la mitad de comensales presentes en la cena, se puede dividir la situación en diferentes casos.

Si $k' > m$, es decir, si el número de platos caros observados por el 2m-ésimo comensal, es mayor a la mitad del número de comensales, entonces antes de elegir su orden, ya hay al menos $m+1$ platos H ordenados, lo que implica que hay mayoría garantizada para el pago colectivo. Esto obliga al último comensal a pedir H siempre que se cumpla que $\alpha \geq \alpha_{min}$.

En pocas palabras, si $k' > m$, el comensal 2m elige H si $\alpha \geq \alpha_{min}$.

Si $k' = m$, entonces el comensal 2m es pivotal. Si elige H , entonces el último comensal observará $k = m+1$, por lo que su elección asegura el establecimiento del régimen de pago colectivo. Pero si elige L , el comensal pivotal será el último,

ya que este observará $k = m$. El comensal $2m$ eligirá H siempre que $\alpha \geq \alpha^*$.

$$u_H - \frac{(m+1)p_H + mp_L}{2m+1} \geq u_L - p_L$$

$$\alpha \geq \frac{m+1}{2m+1}$$

Si $k' < m$ pero $k' = m - 1$, entonces el comensal $2m$ también es pivotal. Si elige L , entonces el último comensal observará $k = m - 1$, y se verá obligado a ordenar L dado que no existe manera de lograr el régimen colectivo. Por otro lado, si elige H , el último comensal observará $k = m$, y este pasará a ser pivotal. Nuevamente, el comensal $2m$ eligirá H si $\alpha \geq \alpha^*$. Entonces: Si $k' = m - 1$, eligirá H teniendo en cuenta su utilidad esperada. Se puede plantear de manera más simple. El comensal $2n$ observa el valor de α . Si es mayor a α^* , entonces sabe que el último pedirá H si él pide H . Por ende, la decisión se resume en:

$$u_H - \frac{(m+1)p_H + mp_L}{2m+1} \geq u_L - p_L$$

$$\alpha \geq \frac{m+1}{2m+1}$$

Por último, si $k' < m - 1$, se establecerá el régimen de pago individual, ya que no es posible completar mayoría para un régimen colectivo.

De este modo, la función de mejor respuesta del $2m$ -ésimo comensal es:

$$O_{2m}(k', \alpha) = \begin{cases} H & \text{si } k' > m, \alpha \geq \alpha_{min} \\ H & \text{si } k' = m, \alpha \geq \alpha^* \\ H & \text{si } k' = m - 1, \alpha \geq \alpha^* \\ L & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Elección del comensal $i \in \{2m - 1, \dots, 1\}$

Sea k_i la cantidad de platos caros observados por el comensal i . Su decisión se basa en anticipar la trayectoria de pedidos de los jugadores subsiguientes, que actuarán según su función de mejor respuesta.

Supongamos que todo jugador i aplica la regla de umbrales dada por α^* para situaciones donde es pivotal.

De esta manera, si $k_i > m$, el régimen colectivo ya está garantizado, y eligirá H siempre que se cumpla que $\alpha \geq \alpha_{min}$.

Si $k_i \in \{i - m - 1, \dots, m\}$, entonces el comensal i será potencialmente pivotal y eligirá H siempre que $\alpha \geq \alpha^*$.

Por último, si $k_i < i - m - 1$, el comensal i ordenará L .

La regla de decisión generalizada entonces será:

$$O_i(k_i, \alpha) = \begin{cases} H & \text{si } k_i > m, \alpha \geq \alpha_{min} \\ H & \text{si } k_i \in \{i - m - 1, \dots, m\}, \alpha \geq \alpha^* \\ L & \text{caso contrario} \end{cases}$$

De esta forma, se observa que los únicos equilibrios posibles para una cena con N comensales impares que ordenan sus pedidos de manera secuencial serán aquellos simétricos. La realización de cada uno de ellos dependerá del valor de α .

Apéndice 7

Demostración de los Resultado 6

En este apéndice se hace un análisis del juego secuencial con votación para 2 jugadores. Para la regla de desempate individual, se encuentra un resultado esperanzador. Para las demás reglas de desempate, se encuentran umbrales que se generalizarán en el siguiente apéndice.

El objetivo en este apartado es determinar bajo qué condiciones $(L, L; I, I)$ y $(H, H; C, C)$ pueden sostenerse como equilibrios, y además observar cómo el mecanismo de desempate altera los incentivos al desvío de cada jugador.

I. Regla $\tau(C)$

Comenzando por la regla de desempate colectiva, analicemos los casos extremos.

Perfil $(L, L; I, I)$

El comensal i tendrá incentivos al desvío en el perfil de estrategias $(L, L; I, I)$ siempre que:

$$U^{desvio} \geq U^{EQ}$$

En este escenario, donde ambos están pidiendo el plato barato L y la regla de desempate es la colectiva, $\tau(C)$, el payoff del comensal i se resume en:

$$U_i(L, I|L, I) = u_L - p_L$$

y su único desvío posible es H , por lo que el payoff del desvío es

$$U_i(H, C|L, I) = u_H - \left(\frac{p_H + p_L}{2}\right)$$

dado que la regla de desempate es la que favorece el pago colectivo, y si el comensal i pide H mientras que el comensal $j \neq i$ pide L , se va a optar por C .

Los incentivos al desvío entonces serán:

$$\begin{aligned} u_H - \left(\frac{p_H + p_L}{2}\right) &\geq u_L - p_L \\ u_H - u_L &\geq \frac{p_H + p_L}{2} - p_L \\ \Delta u &\geq \frac{\Delta p}{2} \\ \alpha &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lo que implica que el ratio entre el diferencial de utilidad y el diferencial de precios debe ser mayor a $\frac{1}{2}$. Intuitivamente, si el beneficio adicional de consumir el plato H compensa más de la mitad que su costo extra, se descarta $(L, L; I, I)$ como equilibrio.

Perfil $(H, H; C, C)$

Para este perfil de estrategias, vale que el comensal i se desviará siempre que:

$$U^{desvio} \geq U^{EQ}$$

Ahora, si ambos piden H con la regla de desempate $\tau(C)$, el payoff del comensal i se resume en:

$$U_i(H, C|H, C) = u_H - p_H$$

y su único desvío posible es L , por lo que el payoff del desvío es

$$U_i(L, I|H, C) = u_L - \left(\frac{p_H + p_L}{2}\right)$$

Van a existir incentivos al desvío sí y sólo sí:

$$\alpha < \frac{1}{2}$$

Esta última condición implica que el beneficio adicional del plato H no justifica ni la mitad de su costo extra, por lo que, incluso compartiendo este costo con el otro comensal, no alcanza para compensar esa pérdida de utilidad. En dicho caso, se descarta $(H, H; C, C)$ como equilibrio.

Por consiguiente, se puede enunciar que, para la regla de desempate $\tau(C)$, la estabilidad de los perfiles simétricos va a depender, de la misma forma que en el modelo previo, del valor de α . Si el beneficio extra del plato caro es más grande que el costo extra dividido por la cantidad total de comensales, $(H, H; C, C)$ pasa a ser el único equilibrio, y $(L, L; I, I)$ en el caso contrario. Cuando se da con igualdad, ambos perfiles son perfiles de equilibrio, y, al igual que en las secciones anteriores, nos centramos únicamente en los simétricos.

Por lo tanto, se puede concluir que para el caso de 2 jugadores y una regla de desempate colectiva, la introducción de secuencialidad no afecta las condiciones de los equilibrios.

II. Regla $\tau(I)$

Analicemos nuevamente los casos extremos para una regla de desempate individual.

Perfil $(L, L; I, I)$

Dada la regla de desempate $\tau(I)$, el payoff para el comensal i del equilibrio original es:

$$U_i(L, I|L, I) = u_L - p_L$$

y el de su desvío

$$U_i(H, C|L, I) = u_H - p_H$$

Claramente no van a existir incentivos al desvío en ninguna instancia, por el mero supuesto del dilema: $u_L - p_L > u_H - p_H$. Concluimos entonces que $(L, L; I, I)$ se mantiene como equilibrio bajo dicha regla de desempate.

Perfil $(H, H; C, C)$

Confirmemos que $(H, H; C, C)$ no se mantiene como equilibrio si la regla de desempate es $\tau(I)$ a través de la cuantificación de la ganancia de utilidad si el comensal i opta por desviarse:

$$U^{desvio} \geq U^{EQ}$$

$$u_L - p_L \geq u_H - p_H$$

lo que ocurre siempre, por lo que siempre hay incentivos a desviarse de dicho perfil, lo que implica que $(H, H; C, C)$ no se mantiene como equilibrio.

Intuitivamente, bajo la regla $\tau(I)$, como cada uno paga lo que consume, el plato barato siempre rinde más por unidad monetaria paga, lo que hace que $(L, L; I, I)$ se sostenga y $(H, H; C, C)$ no. He aquí un resultado fundamental. Con 2 comensales, bajo secuencialidad en los pedidos y una regla de desempate individual, se resuelve el Dilema del Comensal Inescrupuloso: el único equilibrio resultante es el Pareto óptimo y no hay sobreconsumo inducido por dividir la cuenta en partes iguales.

III. Regla $\tau(\pi)$

Finalmente, analicemos los perfiles extremos bajo una regla de desempate probabilística, donde π denota la probabilidad de que la regla sea colectiva, y $1 - \pi$ el caso contrario.

Perfil $(L, L; I, I)$

Dada la regla de desempate aleatoria, la utilidad del comensal i cuando ambos piden L será:

$$u_L - p_L.$$

y la de su desvío:

$$u_H - [\pi(\frac{p_H + p_L}{2}) + (1 - \pi)p_H]$$

Existirán incentivos al desvío siempre y cuando

$$\begin{aligned}
u_H - [\pi(\frac{p_H + p_L}{2}) + (1 - \pi)p_H] &\geq u_L - p_L \\
\Delta u &\geq \pi(\frac{p_H + p_L}{2}) + (1 - \pi)p_H - p_L \\
\Delta u &\geq \pi\frac{p_H}{2} + \pi\frac{p_L}{2} + p_H - \pi p_H - p_L \\
\Delta u &\geq \Delta p - \pi\frac{p_H}{2} + \pi\frac{p_L}{2} \\
\Delta u - \Delta p &\geq \frac{\pi}{2}(p_L - p_H) \\
\Delta u - \Delta p &\geq \frac{\pi}{2}(-\Delta p) \\
\frac{\Delta u - \Delta p}{-\Delta p} &\leq \frac{\pi}{2} \\
1 - \alpha &\leq \frac{\pi}{2} \\
1 - \frac{\pi}{2} &\leq \alpha
\end{aligned}$$

El lado izquierdo de la condición mide el incentivo a pedir el plato caro cuando existe cierta probabilidad de pagar colectivamente. A medida que la probabilidad de pagar colectivamente, π , aumenta, la condición se vuelve menos restrictiva, y desviarse resulta más atractivo para el comensal i . Por otro lado, el lado derecho es el ratio entre utilidad marginal del plato caro con respecto al costo marginal del plato caro, es decir, qué tan valioso es el plato caro con respecto a su costo extra.

Finalmente, la condición sobre α presenta una intuición clarísima. Para lograr sostener el equilibrio $(L, L; I, I)$ es necesario que, o bien el beneficio relativo del plato caro sea suficientemente bajo, o que la probabilidad de pagar colectivamente sea suficientemente baja.

En pos de clarificar la intuición, es útil observar casos extremos con respecto a α . Si $\alpha = 0$ ($\iff u_H = u_L$), entonces $(L, L; I, I)$ deja de ser un equilibrio si $\pi \geq 2$, condición que nunca se cumple, por lo que $(L, L; I, I)$ se mantiene. Pero si $\alpha = 1$ ($\iff \Delta u = \Delta p$), entonces $(L, L; I, I)$ deja de ser un equilibrio si $\pi \geq 0$, condición que siempre se cumple.

Perfil $(H, H; C, C)$

La utilidad del comensal i será

$$u_H - p_H.$$

y la de su mejor desvío

$$u_L - [\pi(\frac{p_H + p_L}{2}) + (1 - \pi)p_L]$$

El comensal i se desviará de $(H, H; C, C)$ sí y sólo sí

$$1 - \frac{\pi}{2} \geq \alpha$$

Es útil nuevamente analizar casos extremos para clarificar la intuición de la condición de equilibrio. Si $\alpha = 0$, entonces $\pi < 2$, condición que ocurre siempre, por lo que $(H, H; C, C)$ deja de ser equilibrio. Y si $\alpha = 1$, $\pi \leq 0$, condición que nunca ocurre por lo que $(H, H; C, C)$ se mantiene.

Por ende, se puede establecer el ESP de manera general para la regla probabilística como:

Entonces, en una cena con pedidos secuenciales y votación, con $N = 2$ comensales, los desenlaces posibles son:

Regla de desempate	Equilibrios en puras	Condición para α
$\tau(C)$	$(L, L; I, I), (H, H; C, C)$	$\alpha < \frac{1}{2}, \alpha > \frac{1}{2}$
$\tau(I)$	$(L, L; I, I)$	$\forall \alpha$
$\tau(\pi)$	$(L, L; I, I), (H, H; C, C)$	$\alpha > 1 - \frac{\pi}{2}, \alpha < 1 - \frac{\pi}{2}$

Apéndice 8

Demostración del Resultado 7

En el siguiente apéndice se realiza un análisis del juego secuencial con votación para N jugadores pares, con $N = 2m$.

Elección del 2m-ésimo comensal

Sea $k \in \{0, \dots, 2m - 1\}$ la cantidad de platos H observados por el comensal $2m$. Se consideran los siguientes casos:

Si $k > m$, ya existe una mayoría por el pago colectivo, y el último comensal eligirá H siempre que:

$$\alpha \geq \frac{1}{2m}$$

La demostración es trivial.

Si $k = m$, el comensal m es pivotal, dado que si elige H , determina el régimen C , pero si elige L , habrá empate, y el régimen será definido por $\tau(\cdot)$. Separemos en casos nuevamente:

En el caso de que $\tau = \tau(C)$, el comensal anticipa que el régimen será colectivo, y eligirá H si $\alpha \geq \frac{1}{2m}$. La demostración es trivial.

Por otro lado, si $\tau = \tau(I)$, eligirá H si

$$\alpha \geq \frac{1 - m}{2m}.$$

Dicho umbral surge de:

$$\begin{aligned} U(H, C|\cdot) &\geq U(L, I|\cdot) \\ u_H - \frac{(m+1)p_H + (2m - m - 1)p_L}{2m} &\geq u_L - p_L \\ u_H - \frac{mp_H + p_H + mp_L - p_L}{2m} &\geq u_L - p_L \\ u_H - u_L &\geq \frac{mp_H + p_H + mp_L - p_L - 2mp_L}{2m} \\ \Delta u &\geq \frac{\Delta p + m\Delta p}{2m} \\ \alpha &\geq \frac{1 + m}{2m} \end{aligned}$$

Finalmente, si $\tau = \tau(\pi)$, eligirá H si

$$\alpha \geq \frac{1 - \pi}{2} + \frac{1}{2}$$

Dicha condición sale de:

$$\begin{aligned}
U(H, C|\cdot) &\geq U(L, I|\cdot) \\
u_H - \frac{(m+1)p_H + (m-1)p_L}{2m} &\geq u_L - \left[\pi \frac{mp_H + (2m-m)p_L}{2m} + (1-\pi)p_L \right] \\
\Delta u &\geq \frac{(m+1)p_H + (m-1)p_L}{2m} - \frac{\pi}{2m}(mp_H + mp_L) - (1-\pi)p_L \\
\Delta u &\geq \frac{mp_H + p_H + mp_L - p_L}{2m} - \frac{\pi}{2}p_H - \frac{\pi}{2}p_L - p_L + \pi p_L \\
\Delta u &\geq \frac{m(p_H - p_L)}{2m} + \frac{\Delta p}{2m} - \Delta p - \frac{\pi}{2}\Delta p - p_L \\
\Delta u &\geq \frac{\Delta p}{2} + \frac{\Delta p}{2m} - \Delta p - \frac{\pi}{2}\Delta p \\
\Delta u &\geq \Delta p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2m} - 1 - \frac{\pi}{2} \right) \\
\alpha &\geq \frac{1}{2m} + \frac{1-\pi}{2m}
\end{aligned}$$

Subsecuentemente, si $k < m$, elegirá siempre L dado que el régimen está determinado.

Elección del comensal $i \in \{2m-1, \dots, 1\}$

Al igual que en la sección predecesora, el razonamiento se puede extender mediante inducción, y se llega a los equilibrios enunciados en el desarrollo.

Apéndice 9

Demostración del resultado 8

Para verificar que "el voto sale directamente del plato", basta con comparar la utilidad de un comensal cuando mantiene su pedido pero cambia su voto.

Supongamos que el comensal i pidió el plato caro. Dado que la utilidad está dada por

$$v_i = (u_i - c_i) + \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} (u_j - c_j)$$

es posible notar que el único término afectado por el régimen de pago es el costo de cada jugador. Es decir, cambiar el voto modifica utilidades a través del cambio en el costo propio y ajeno.

Supongamos que el comensal i ordenó O_i y tiene que evaluar su voto. Calculamos entonces

$$\Delta v_i \equiv v_i(C) - v_i(L)$$

Dado que las valuaciones u_i no cambian, la elección se reduce a una comparación de costos. Por ende:

$$\Delta v_i = [c_i(I) - c_i(C)] + \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} [c_j(I) - c_j(C)]$$

Supongamos que el comensal i pide H . Entonces elegirá votar C siempre que

$$\begin{aligned} \Delta v_i &\geq 0 \\ p_H - \frac{kp_H - (N-k)p_L}{N} + \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} \left[p_{O_j} - \frac{kp_H - (N-k)p_L}{N} \right] &\geq 0 \end{aligned}$$

Nótese que $\sum_{j \neq i} p_{O_j} \frac{kp_H - (N-k)p_L}{N} = -(p_{O_i} - \frac{kp_H - (N-k)p_L}{N})$ dado que, definiendo $\hat{c} = \frac{kp_H - (N-k)p_L}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{O_i}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (p_{O_j} - \hat{c}) &= \sum_{j=1}^N p_{O_j} - N\hat{c} \\ \sum_{j=1}^N (p_{O_j} - \hat{c}) &= \sum_{j=1}^N p_{O_j} - \sum_{j=1}^N p_{O_j} \\ \sum_{j=1}^N (p_{O_j} - \hat{c}) &= 0 \end{aligned}$$

Separando el término del jugador i

$$\begin{aligned} p_{O_i} - \hat{c} + \sum_{j \neq i} (p_{O_j} - \hat{c}) &= 0 \\ \sum_{j \neq i} (p_{O_j} - \hat{c}) &= -(p_{O_i} - \hat{c}) \end{aligned}$$

Volviendo a la expresión del incentivo al desvío, reemplazamos:

$$\begin{aligned}
p_H - \hat{c} - (p_H - \hat{c}) + \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} &\geq 0 \\
(p_H - \hat{c}) \left(1 - \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda}\right) &\geq 0 \\
1 &\geq \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} \\
1 + \lambda &\geq \sum_{j \neq i} a_i + \lambda a_j \\
1 + \lambda &\geq (N - 1)a_i + \lambda \sum_{j \neq i} a_j
\end{aligned}$$

Definiendo el promedio de altruismo de los otros comensales como $\bar{a}_{-i} \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} a_j$ se obtiene finalmente:

$$a_i \leq \frac{1 + \lambda}{N - 1} - \lambda \bar{a}_{-i}$$

Es decir que si el comensal i pidió H , votará C siempre que se cumpla la condición sobre el coeficiente de altruismo.

Por otro lado, si el comensal i pidió L , votará C únicamente si

$$a_i \geq \frac{1 + \lambda}{N - 1} - \lambda \bar{a}_{-i}$$

Apéndice 10

Demostración del resultado 9

Comencemos reescribiendo convenientemente la función de utilidad de Levine. Partiendo de:

$$v_i = (u_i - c_i) + \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} (u_j - c_j).$$

Definimos el ponderador del agente i sobre el excedente de utilidad del agente j como:

$$\omega_{ij} = \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda}$$

Ademas definimos el promedio del grado de altruismo de los rivales como:

$$\bar{a}_{-i} := \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} a_j$$

Utilizando las dos ultimas definiciones podemos definir el ponderados promedio del agente i sobre el excedente de utilidad de todos los rivales como:

$$w_i := \frac{a_i + \lambda \bar{a}_{-i}}{1 + \lambda}$$

Perfil $(H, C)^N$:

Consideremos ahora un desvio unilateral del perfil de estrategias $(H, C) \forall j \neq i$. El agente i estaría considerando pedir L , cuando luego de su desvio se mantiene el esquema de pago colectivo. El cambio en su utilidad propia estara dado por:

$$\Delta v_i^{Propio} = (u_L - u_H) - \left(\frac{(N-1)p_H + p_L}{N} - p_H \right)$$

$$\Delta v_i^{Propio} = -\Delta u - \left(-\frac{\Delta p}{N} \right)$$

$$\Delta v_i^{Propio} = \Delta p \left(-\alpha + \frac{1}{N} \right)$$

El cambio en el componente dependiente de los excedentes de los rivales estará dado por:

$$\Delta v_i^{altruista} = \sum_{j \neq i} w_{ij} \Delta(u_j - c_j) = \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} \left(\frac{\Delta p}{N} \right) = \frac{\Delta p}{N} \sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda}$$

Utilizando \bar{a}_{-i} y w_i definidos podemos reescribir:

$$\sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda} \left[(N-1)a_i + \lambda \sum_{j \neq i} a_j \right] = (N-1) \frac{a_i + \lambda \bar{a}_{-i}}{1 + \lambda} = (N-1)w_i$$

Entonces podemos expresar el cambio de la parte altruista como:

$$\sum_{j \neq i} w_{ij} \Delta(u_j - c_j) = (N-1) w_i \left(\frac{\Delta p}{N} \right)$$

El diferencial total de utilidad del desvio del agente es:

$$\Delta v_i = \Delta v_i^{propio} + \Delta v_i^{altruista}$$

$$\begin{aligned}\Delta v_i &= [\Delta p(-\alpha + \frac{1}{N})] + [(N-1)w_i \frac{\Delta p}{N}] \\ \Delta v_i &= -\Delta p \left[\alpha - \frac{1+(N-1)w_i}{N} \right]\end{aligned}$$

Esta ultima condición implica que el i -esimo agente no querrá desviarse de votar H si $\Delta v_i < 0$. Lo cual implica que, este no se desviara si:

$$\alpha > \frac{1+(N-1)w_i}{N}$$

El equilibrio simétrico (H, \dots, H) se sostendrá si esta condición se cumple $\forall i$, por lo tanto:

$$\alpha > \max\left\{\frac{1+(N-1)w_i}{N}\right\}$$

Perfil $(L, I)^N$:

Analicemos ahora un desvío unilateral del perfil $(L, I) \forall j \neq i$. El agente i estaría considerando pedir H , cuando luego de su desvío se mantiene el esquema de pago individual. El cambio en su utilidad propia estará dado por:

$$\Delta v_i = (u_H - p_H) - (u_L - p_L) = \Delta u - \Delta p = \Delta p(\alpha - 1)$$

Lo cual implica que el desvío sera rentable si:

$$\alpha > 1$$

Lo cual no sucede.

Apéndice 11

Demostración del resultado 10

Perfil $(H, C)^N$

Consideremos nuevamente un desvío unilateral del perfil de estrategias $(H, C) \forall j \neq i$. El agente i estaría considerando pedir L , cuando luego de su desvío se mantiene el esquema de pago colectivo. El cambio en su utilidad propia sere determinístico, ya que no depende del tipo, y estará dado por:

$$\Delta v_i^{Propio} = \Delta p(-\alpha + \frac{1}{N})$$

El cambio esperado del componente dependiente del bienestar de los demás será:

$$\Delta v_i = \mathbb{E} \left[\sum_{j \neq i} w_{ij} \Delta(u_j - c_j) \right] = \frac{\Delta p}{N} \mathbb{E} \left[\sum_{j \neq i} \frac{a_i + \lambda a_j}{1 + \lambda} \right]$$

$$\Delta v_i = \frac{\Delta p}{N} (N - 1) \frac{a_i + \lambda \mu_a}{1 + \lambda}$$

Ya que:

$$\mathbb{E}[a_j] = \mu_a$$

La variación total de utilidad es:

$$\Delta v_i = \Delta v_i^{propio} + \Delta v_i^{altruista}$$

$$\Delta v_i = \Delta p \left[-\alpha + \frac{1 + (N - 1) \frac{a_i + \lambda \mu_a}{1 + \lambda}}{N} \right]$$

Esta condición implica que el i -ésimo agente no querrá desviarse del plato caro si:

$$\alpha > \frac{1 + (N - 1) \frac{a_i + \lambda \mu_a}{1 + \lambda}}{N}$$

Para poder sostener el perfil simétrico (H, \dots, H) será necesario imponer la condición más restrictiva, exigiendo:

$$\omega_{\text{sup}} = \frac{\bar{a} + \lambda \mu_a}{1 + \lambda}, \quad \alpha \geq \frac{1 + (N - 1) \omega_{\text{sup}}}{N}.$$

Donde \bar{a} es el límite superior del rango de a_i .