

Departamento de Economía

Tipo de documento: Tesis de maestría



Maestría en Econometría

La irrelevancia de la aversión a la incertidumbre en contextos de toma de decisiones

Autoría: Gutiérrez Valencia, Dalia Scherazada

Fecha: 2025

¿Cómo citar este trabajo?

Dalia Scherazada, D. (2025). "La irrelevancia de la aversión a la incertidumbre en contextos de toma de decisiones". [Tesis de maestría. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella

<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13574>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la **Universidad Torcuato Di Tella** bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Internacional
Dirección: <https://repositorio.utdt.edu>



**UNIVERSIDAD
TORCUATO DI TELLA**

UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

**La irrelevancia de la aversión a la incertidumbre en
contextos de toma de decisiones**

Alumno: Dalia Scherazada Gutiérrez Valencia

Legajo: 23G909

Tutor: Emilio Espino

Fecha: 26/05/2025

La irrelevancia de la aversión a la incertidumbre en contextos de toma de decisiones

Tesis de Maestría en Economía, Universidad Torcuato Di Tella

Autora: Dalia Gutiérrez Valencia*


Tutor: Emilio Espino

May 26, 2025

Abstract

En este artículo investigamos la relevancia de la aversión a la incertidumbre en la predicción de la toma de decisiones de un agente. Seguimos la formulación de La Mura (2009) y presentamos su extensión del marco propuesto por Anscombe and Aumann (1963). Derivamos propiedades fundamentales de esta representación e introducimos un concepto novedoso no abordado por la literatura, el entorno en que el agente opera, que se define como un subespacio vectorial de resultados de loterías que no afectan directamente la utilidad del agente, pero que pueden influir en ella mediante su correlación con otras loterías. Deducimos que, cuando se considera el entorno, la aversión a la incertidumbre no influye en la toma de decisiones y el agente se comporta como si no distinguiera entre riesgo y incertidumbre. Este resultado surge porque el agente se comporta como si dispusiera de menos información de la que efectivamente posee.

Palabras clave: incertidumbre, toma de decisiones, comportamiento económico, inversiones

* Departamento de economía, Universidad Torcuato Di Tella, Av. Figueroa Alcorta 7350, (1428), Buenos Aires, Argentina; dagutierrezvalencia@mail.utdt.edu

1 Introducción

La literatura documenta que los inversores asignan una proporción mayor de sus carteras a activos domésticos de lo que predice la teoría clásica de diversificación (Lee et al., 2023; Sercu and Vanpee, 2007). Como resultado, el crecimiento del consumo está más correlacionado con la producción nacional que en un escenario de diversificación óptima del riesgo (Lewis, 1999). Estos fenómenos, conocidos como sesgo doméstico en acciones y consumo, han sido atribuidos a factores como costos de transacción, asimetrías de información, aversión a la ambigüedad y sesgos de familiaridad (Brennan et al., 2005; Huberman, 2015; Martin and Rey, 2001). Mientras que Chew et al. (2023) argumentan que el sesgo doméstico se debe principalmente a la familiaridad, Dlugosch et al. (2023) sugieren que este efecto es relevante solo cuando los rendimientos son altamente ambiguos. En este artículo, investigamos si la aversión a la ambigüedad influye en la toma de decisiones al considerar el entorno del agente, definido como un contexto específico de loterías. Este análisis permite evaluar si la aversión a la ambigüedad es una causa probable del sesgo doméstico.

La toma de decisiones bajo incertidumbre ha sido ampliamente estudiada en la literatura (Ghirardato et al., 2004; Ju and Miao, 2012; Maccheroni et al., 2006). Este trabajo adopta la representación propuesta por La Mura, 2009, que extiende los marcos de Anscombe and Aumann (1963) y Von Neumann and Morgenstern (1944) (VNM). En este marco, las preferencias sobre actos, definidos como funciones de los estados de la naturaleza al conjunto de loterías, se modelan mediante una función de utilidad. La representación es lineal en las probabilidades subjetivas y no lineal en las probabilidades objetivas, con la no linealidad derivada de una forma cuadrática. Este enfoque proporciona una base teórica sólida para analizar el papel de la aversión a la ambigüedad en la toma de decisiones.

La principal contribución de este artículo es la incorporación del entorno en el que el agente toma decisiones. Este entorno está definido por factores externos que influyen en la distribución de probabilidad de las opciones disponibles (actos o loterías), pero cuyos resultados no afectan directamente la utilidad del agente, salvo a través de su impacto en

las probabilidades de resultados relevantes. Al considerar este entorno, demostramos que la aversión a la ambigüedad no influye en la toma de decisiones, ya que el agente se comporta como si no distinguiera entre riesgo e incertidumbre.

Nuestra conclusión, que demuestra la irrelevancia de la aversión a la ambigüedad en ciertos contextos, se alinea con diversos estudios teóricos y empíricos sobre las condiciones que atenúan este fenómeno. Por ejemplo, Peijnenburg (2018) encuentra que los agentes con aversión a la ambigüedad asignan inicialmente menos riqueza a acciones, pero incrementan esta asignación con la edad. Asimismo, Safra and Segal (2022) identifican condiciones en las que la aversión a la ambigüedad se disipa cuando los agentes enfrentan secuencias de decisiones ambiguas. De forma similar, Liu and Colman (2009) observan en experimentos de elecciones repetidas que los sujetos prefieren opciones ambiguas con mayor frecuencia que en elecciones únicas, al decidir entre apuestas con riesgo e incertidumbre. En un experimento análogo, Montgomery and Adelbratt (1982) reportan que, al elegir entre apuestas, “todos los sujetos excepto uno declararon que habían basado sus decisiones en algo más que el valor esperado. Sin embargo, todos estaban dispuestos a elegir de acuerdo con el valor esperado más alto si se pudiera jugar repetidamente la apuesta seleccionada.”

El artículo se estructura como sigue. En la Sección 2, presentamos un ejemplo motivador que muestra cómo, sin considerar el entorno, un agente con aversión a la ambigüedad podría optar por no diversificar su cartera, apoyando la hipótesis de algunos autores que atribuyen el sesgo doméstico a la aversión a la ambigüedad. Sin embargo, demostramos que, al incorporar el entorno, el agente diversifica, sugiriendo que el sesgo doméstico no se explica por la aversión a la ambigüedad. En la Sección 3, desarrollamos el marco propuesto por La Mura (2009), derivando propiedades clave de esta representación que sustentan el resultado principal. En la Sección 4, detallamos las condiciones técnicas bajo las cuales la aversión a la ambigüedad deja de influir en la toma de decisiones en el entorno definido. Finalmente, en la Sección 5, resumimos los hallazgos y concluimos.

2 Un ejemplo motivador

Supongamos que un inversor tiene un dólar para invertir, en firmas domésticas o extranjeras. Primero, presentamos un caso de referencia donde la diversificación es óptima. Posteriormente, mostraremos cómo la aversión a la ambigüedad, sin considerar el entorno, induce un sesgo hacia activos domésticos. Finalmente, demostraremos que incorporar el entorno restaura la diversificación, desafiando la hipótesis de que la aversión a la ambigüedad causa el sesgo doméstico.

Para formalizar el análisis, adoptamos la notación Bra-ket, comúnmente usada en mecánica cuántica, donde $|x\rangle$ denota un vector en y $\langle x|$ su transpuesta conjugada. Esta notación facilita la representación de loterías y utilidades como matrices, alineándose con el marco de La Mura.

2.1 Caso de referencia

Supongamos que las firmas domésticas ofrecen un retorno de $1 + r$, donde r es r^H (alto) o r^L (bajo), cada uno con probabilidad conocida $\frac{1}{2}$. Las firmas extranjeras ofrecen un retorno de $1 + r^*$, con r^* tomando valores r^H o r^L con probabilidad subjetiva $\frac{1}{2}$, independiente de los retornos domésticos. Aunque las distribuciones son idénticas, asumimos que los retornos extranjeros se perciben como ambiguos debido a información limitada.

El inversor elige α , la fracción del dólar invertida en firmas domésticas, restringida a 0, $\frac{1}{2}$, o 1 por simplicidad. Dependiendo de α y los resultados realizados, pueden surgir varios escenarios: el retorno del dólar puede ser $1 + r^H$ (si se invierte todo en un mercado con retornos altos o ambos mercados tienen retornos altos), $1 + r^L$ (si se invierte todo en un mercado con retornos bajos o ambos mercados tienen retornos bajos), o $1 + \frac{r^L + r^H}{2}$ (si se diversifica y los mercados tienen retornos opuestos).

Bajo los axiomas de Anscombe y Aumann, existe una función de utilidad u , creciente y cóncava (reflejando aversión al riesgo), que ordena los resultados. Definimos la matriz de

utilidad:

$$U_1 = \begin{pmatrix} u(1+r^H) & 0 & 0 \\ 0 & u\left(1 + \frac{r^H+r^L}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & u(1+r^L) \end{pmatrix}$$

Sea $\{|e_i\rangle\}$ la base canónica en \mathbb{R}^3 ; luego, $\langle e_1|U_1|e_1\rangle = u(1+r^H)$, $\langle e_2|U_1|e_2\rangle = u\left(1 + \frac{r^H+r^L}{2}\right)$, y $\langle e_3|U_1|e_3\rangle = u(1+r^L)$. Por lo tanto, cada resultado se asocia a un vector de la base, y su utilidad se expresa como la forma cuadrática $\langle e_i|U_1|e_i\rangle$.

El inversor maximiza la utilidad esperada eligiendo α . Para $\alpha = 1$ (inversión solo en firmas domésticas), el acto asigna probabilidad subjetiva 1 a la lotería que atribuye probabilidad objetiva $\frac{1}{2}$ para $1+r^H$ y $1+r^L$. Definimos:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle$$

donde $|\Psi_1\rangle$ representa la lotería riesgosa que asigna probabilidad objetiva $\frac{1}{2}$ a los elementos de la base e_1 , e_3 , que se consigue multiplicando cada elemento de la base por la raíz de su respectiva probabilidad objetiva.

La matriz de densidad se define como $\rho_1 = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$,¹ y la utilidad entonces puede escribirse como:

$$\text{Tr}(\rho_1 U_1) = \frac{1}{2}u(1+r^H) + \frac{1}{2}u(1+r^L)$$

Notar que esta representación de la utilidad coincide con la representación usual de la utilidad de Anscombe y Aumann.

En general, siempre se podrá elegir una matriz de densidad que represente cada acto y la utilidad de dicho acto será la traza de la matriz de densidad multiplicada por la matriz de utilidad.

Si el agente elige $\alpha = 0$ (inversión sólo en firmas extranjeras), selecciona un acto que devuelve, con probabilidad subjetiva $\frac{1}{2}$, una lotería que asigna probabilidad objetiva 1 a uno

¹Más precisamente, como veremos adelante, la matriz de densidad es $\frac{1}{2}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \frac{1}{2}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$ porque hay incertidumbre entre los estados de la naturaleza, aunque ellos devuelven la misma lotería en ambos casos.

de los resultados (retornos altos o bajos). La matriz de densidad correspondiente es:

$$\rho_2 = \frac{1}{2}|e_1\rangle\langle e_1| + \frac{1}{2}|e_3\rangle\langle e_3| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donde la matriz se consigue tomando una combinación convexa de las matrices de densidad correspondientes a cada estado de la naturaleza, ponderando cada matriz por su respectiva probabilidad subjetiva. Esta es en general la regla para encontrar las matrices de densidad de cada acto.

Así, la utilidad de $\alpha = 0$ es $\text{Tr}(\rho_2 U_1) = \frac{1}{2}u(1 + r^H) + \frac{1}{2}u(1 + r^L)$. La utilidad es idéntica ya sea invirtiendo en empresas nacionales o extranjeras.

Finalmente, Para $\alpha = \frac{1}{2}$ (diversificación), el acto genera loterías combinando retornos de ambos mercados. Con probabilidad subjetiva $\frac{1}{2}$, los retornos extranjeros son altos, y los domésticos son altos o bajos con probabilidad objetiva $\frac{1}{2}$. Esta lotería está representada por:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle$$

Y con probabilidad subjetiva $\frac{1}{2}$, los retornos extranjeros son bajos y los nacionales son altos o bajos con probabilidad objetiva $\frac{1}{2}$. Esta lotería se representa como:

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle$$

Así, la matriz de densidad asociada a $\alpha = \frac{1}{2}$ es:

$$\rho_3 = \frac{1}{2}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + \frac{1}{2}|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3| = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

La utilidad de esta opción es:

$$\text{Tr}(\rho_3 U_1) = \frac{u(1+r^H) + u(1+r^L)}{4} + \frac{u\left(1 + \frac{r^H+r^L}{2}\right)}{2}$$

Debido a la concavidad de u , esta expresión supera la utilidad asociada con todos los otros valores de α . Por lo tanto, el modelo con preferencias que respetan los axiomas de Ancombe y Aumann predice $\alpha = \frac{1}{2}$.

2.2 Añadiendo aversión a la ambigüedad

Bajo los supuestos de Ancombe y Aumann la matriz de utilidad es siempre diagonal. ¿Qué sucede si la matriz U_1 no está restringida a ser diagonal? Por ejemplo, consideremos el operador de utilidad

$$U_2 = \begin{pmatrix} u(1+r^H) & 0 & \gamma \\ 0 & u\left(1 + \frac{r^H+r^L}{2}\right) & 0 \\ \gamma & 0 & u(1+r^L) \end{pmatrix}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$. Más adelante mostraremos que los elementos fuera de la diagonal pueden interpretarse como una medida de las preferencias respecto a la ambigüedad. Específicamente, asumimos $\gamma > 0$, lo que refleja aversión a la ambigüedad.

El problema sigue siendo similar al caso anterior. Si el agente elige $\alpha = 1$, la matriz de densidad sigue siendo ρ_1 , por lo que la utilidad de elegir $\alpha = 1$ es:

$$\text{Tr}(\rho_1 U_2) = \frac{u(1+r^H) + u(1+r^L)}{2} + \gamma$$

Por otro lado, la utilidad de elegir $\alpha = 0$ es:

$$\text{Tr}(\rho_2 U_2) = \frac{u(1+r^H) + u(1+r^L)}{2}$$

Finalmente, la utilidad de elegir $\alpha = \frac{1}{2}$ es:

$$\text{Tr}(\rho_3 U_2) = \frac{u(1+r^H) + u(1+r^L)}{4} + \frac{u\left(1 + \frac{r^H+r^L}{2}\right)}{2}$$

Por lo tanto, si el agente es suficientemente adverso a la ambigüedad (es decir, γ es lo suficientemente grande), elegirá $\alpha = 1$, lo que significa que no diversificará su portafolio, llevando a un sesgo hacia el país de origen.

2.3 Introduciendo el entorno

Para evitar mezclar notación, sea $\{|e_i^{\mathcal{H}_1}\rangle\}$ la base canónica en \mathbb{R}^3 , $\{|e_i^{\mathcal{H}_2}\rangle\}$ la base canónica en \mathbb{R}^2 , y $\{|e_i\rangle\}$ la base canónica en \mathbb{R}^6 .

Ahora consideremos que los retornos de las inversiones domésticas en realidad dependen de otra variable, por ejemplo, la productividad. Supongamos que la productividad puede ser alta con probabilidad objetiva $\frac{1}{2}$ y baja con probabilidad $\frac{1}{2}$. Si la productividad es alta, los retornos domésticos son altos; si es baja, los retornos son bajos. Si asumimos que el agente no tiene preferencias por la productividad y solo considera el retorno sobre su dólar al calcular la utilidad, el operador de utilidad debe ser $U_2 \otimes I_2$, donde U_2 es como en la subsección anterior, y I_2 es la matriz identidad de 2×2 .

¿Por qué? Primero, porque hay seis posibles resultados para el experimento (los retornos sobre el dólar son altos/medios/bajos y la productividad es alta/baja). Como resultado, necesitamos un operador de utilidad en $\mathbb{R}^{6 \times 6}$. Segundo, porque la utilidad de los resultados en los que los retornos sobre el dólar son altos debe ser la misma, independientemente de que la productividad sea alta o no. Lo mismo ocurre en los casos en que los retornos sobre el dólar son medios o bajos.

Es decir, el primer elemento de la diagonal en $U_2 \otimes I_2$ es la utilidad que recibirá el agente en el caso en que los retornos sobre el dólar sean r^H y la productividad sea alta (resultado $|e_1\rangle \in \mathbb{R}^6$). El segundo elemento de la diagonal en $U_2 \otimes I_2$ es la utilidad que recibirá el agente

en el caso en que los retornos sobre el dólar sean r^H y la productividad sea baja (resultado $|e_2\rangle \in \mathbb{R}^6$). La utilidad debe ser la misma en ambos casos porque el agente no es afectado por el resultado de la productividad, sino por el de los retornos. El tercer elemento de la diagonal en $U_2 \otimes I_2$ es la utilidad que recibirá el agente en el caso en que los retornos sobre el dólar sean $(r^H + r^L)/2$ y la productividad sea alta (resultado $|e_3\rangle$), y así sucesivamente.

Ahora consideremos el problema de elegir el α óptimo. Si el agente elige $\alpha = 1$, surgen dos posibilidades: o los retornos sobre el dólar son $1+r^H$ y la productividad es alta (resultado $|e_1\rangle$, con probabilidad objetiva 1/2), o los retornos sobre el dólar son $1+r^L$ y la productividad es baja (resultado $|e_6\rangle$). Entonces, la lotería es

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_6\rangle$$

En este ejemplo, asociado con el evento $|e_1^{\mathcal{H}_1}\rangle$ en \mathbb{R}^3 está el evento $|e_1^{\mathcal{H}_2}\rangle$ en el entorno \mathbb{R}^2 (retornos altos con alta productividad), porque $|e_1\rangle = |e_1^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes |e_1^{\mathcal{H}_2}\rangle$. Asociado con el evento $|e_2^{\mathcal{H}_1}\rangle \in \mathbb{R}^3$ está el vector cero, ya que es imposible obtener retornos de $1 + (r^H + r^L)/2$ invirtiendo en solo un país. Finalmente, asociado con $|e_3^{\mathcal{H}_1}\rangle \in \mathbb{R}^3$ está el vector $|e_2^{\mathcal{H}_2}\rangle \in \mathbb{R}^2$ en el entorno, porque los retornos bajos están asociados con baja productividad: $|e_6\rangle = |e_3^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes |e_2^{\mathcal{H}_2}\rangle$. Siendo $\rho_4 = |\psi_4\rangle\langle\psi_4|$, la utilidad de esta opción es

$$\text{Tr}(\rho_4 U_2 \otimes I_2) = \frac{u(1+r^H) + u(1+r^L)}{2}$$

A diferencia de la subsección anterior, elegir $\alpha = 1$ no genera el valor adicional $\gamma > 0$.

Por otro lado, si el agente elige $\alpha = 0$, con probabilidad subjetiva 1/2, enfrenta la lotería

$$|\Psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle$$

y con probabilidad 1/2,

$$|\Psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_5\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_6\rangle$$

La matriz de densidad correspondiente es

$$\rho_5 = \frac{1}{2}|\Psi_5\rangle\langle\Psi_5| + \frac{1}{2}|\Psi_6\rangle\langle\Psi_6|$$

Y la utilidad de elegir $\alpha = 0$ es

$$\text{Tr}(\rho_5 U_2 \otimes I_2) = \frac{u(1+r^H) + u(1+r^L)}{2}$$

Finalmente, la utilidad de elegir $\alpha = \frac{1}{2}$ es

$$\frac{u(1+r^H) + u(1+r^L)}{4} + \frac{u(1+(r^H+r^L)/2)}{2}$$

Por lo tanto, al tener en cuenta el entorno, la predicción se asemeja al caso de referencia.

3 Utilidad proyectiva

3.1 Utilidad Esperada

En nuestro marco, las loterías se representan mediante vectores unitarios complejos en el espacio L^2 , donde una base ortonormal (elegimos la base canónica, $\{|e_i\rangle\}_i$) representa los posibles resultados del experimento. La probabilidad de un evento particular se deriva de la longitud al cuadrado de la proyección del vector de la lotería sobre uno de los elementos de la base.

En el ejemplo motivador de la sección anterior, cuando el agente eligía $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, enfrentaba una lotería que asignaba una probabilidad de $\frac{1}{2}$ a los retornos altos o bajos sobre el dólar. En el caso donde no teníamos en cuenta el entorno, el vector de lotería correspondiente se expresaba como $\frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle$.

Proposición 1. (Ver Von Neumann and Morgenstern, 1944) *Si las preferencias satisfacen completitud, transitividad, continuidad e independencia, existe una matriz diagonal U tal*

que una lotería $|\Psi\rangle$ es preferida a $|\Psi'\rangle$ si y solo si $\text{Tr}(\rho U) \geq \text{Tr}(\rho' U)$, donde $\rho := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ y $\rho' := |\Psi'\rangle\langle\Psi'|$.

Este resultado es equivalente al criterio de maximización de la utilidad en el caso clásico, porque $\text{Tr}(\rho U) = \sum_i |\langle\Psi|e_i\rangle|^2 U_{ii}$. Al igual que en la sección anterior, donde la utilidad del agente se capturaba mediante los elementos diagonales del operador de utilidad, aquí la utilidad de una lotería está dada por las entradas diagonales de una matriz U , que reflejan los pagos asociados con los posibles resultados.

3.2 Extensiones de Axiomas

Ahora extendemos el marco anterior, introduciendo un conjunto más general de axiomas. Sea Ω el conjunto de posibles estados de la naturaleza. Un acto se define como una función de Ω al conjunto de loterías.

Proposición 2. (Ver Anscombe and Aumann, 1963; La Mura, 2009) Si se cumplen ciertos axiomas (Proyectivo, Arquimediano, Independencia, No-degeneración e Independencia de Estado), existe una matriz Hermitiana (diagonal en el teorema de Anscombe y Aumann) U y una medida de probabilidad π tal que un acto Ψ es preferido a Ψ' si y solo si $\text{Tr}(\rho U) \geq \text{Tr}(\rho' U)$, donde $\rho := \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) |\Psi_\omega\rangle\langle\Psi_\omega|$ y $\rho' := \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) |\Psi'_\omega\rangle\langle\Psi'_\omega|$.

En este caso los autovectores de la matriz U representan los resultados subjetivos y sus autovalores la utilidad asociada a ellos. Este marco más amplio abarca el esquema clásico, permitiendo a la vez una estructura más rica de representaciones proyectivas.

3.3 Términos Fuera de la Diagonal y Preferencias de Riesgo

En este contexto, la interpretación de los elementos fuera de la diagonal de U revela más sobre la actitud del agente hacia el riesgo y la incertidumbre. Específicamente, la parte real de U_{ij} , que está dada por

$$\operatorname{Re}(U_{ij}) = \operatorname{Tr}(|\Phi\rangle\langle\Phi|U) - \left(\frac{1}{2}U_{ii} + \frac{1}{2}U_{jj}\right),$$

donde $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_i\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_j\rangle$, captura la prima en utilidad generada por una lotería que asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ a los eventos e_i y e_j , en comparación con su caso de referencia de utilidad esperada.

En el ejemplo motivador, el valor de $\gamma > 0$ indicaba la preferencia del agente por el riesgo sobre la incertidumbre. De manera similar, los términos fuera de la diagonal positivos en esta matriz indican una preferencia por el riesgo sobre la incertidumbre. Cuando los términos fuera de la diagonal son cero, esto corresponde a que el agente es indiferente entre riesgo e incertidumbre, alineándose con el marco clásico donde la aversión a la ambigüedad está ausente.

3.4 Estados Mixtos y Preferencias

El operador $\rho := \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) |\Psi_\omega\rangle\langle\Psi_\omega|$ es siempre un operador Hermitiano positivo semi-definido con traza uno. Dicho operador es conocido como un *operador de densidad*. Las preferencias sobre actos pueden entonces representarse como preferencias sobre matrices de densidad, donde $\pi(\omega)$ refleja la distribución subjetiva de probabilidad sobre los estados de la naturaleza.

Si el acto Ψ devuelve la misma lotería para todos los estados de la naturaleza, la traza de la matriz de densidad al cuadrado es uno, lo que corresponde a un *estado puro* (certeza). En todos los demás casos, la matriz representa un *estado mixto* (ambigüedad o incertidumbre).

3.5 Propiedades

En esta subsección, presentamos algunas propiedades relevantes que nos permitirán demostrar el resultado central de este artículo.

Proposición 3. *Si la matriz de densidad asociada con un acto se puede escribir como $\rho \otimes \rho'$,*

donde ρ y ρ' son matrices de densidad, el operador de utilidad se puede escribir como $U \otimes U'$, donde U tiene las mismas dimensiones que ρ (y U' las mismas que ρ'), si y solo si la utilidad es $\text{Tr}(\rho U) \text{Tr}(\rho' U')$.

Proof. Notar que $\text{Tr}[(\rho \otimes \rho')(U \otimes U')] = \text{Tr}(\rho U \otimes \rho' U') = \text{Tr}(\rho U) \text{Tr}(\rho' U')$. \square

La interpretación es la siguiente: Supongamos que ρ actúa sobre el espacio vectorial \mathcal{H}_1 y ρ' sobre \mathcal{H}_2 , donde sus bases canónicas respectivas son $\{|e_i^{\mathcal{H}_1}\rangle\}$ y $\{|e_i^{\mathcal{H}_2}\rangle\}$. Entonces, si las matrices de densidad son puras, la probabilidad de que ocurra el resultado $e_k^{\mathcal{H}_1}$ es independiente de la probabilidad de que ocurra el resultado $e_m^{\mathcal{H}_2}$. Para ver esto, tomemos $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ y $\rho' = |\Psi'\rangle\langle\Psi'|$. Entonces

$$|\langle e_k \otimes e_m | \Psi \otimes \Psi' \rangle|^2 = |\langle e_k | \Psi \rangle|^2 |\langle e_m | \Psi' \rangle|^2.$$

Adicionalmente, si el operador de utilidad puede escribirse como $U \otimes U'$, los resultados subjetivos de los experimentos (los autovalores) son el producto de los resultados subjetivos de los dos experimentos que devuelven los autovectores de U y U' . Esta propiedad es particularmente relevante cuando $\text{Tr}(\rho' U')$ es constante. A partir de esto, asumiendo $U \neq 0$, podemos deducir lo siguiente:

Corolario 1. *Los resultados en \mathcal{H}_2 no afectan la utilidad del agente si y solo si U' es la identidad:*

$$\text{Tr}(\rho U) \text{Tr}(\rho' U') = \text{Tr}(\rho U) \forall \rho', \rho \iff U' = I.$$

En este caso, \mathcal{H}_2 se llama el entorno.

Proof. Supongamos que $\text{Tr}(\rho U) \text{Tr}(\rho' U') = \text{Tr}(\rho U) \forall \rho'$. Entonces para cualquier vector $|\phi\rangle$ se cumple que

$$\langle \phi | U' | \phi \rangle = \|\phi\|^2$$

Lo mismo para el operador identidad I . Luego,

$$\langle \phi | (U' - I) | \phi \rangle = 0$$

Por lo tanto, $U' = I$.

El recíproco se cumple porque ρ' tiene traza uno. \square

Note que esta es la explicación formal del operador de utilidad elegido en nuestro ejemplo motivador. Como el agente debía estar indiferente ante cualquier lotería relacionada con la distribución de productividad, el único operador de utilidad posible era de la forma $U_2 \otimes I_2$.

Si el operador de utilidad se puede escribir como $U \otimes I$ y las probabilidades de los resultados en \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son independientes, la única información necesaria para calcular la utilidad es $\text{Tr}(\rho U)$. Cuando las probabilidades no son independientes, aún no necesitamos la descripción completa de la matriz de densidad de todo el sistema (denotada aquí con un ligero abuso de notación como ρ), sino más bien su traza parcial:

Lema 1. *Si un operador de utilidad se puede escribir como $U \otimes I$, entonces la utilidad del estado ρ se puede escribir como $\text{Tr}(\rho U \otimes I) = \text{Tr}[\text{Tr}_2(\rho)U]$, donde Tr_2 es la traza parcial sobre \mathcal{H}_2 y $\text{Tr}_2(\rho)$ es un operador de densidad.*

Para una demostración, véase Schlosshauer (2019). En nuestro ejemplo motivador, nótese que la proposición se cumple. Por ejemplo, cuando introdujimos el entorno, la utilidad de elegir $\alpha = 1$ era

$$\text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1+r^H) & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & u(1+r^H) & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & u\left(1+\frac{r^H+r^L}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u\left(1+\frac{r^H+r^L}{2}\right) & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & u(1+r^L) & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & u(1+r^L) \end{pmatrix} \right]$$

$$= \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1+r^H) & 0 & \gamma \\ 0 & u\left(1+\frac{r^H+r^L}{2}\right) & 0 \\ \gamma & 0 & u(1+r^L) \end{pmatrix} \right]$$

Ahora, consideremos a un agente que debe elegir una matriz de densidad ρ para maximizar $\text{Tr}(\rho U'')$ sujeto a la restricción $\rho \in \varrho$. Supongamos que ϱ solo contiene matrices diagonales. Entonces, si definimos D como la matriz diagonal que coincide con U'' en la diagonal principal, tenemos lo siguiente:

Proposición 4. $\hat{\rho} = \text{argmax}_{\rho \in \varrho} \text{Tr}(\rho U'') \iff \hat{\rho} = \text{argmax}_{\rho \in \varrho} \text{Tr}(\rho D)$.

Proof. Notar que para cualquier $\rho \in \varrho$, $\text{Tr}(\rho U'') = \text{Tr}(\rho D)$, lo que prueba el resultado. \square

La intuición detrás de este resultado es que siempre que el agente esté restringido a elegir matrices diagonales, se comportará como si satisficiera los axiomas de Anscombe y Aumann y tuviera preferencias representadas por el operador de utilidad D .

Entonces, queda aún una pregunta sin contestar: ¿cuándo estará el agente restringido a elegir matrices diagonales? La siguiente sección responde la pregunta.

4 Decoherencia

Consideremos un sistema \mathcal{H}_1 y un entorno \mathcal{H}_2 , donde el estado conjunto del sistema y el entorno está dado por $\sum_{\omega} \pi(\omega) |\Psi_{\omega}\rangle \langle \Psi_{\omega}|$. Aquí, $|\Psi_{\omega}\rangle = \sum_{m,k} \psi_{k,m}^{\omega} |e_m^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes |e_k^{\mathcal{H}_2}\rangle$, donde $\{|e_m^{\mathcal{H}_1}\rangle\}_m$ es la base canónica del subsistema \mathcal{H}_1 y $\{|e_k^{\mathcal{H}_2}\rangle\}_k$ es la base canónica del entorno \mathcal{H}_2 . Nótese que podemos reescribir $|\Psi_{\omega}\rangle = \sum_m |e_m^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes (\sum_k \psi_{k,m}^{\omega} |e_k^{\mathcal{H}_2}\rangle)$. Esto implica que si el resultado $e_m^{\mathcal{H}_1}$ ocurre en \mathcal{H}_1 para un ω , entonces la distribución de probabilidad correspondiente para los resultados en el entorno es proporcional a $|\psi_{k,m}^{\omega}|^2$ para cada k (usando la definición de probabilidad condicional, asumiendo que la probabilidad de $e_m^{\mathcal{H}_1}$ es no nula).

Dado $e_m^{\mathcal{H}_1}$, la distribución asociada para los resultados en el entorno puede representarse mediante el vector $|\phi_m^{\omega}\rangle := \sum_k \psi_{k,m}^{\omega} |e_k^{\mathcal{H}_2}\rangle$. Las amplitudes $\{\psi_{k,m}^{\omega}\}_k$ describen los componentes del estado del entorno correlacionados con el estado del subsistema $|e_m^{\mathcal{H}_1}\rangle$. Así, $\langle \phi_m^{\omega} | \phi_m^{\omega} \rangle$ es

la probabilidad de $e_m^{\mathcal{H}_1}$, mientras que $\langle \phi_n^\omega | \phi_m^\omega \rangle$ para $n \neq m$ mide el solapamiento entre los componentes del entorno asociados con diferentes estados base $e_m^{\mathcal{H}_1}$ y $e_n^{\mathcal{H}_1}$. Cuando este solapamiento es cero, los estados correspondientes del entorno son ortogonales, y el entorno “separa” los estados base $e_m^{\mathcal{H}_1}$ y $e_n^{\mathcal{H}_1}$ perfectamente. Esta ortogonalidad asegura que cada estado de \mathcal{H}_1 esté correlacionado con un estado único y distinguible del entorno, lo que efectivamente conduce a una situación en la que el conocimiento del estado del entorno determina de manera única el estado de \mathcal{H}_1 .

En nuestro ejemplo motivador, la lotería asociada con $\alpha = 1$ era

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_6\rangle = |e_1^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|e_1^{\mathcal{H}_2}\rangle + 0 \right) + |e_2^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes (0 + 0) + |e_3^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes \left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2^{\mathcal{H}_2}\rangle \right)$$

Dado que $\frac{1}{\sqrt{2}}|e_1^{\mathcal{H}_2}\rangle + 0, 0 + 0, 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2^{\mathcal{H}_2}\rangle$ son ortogonales entre sí, los resultados distintos estaban asociados de manera única con loterías distinguibles, y el problema de toma de decisiones podía simplificarse enfocándose en estas correspondencias únicas.

Proposición 5. *Si el solapamiento es cero, es decir, $\langle \phi_n^\omega | \phi_m^\omega \rangle = 0$ para $n \neq m$, entonces la traza parcial sobre los grados de libertad en el entorno da lugar a una matriz de densidad diagonal.*

Proof. La traza parcial sobre \mathcal{H}_2 del estado conjunto está dada por:

$$\text{Tr}_2 \left(\sum_{\omega} \pi(\omega) |\Psi_\omega\rangle \langle \Psi_\omega| \right) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \sum_{m,n} |e_m^{\mathcal{H}_1}\rangle \langle e_n^{\mathcal{H}_1}| \sum_k \psi_{k,m}^\omega \overline{\psi_{k,n}^\omega}.$$

Cuando se cumple la condición de solapamiento cero, es decir, $\langle \phi_n^\omega | \phi_m^\omega \rangle = 0$ para $n \neq m$, esto se simplifica a:

$$\sum_{\omega} \pi(\omega) \sum_m |e_m^{\mathcal{H}_1}\rangle \langle e_m^{\mathcal{H}_1}| \sum_k |\psi_{k,m}^\omega|^2.$$

Esta expresión es una matriz de densidad diagonal. □

Nuevamente, en nuestro ejemplo, cuando $\alpha = 1$, la matriz de densidad reducida era

$$\begin{aligned} \text{Tr}_2 \left[\left(|e_1^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1^{\mathcal{H}_2}\rangle + |e_3^{\mathcal{H}_1}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2^{\mathcal{H}_2}\rangle \right) \left(\langle e_1^{\mathcal{H}_1}| \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\langle e_1^{\mathcal{H}_2}| \right) \right] \\ = \frac{1}{2}|e_1^{\mathcal{H}_1}\rangle\langle e_1^{\mathcal{H}_1}| + \frac{1}{2}|e_3^{\mathcal{H}_1}\rangle\langle e_3^{\mathcal{H}_1}| \end{aligned}$$

que es una matriz diagonal.

La interpretación de este resultado es crucial. Cuando se requiere que el agente elija una matriz de densidad ρ en un conjunto ϱ donde el estado del entorno determina de manera única las loterías correspondientes, el problema de decisión del agente puede reducirse a un problema de decisión clásica sobre loterías. Específicamente, esta condición implica:

$$\hat{\rho} = \arg \max_{\rho \in \varrho} \text{Tr}(\rho U \otimes I_2) \iff \text{Tr}_2(\hat{\rho}) = \arg \max_{\tilde{\rho} \in \tilde{\varrho}} \text{Tr}(\tilde{\rho} U),$$

donde $\tilde{\varrho} = \{\text{matrices de densidad } \tilde{\rho} \text{ tales que existe } \rho \in \varrho : \tilde{\rho} = \text{Tr}_2(\rho)\}$. En otras palabras, elegir una matriz de densidad para el sistema completo $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ es equivalente a elegir la traza parcial de la matriz de densidad sobre \mathcal{H}_2 . Cuando ϱ consiste en matrices de densidad con solapamiento cero, $\tilde{\varrho}$ consiste en matrices diagonales, haciendo que el problema del agente sea análogo a elegir la matriz de densidad diagonal óptima que maximice $\text{Tr}(\tilde{\rho} U)$ sujeto a $\tilde{\rho} \in \tilde{\varrho}$. Así, el problema se reduce a un problema de maximización de utilidad clásica, donde la solución corresponde a una situación en la que se cumplen los axiomas de Anscombe y Aumann.

La razón intuitiva de este resultado es que los agentes pierden la prima de utilidad típicamente asociada con actos certeros que devuelven una lotería riesgosa en comparación con actos inciertos. Esto sucede porque, dado que el agente sólo utiliza la traza parcial al calcular su utilidad, no se está usando toda la información disponible de la matriz de densidad. Consecuentemente, el agente se comporta como si tuviera menos información de la que tiene (particularmente las loterías riesgosas son tratadas como actos inciertos), lo que

lleva a comportamientos consistentes con la teoría clásica.² Notar que este efecto no se debe a ningún cambio en la creencia de la distribución de los estados de la naturaleza $\pi(\omega)$.

5 Conclusión

Hemos demostrado que, cuando un agente enfrenta un acto cuya matriz de densidad opera en el producto tensorial de dos espacios vectoriales, uno de los cuales representa el entorno, la traza parcial de la matriz de densidad contiene toda la información relevante necesaria para calcular la utilidad del agente. Además, hemos demostrado que si el agente debe elegir una matriz de densidad de un conjunto de matrices diagonales, el problema se reduce a un problema clásico de maximización de utilidad esperada, donde la aversión a la ambigüedad no juega ningún papel en la determinación de la matriz de densidad óptima. Finalmente, hemos probado que, cuando los resultados en el primer espacio vectorial están determinados por los resultados en el entorno, la traza parcial de las matrices de densidad se vuelve diagonal, por lo que la predicción del modelo coincide con la de la teoría clásica de maximización de la utilidad esperada.

La intuición detrás de este resultado es que los agentes actúan como si tuvieran menos información de la que realmente poseen, ya que calculan su utilidad utilizando la traza parcial de la matriz de densidad en lugar de la matriz completa. Como resultado, la aversión a la ambigüedad no influye en las decisiones óptimas cuando existe un entorno.

²Este es un resultado común en la mecánica cuántica, y explica por qué los sistemas físicos dejan de exhibir propiedades cuánticas bajo ciertas condiciones.

References

- Anscombe, F. J., & Aumann, R. J. (1963). A Definition of Subjective Probability. *The Annals of Mathematical Statistics*, 34(1), 199–205. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177704255>
- Brennan, M. J., Henry Cao, H., Strong, N., & Xu, X. (2005). The dynamics of international equity market expectations. *Journal of Financial Economics*, 77(2), 257–288. <https://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v77y2005i2p257-288.html>
- Chew, S. H., Li, K. K., & Sagi, J. (2023). Home bias explained by familiarity, not ambiguity. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3870716>
- Dlugosch, D., Horn, K., & Wang, M. (2023). New experimental evidence on the relationship between home bias, ambiguity aversion and familiarity heuristics. *Journal of Economics and Business*, 125-126, 106131. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jeconbus.2023.106131>
- Ghirardato, P., Maccheroni, F., & Marinacci, M. (2004). Differentiating ambiguity and ambiguity attitude. *Journal of Economic Theory*, 118(2), 133–173. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jet.2003.12.004>
- Huberman, G. (2015). Familiarity Breeds Investment. *The Review of Financial Studies*, 14(3), 659–680. <https://doi.org/10.1093/rfs/14.3.659>
- Ju, N., & Miao, J. (2012). Ambiguity, learning, and asset returns. *Econometrica*, 80(2), 559–591. <https://doi.org/https://doi.org/10.3982/ECTA7618>
- La Mura, P. (2009). Projective expected utility [Special Issue: Quantum Cognition]. *Journal of Mathematical Psychology*, 53(5), 408–414. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmp.2009.02.001>
- Lee, J., Lee, K., & Oh, F. D. (2023). International portfolio diversification and the home bias puzzle. *Research in International Business and Finance*, 64, 101807. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2022.101807>

- Lewis, K. K. (1999). Trying to explain home bias in equities and consumption. *Journal of Economic Literature*, 37(2), 571–608. <https://doi.org/10.1257/jel.37.2.571>
- Liu, H.-H., & Colman, A. M. (2009). Ambiguity aversion in the long run: Repeated decisions under risk and uncertainty. *Journal of Economic Psychology*, 30(3), 277–284. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.joep.2009.02.001>
- Maccheroni, F., Marinacci, M., & Rustichini, A. (2006). Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences. *Econometrica*, 74(6), 1447–1498. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1468-0262.2006.00716.x>
- Martin, P., & Rey, H. (2001, September). *Financial super-markets: Size matters for asset trade* (Working Paper No. 8476). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w8476>
- Montgomery, H., & Adelbratt, T. (1982). Gambling decisions and information about expected value. *Organizational Behavior and Human Performance*, 29(1), 39–57. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0030-5073\(82\)90241-0](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0030-5073(82)90241-0)
- Peijnenburg, K. (2018). Life-Cycle Asset Allocation with Ambiguity Aversion and Learning. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 53(5), 1963–1994. https://ideas.repec.org/a/cup/jfinqa/v53y2018i05p1963-1994_00.html
- Safra, Z., & Segal, U. (2022). A lot of ambiguity. *Journal of Economic Theory*, 200, 105393. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jet.2021.105393>
- Schlosshauer, M. (2019). Quantum decoherence. *Physics Reports*, 831, 1–57. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.10.001>
- Sercu, P. M. F. A., & Vanpee, R. (2007). Home bias in international equity portfolios: A review. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1025806>
- Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press.