Evasión Fiscal e Inversión en Tecnología de Control

Agustina Bellido
Jack Lockhart
Constanza Maitland Heriot
Nicolás Mera

Tutor: Martín Besfamille
Universidad Torcuato Di Tella 2008

1 Abstract

En este trabajo se analiza un problema de imposicion óptima cuando existe la posibilidad de invertir en una tecnología de auditoría para mejorar la capacidad del gobierno para detectar infractores. Se estudia cómo interactúan entre sí un impuesto al patrimonio, la inversión en las auditorías, la recaudación fiscal y la provisión de un bien público en un contexto de desigualdad de ingresos. Los resultados no son unívocos, sino que surgirán una serie de regímenes de acuerdo a si es eficiente que el gobierno efectivamente participe en la economía, es decir, invierta en el sistema impositivo, cobre impuestos y produzca el bien público.

2 Introducción

El balance entre el endeudamiento público, la recaudación fiscal y la provisión de bienes y servicios públicos siempre ha sido una cuestión de importancia en la agenda pública. En un país como Estados Unidos, el sistema de recaudación fiscal sumamente desarrollado alivia la presión impuesta por un gran déficit fiscal. Argentina, sin embargo, debe hacer frente a una considerable deuda externa, la cual debe repagarse con ingresos públicos. Por lo tanto resulta preocupante que exista una de tasa de evasión fiscal de aproximadamente un 40%, ya que de esta manera se reduce esta fuente de repago por parte del Estado Argentino. Resulta imperativo entonces aprovechar los avances tecnológicos para mejorar, de manera eficiente, el sistema impositivo y sus respectivos controles. Simultáneamente se debe elegir el nivel de impuestos y provisión de bienes públicos que el gobierno considere óptimos, teniendo en cuenta los consecuentes efectos sobre la distribución de la riqueza y el bienestar social.

Más adelante se cita un ejemplo de una herramienta incoporada por el gobierno argentino para facilitar las auditorías de impuesto a los patrimonios. Luego se formaliza la situación descripta anteriormente: se crea un gobierno que, con preferencias definidas respecto a redistribución, busca maximizar el bienestar general en una sociedad con individuos que reciben mayor o menor ingreso. El gobierno tiene la posibilidad de producir un bien público, invertir en el sistema de las auditorías y cobrar impuestos. La hipótesis a priori es que, al tratarse básicamente de un análisis costo-beneficio, las variables óptimas que conforman el sistema impositivo dependerán de los parámetros preestablecidos. Es decir que no podrá decirse en principio si el Estado debiera tener un rol activo en la economía o simplemente debiera no intervenir. Después comprobaremos para qué niveles de los parámetros se producirá un bien público y se modernizará el sistema de auditorías.

Diamond & Mirrlees (1971) fueron pioneros en unir las teorías de bienestar, impuestos y la provisión de un bien público. Crearon un modelo cuyo gobierno cobraba impuestos y los gastaba de tal modo que el beneficio era percibido en forma de un bien no rival ni excluyente, buscando maximizar el bienestar social. En la misma línea conceptual se encuentra el paper *Besfamille & Parlatore (2007),* en el cual basamos nuestro trabajo. Este último describe un modelo con un gobierno que trata de maximizar una función de bienestar, contemplando la utilidad generada por el consumo de un bien privado (a partir de dotaciones preestablecidas exógenamente), el consumo de un bien público y el diferencial de bienestar individual entre los dos tipos de contribuyentes existentes. La financiación de estas actividades resulta de la recaudación obtenida de cobrar un impuesto de suma fija, a la vez que se llevan a cabo auditorías por la autoridad impositiva con el fin de revelar a evasores de impuestos.

La diferencia central entre el trabajo de *Besfamille & Parlatore (2007)* y el presente es que el primero se centra en las posibilidades de ahorro posible en costos variables de auditorías (y finalmente el beneficio en bienestar) mediante la posibilidad de incurrir en un costo fijo una única vez (la inversión). El actual, en cambio, toma el costo de auditoría como constante y trata de maximizar el bienestar mediante el rediseño del método de auditoría. En consecuencia mejorará la capacidad de detección de infractores y reconocerá una nueva dimensión: la inversión en capital humano y herramientas auxiliares del fisco. Además, se considera en este trabajo la posibilidad innovadora de que, aún dentro de los casos auditados, no se logre detectar a los impostores. Este supuesto se basa en el conocimiento de que esto ocurre efectivamente en la práctica, ya que la población encuentra maneras de engañar a los auditores.

A diferencia del impuesto al consumo, que es *ipso facto,* el impuesto a las ganancias se aplica una vez percibido el ingreso, es decir que es *ex post.* Esta característica del impuesto a las ganancias implica que los habitantes deben declarar sus ingresos para que la administración fiscal determine el monto a tributar. Simultáneamente, por una cuestión de riesgo moral, el fisco debe crear un mecanismo para corroborar la validez de las declaraciones de los contribuyentes. El mecanismo más difundido, y por lo tanto representado en los trabajos pasados, es el de las auditorías. Es indispensable tomar en cuenta que los métodos aplicados no tienen certeza perfecta de reconocer falsos informes. Existen entidades a cargo de considerar problemáticas como esta, por ejemplo la Dirección de Rentas de la provincia de Buenos Aires, que se dedican determinar las tecnologías de relevación y su implementación para reducir la evasión fiscal según sus objetivos. Debe tenerse en cuenta, como detalla *Becker (1967)*, que sólo se debería tratar de eliminar la evasión en la medida que el costo de invertir sea menor al costo generado por la infracción. Esto implica que la evasión debe combatirse cuando lo sea conveniente y no necesariamente el óptimo se encontrará en al lograr la eradicación total de la misma.

Una de las tecnologías incorporadas recientemente por esta Dirección es el sistema *Google Earth Pro* (http://earth.google.com/), creación de una empresa llamada Keyhole en el año 2001. Este es un programa gratuito o pago, dependiendo de las necesidades del uso que le dé el usuario, con acceso a las imágenes aéreas obtenidas del satélite Quick Bird. Previo a la implementación de *Google Earth Pro*, la Oficina de Rentas de la Provincia de Buenos Aires se vio obligada a pedir a la legislatura provincial una extensión de sus facultades para poder utilizar el formato satelital para las inspecciones, ya que estaban en juego consideraciones legislativas como la violación de privacidad de las personas. Igualmente la habilitación fue concedida en a efectos de auxiliar al gobierno en la lucha contra la evasión fiscal generalizada y estructural presente en la economía argentina.

Mediante el pago de U$S 400 anuales la Dirección de Rentas tiene acceso a imágenes satelitales de todo el territorio de la Provincia de Buenos Aires. Gracias a la digitalización del catastro, los planos declarados pueden ser entonces cotejados con las fotografías obtenidas del satélite; de esta forma se pueden descubrir inconsistencias entre las características de las propiedades presentes en las declaraciones de los contribuyentes respecto de las imágenes relevadas . Con esta licencia los colaboradores de la Dirección de Rentas pueden importar a hojas de cálculo las ubicaciones de los inmuebles; asimismo, pueden también superponer imágenes e imprimirlas en alta definición, entre otras facilidades. La herramienta que se utiliza actualmente para predios de más de 5000 metros cuadrados fue utilizada por primera vez en febrero del año 2007.

Según cifras oficiales la deuda descubierta solamente a través de *Google Earth* en la Provincia de Buenos Aires asciende a más de 200 millones de pesos como cota inferior. Esta cifra podría llegar a 300 millones, ya que las imágenes son tomadas desde el aire y al no poder especificarse la altura de las propiedades es anulando el impacto por crecimiento vertical. La estimación oficial calcula que podrían encontrarse obligaciones por más de 1000 millones de pesos. El descubrimiento de más de 70.000 propiedades en sitios declarados como baldíos, la existencia de mas de 1.500 piletas sin declarar (se estima que existen 25.000 en forma irregular) y la existencia de más de 4 millones de silos ilegales conforman el valor de la deuda descubierta mediante el uso de *Google Earth*. De todas maneras, el uso de este programa no se limita sólo al gobierno bonaerense. Por ejemplo, la Dirección de Ingresos de Pisa, Italia, ha utilizado este sistema para la detección de yates anclados en marinas que no habian sido declarados al fisco.

En resumen, el caso del *Google Earth Pro* es un ejemplo ideal de la dinámica de nuestro modelo: representa un tipo de inversión que claramente afecta la eficiencia de las auditorías, que a su vez influye en la probabilidad de revelar al infractor.

3 El Modelo

Habrá tres clases de agentes: dos tipos de habitantes y el gobierno que administra dicho territorio. Los individuos de 2 tipos pueden diferenciarse según sus dotaciones iniciales. El primero se caracteriza por haber recibido un ingreso exógeno positivo y serán considerados *ricos*. El otro no recibe ingreso alguno y serán identificados como *pobres*. La distinción entre los niveles de riqueza ex ante determina la dimensión de heterogeneidad en el ingreso que se desea explorar y que fue comentado en lo expuesto anteriormente. El gobierno, por su parte, tendrá como objetivo maximizar el bienestar social, que depende del consumo de bienes tanto privados como públicos por cada miembro de la sociedad e incorporará un criterio de aversión a la desigualdad de los mismos. El gobierno tendrá el rol de determinar el nivel de inversión en el desarrollo/adquisición de tecnología de auditoría, el monto del impuesto de suma fija y por último, la cantidad de bien público a ser proveído. De este modo quedará determinada la política fiscal óptima. Esta interacción entre los agentes se lleva a cabo en un juego de 3 etapas que se desarrolla de la siguiente manera:

- **Primera etapa:** los sujetos reciben sus ingresos exógenamente sin que el gobierno perciba quién recibe un monto positivo. El gobierno asimismo decide cuántos recursos invertir en la mejora de la eficacia de la administración tributaria en detectar declaraciones de ingreso falsas.

- **Segunda etapa:** el gobierno diseña la política fiscal, dónde especifica el monto del impuesto que cobrará. Recibe las declaraciones de ingresos, determina la proporción de las declaraciones que analizará y realiza las mismas.

- **Tercera etapa**: el gobierno delega la implementación en la administración tributaria, que se encarga de recolectar impuestos y hacer cumplir la ley, imponiendo multas en los casos necesarios.

Esta administración es meramente un apéndice del gobierno, ya que sigue fielmente el sistema impositivo ideado por el primero. Como los ingresos de los individuos son información privada y por ende inobservables para el Estado, los sujetos estarán obligados a presentarle al fisco una declaración impositiva. Este organismo se encargará de investigar una proporción de los reportes recibidos, definido de antemano por el gobierno. Estas auditorías revalarán al evasor con una probabilidad determinada por la inversión de la primer etapa y, al igual que *Yitzhaki (1979)*, asumimos que es costoso llevarlas a cabo porque implican la contratación de personal, su entrenamiento, las horas laborales involucradas y aquello requerido para dicho proceso.

Una vez llevado a cabo el análisis revelador, existirá cierta probabilidad de capturar evasores que depende positivamente del nivel de inversión realizada, pero de modo decreciente según es comprehendido por la ley de rendimientros decrecientes. Si la auditoría descubre que el individuo ha reportado erroneamente, la administración tributaria procederá al cobro del impuesto al evasor acorde a su ingreso verdadero y le impondrá una multa adicional. Como precisó Becker en su trabajo, las multas, en contraste con otros métodos de castigo, tienen la ventaja de ser poco costosas para el gobierno en comparación a otras estructuras de incentivos. Estas no acarrean otro costo además de la colección y revelación, efectivamente bajan la utilidad del infractor y además pueden aumentar el bienestar de la sociedad mediante la utilización del dinero recaudado en fines socialmente benéficos. En este caso en particular, la totalidad de la recaudación neta (impuestos y multas, netos de los costos de inversión y auditoría) es utilizada por el gobierno para financiar la provisión de cierta cantidad de bien público.

En primer lugar se calcula la política fiscal óptima bajo información completa. Esto servirá de referencia posteriormente respecto del caso central de este estudio.

Luego pasamos al caso central con información asimétrica. Como el punto que nos interesa analizar es la dinámica del modelo cuando la inversión afecta la probabilidad de descubrir al evasor, realizaremos un conjunto de supuestos simplificadores. Consecuentemente existirá un solo tipo de bien público, el ingreso de los individuos será exógeno, será una economía de dotaciones y por ultimo, el gobierno se compromete enteramente a la política que diseña y el fisco la cumple a rajatabla.

Resolviendo el modelo nos encontramos que dependiendo nivel de inversión que se determine en el primer estadio, surgirán dos regímenes.

En el primero, la probabilidad de detectar al evasor es suficientemente alta y por ende al estado le conviene determinar un impuesto positivo. Encontraremos finalmente que el impuesto óptimo con informacion asimétrica es menor al impuesto optimo con informacion completa. Asimismo, mostraremos que el impuesto óptimo crecen con la inversión en la administración fiscal y analizaremos la evolución de la probabilidad de auditar respecto de la misma.

En el segundo régimen, la probabilidad de descubrir al evasor es lo suficientemente baja por lo que el gobierno decide no gravar el ingreso. El Estado anticipa esta situación, mediante un método de resolución de inducción hacia atrás. En primer lugar, determinará el nivel óptimo del impuesto y decidirá si le conviene invertir o no (y cuántos recursos invertir) para aumentar la probabilidad de descubrir al evasor. Esta decisión cambiará el bienestar social esperado ya que invertir más significa tener menos dinero disponible para la provisión de bien público. El nivel de inversión envía una señal a los contribuyentes sobre la capacidad reveladora del Estado respecto a los evasores. Además afectará el estado de naturaleza de la segunda etapa, ya que dependiendo de la inversión uno se podrá ubicar en el primer o segundo régimen. Segun los parámetros utilizados caracterizaremos la inversión óptima, por lo cual podremos saber en que situación se ubicará el gobierno: gravar o no gravar. Completaremos la construccion del modelo con estatica comparativa y, por ultimo, realizaremos simulaciones del problema de maximizacion del gobierno.

3.0.1 Caracterización Matemática

En nuestra economía conviven dos tipos de agentes: los individuos y el gobierno. La población de individuos forma un continuo de tamaño 1. Por un lado, los individuos ricos reciben un ingreso exógeno $y > 0$ y los representaremos con la letra r. Por otro lado, los individuos pobres que no poseen ingreso alguno seran representados con la letra p. En resumen, la población será de tipo $i \in (p; r)$, siendo $i = p$ pobre y $i = r$ rico. El tipo de individuo es una variable aleatória idéntica e independientemente distribuida con una probabilidad de distribución conocida $(\mu, 1-\mu)$, donde $\mu = \Pr[i = r] > 0$. Utilizando la Ley de los Grandes números, se puede asegurar que la variable μ también representará la proporción de individuos ricos en la población (en tanto $1-\mu$ será la proporción de pobres). Es fundamental aclarar que cada individuo conoce su clase. El Estado, sin embargo, desconoce esta información, ya que es privada.

El otro agente, el gobierno, se encargará de determinar el nivel del bien público (G), por lo que necesitará financiarse para asegurar esta provisión. El bien G es consumido por todos los individuos, y es el único bien consumido por los pobres, por lo que definimos al bienestar de los estos como $w_p = G$. La población de individuos ricos deriva utilidad positiva tanto del consumo de este bien público G como del consumo de un bien privado q. El consumo de este bien es posible ya que, como enunciamos antes, los ricos tienen un ingreso exógeno positivo. Normalizamos el precio del bien q a 1. Entonces el bienestar de ellos está definido como $w_r = u(q) + G$. Es importante reconocer que la utilidad marginal del bien público será siempre constante mientras que la del privado será decreciente ya que la función u es estrictamente cóncava y cumple las condiciones de Inada:

- $u(0) = 0$
- $u\prime(x) \exists \forall x$
- $u\prime(x) > 0 \forall x$
- $u\prime\prime(x) < 0 \forall x$
- $\lim_{x \to 0} U\prime(x) = \infty$
- $\lim_{x \to \infty} U\prime(x) = 0$

El gobierno buscará maximizar mediante sus herramientas (la inversión, el diseño de política fiscal y la provisión de un bien público) su función de bienestar social utilitarista W que puede verse como la suma de las utilidades de los individuos, como se ve a continuación:

$$W = \mu w_r + (1-\mu) w_p - \mu (1-\alpha)(w_{r-} w_p)$$

$$= \alpha \mu u(q) + G$$

El parámetro $(1-\alpha)$ representa la aversión a la desigualdad por parte del gobierno y está acotado: $\alpha \in [0, 1]$. Con cualquier valor $\alpha < 1$, el gobierno tendrá una merma en el bienestar social si existe desigualdad de bienestar entre rico y del pobre, y la distancia entre w_r y w_p afectará más a W cuánto más grande sea $(1-\alpha)$. El gobierno tratará de maximizar W ideando una política fiscal y delegando su implementación al organismo de administración tributaria.

La secuencia de acontecimientos se desarrollará en tres etapas:

1. Primer estadio: Los individuos reciben cierta dotación de ingresos. El gobierno elegirá la inversión e en la tecnología de auditoría.

2. Segundo estadio: El gobierno diseña y promulga una ley impositiva. La ley está compuesta de un impuesto $t \geq 0$ destinado a individuos ricos y de las herramientas que conciernen aplicación efectiva. Estas herramientas consisten en: una multa $f \geq 0$ para los evasores, que será efectiva en caso de que estos sean descubiertos por la auditoría; una probabilidad $\pi \in [0,1]$ de que los individuos entren en el proceso de auditoria; y, para la población que se encuentre en el grupo a auditar, de una probabilidad de revelar al evasor de $P(e) \in [0,1]$ siendo e la inversión realizada en el primer período. Esta ley impositiva está restringida en su accionar sólo por la capacidad de pago del constribuyente, es decir, la suma del impuesto y la multa a cobrar no pueden superar los ingresos del consumidor.

3. Tercer estadio: A partir de aquí entra en juego la administración tributaria. Los individuos deben presentar una declaración impositiva al fisco. Este auditará las declaraciones con una probabilidad π. Dentro del grupo auditado el fisco tendrá un probabilidad $P(e,\delta)$ de descubrir un evasor. En caso de ser descubierto, el agente pagará, no sólo el impuesto t, sino también una penalidad f.

La realización de cada auditoría tendrá un costo para el fisco igual a c. Como hemos mencionado anteriormente, este es tomado exógenamente ya que no es una de las variables que nos interesan analizar profundamente en este modelo. En contraste, en el paper *Besfamille & Parlatore (2007),* el costo de la auditoria es justamente una variable de estado, determinada por la inversion en el sistema fiscal. Por otro lado, la recolección del impuesto (y de las penalidades) tendrán costo nulo, tanto para los agentes como para el recaudador.

Como ha sido mencionado, la probabilidad de detectar al evasor es $P(e,\delta)$. Inicialmente, sin inversión, esta probabilidad es $P(0,\delta) = 0$. Intuitivamente, a medida que el gobierno invierte en la administración fiscal, esta probabilidad crece, aumentando la eficiencia del sistema impositivo. Matemáticamente, $\dfrac{\partial P}{\partial e} > 0$, $\dfrac{\partial P^2}{\partial^2 e} < 0$.

El parámetro δ determina la productividad marginal de la inversión. Para dar un ejemplo relacionado con la herramienta de Google Earth, δ podría relacionarse con la mejora en definición de las imágenes provistos por pagar para obtener la cuenta profesional y los servicios adicionales disponibles. El parámetro $\delta > 0$ entonces, afectará la probabilidad de detección. Cuanto más alto sea este, mayor será el valor de la variable $P : P_\delta > 0$.

Nunca se auditará un sujeto que haya reportado ser rico ya que no hay incentivos para hacer tal reporte falso y además nunca podría eludir su restricción de responsabilidad limitada. Para el grupo que reporta un ingreso nulo, se presentarán dos casos. En el primero el auditor descubre, con la probabilidad anteriormente definida, que el individuo está mintiendo y por ende es castigado; pagará el impuesto de acorde a su riqueza verdadera más una multa adicional f . En caso que el auditor no logre descubrir al evasor, este terminará pagando según lo que declaró en su reporte. Con todos los recursos (impuestos y penalidades) que se hayan recaudado, una parte se destinará a cubrir el monto ya invertido en el primer estadio, otra a la provisión del bien público G (que tendrá un costo de adquisición igual a ρ) y por último el costo mismo de realizar las auditorías.

3.1 Política fiscal óptima bajo información completa

Nuestro punto de partida es resolver el modelo para el caso de información completa. A continuación repetiremos el análisis para el caso de información asimétrica. Nuestro objetivo es comparar las políticas fiscales áptimas que surgen de ambos casos. En el primer caso, el gobierno observa los ingresos de todos los ciudadanos. En consecuencia es inútil realizar auditorías por lo que el gobierno omitirá lo que hemos clasificado como primer estadío: no se necesitará invertir en la mejora de la administración tributaria ni se necesitará definir una penalidad. El impuesto por ende será la única variable control bajo informacion perfecta. Esta se define resolviendo el siguiente problema.

Este problema se puede caracterizar en 3 ecuaciones. En primer lugar, nuestra función objetivo, que determina factores que el gobierno. Valoramos el igualitarismo, el consumo del bien privado y del publico. En segundo lugar, la restricción presupuestaria de los individuos. Los individuos destinan parte de su ingreso al pago de impuestos. El ingreso residual sera destinado al consumo del bien privado. Asimismo, en nuestro problema consideramos la factibilidad de que los individuos puedan cumplir con los requerimientos impositivos. Por ello mismo se incluye una restricción de responsabilidad limitada. Esta determina que sólo es posible exigirle al sujeto la totalidad de su dotación de riqueza y no más. Consecuentemente esto limita la recaudación total posible. Por último debe tomarse en consideración la restricción presupuestaria del gobierno que determina las posibilidades de proveer el bien público tras determinar la recaudación neta.

$$\begin{cases} \underset{\{t,G\}}{Max} & \alpha\mu u\left(q\right)+G & \\ s.t. & q\leq y-t & [RP] \\ & 0\leq t & \\ & t\leq y & [RL] \\ & \rho G=\mu t & [G] \end{cases}$$

Llamamos $[RL]$ a la restricción de responsabilidad limitada y $[G]$, a la restricción presupuestaria del gobierno.

Reemplazando el consumo privado por el ingreso disponible de los agentes mediante el uso de sus restricciones presupuestarias $[RP]$, el problema queda:

$$\begin{cases} \underset{\{t,G\}}{Max} & \alpha\mu u\left(q\right)+G & \\ s.t. & 0\leq t & \\ & t\leq y & [RL] \\ & \rho G=\mu t & [G] \end{cases}$$

La condición de primer orden es, $\alpha u_q\left(y-t^*\right)=\dfrac{1}{\rho}$ siendo t^* el impuesto óptimo de información completa. En el óptimo, el gobierno grava al rico en orden de igualar su utilidad marginal social del consumo con la utilidad marginal social del último peso gastado en el bien público. Debido a las propiedades de la función de utilidad u, t^* verifica $0<t^*<Y$.

3.2 Estatica comparativa

Realizando operaciones estática comparativa mediante el Teorema de la Función Implícita a partir de la condición de primer orden podemos llegar a las siguientes conclusiones:

$=$

$=$

$=$

AGREGAR DERIVADAS PARCIALES CON RESPECTO A T

- Cuando el ingreso imponible Y o el grado de aversión a la desigualdad $(1-\alpha)$ crecen, la utilidad marginal social del consumo decrece. Es por eso que, en orden de incrementar la provisión del bien público y asi reducir la brecha de desigualdad, el gobierno incrementa la tasa del impuesto.

- Cuando el costo del bien público ρ aumenta, la utilidad marginal social del último peso gastado en el bien público decrece. Entonces, el gobierno reduce t^*.

4 Información asimétrica

4.1 Segundo estadio

4.1.1 Función Objetivo

Cuando se plantea un juego de incentivos es preciso tomar en consideración las motivaciones y restricciones que determinan el comportamiento de los agentes además de las del sujeto maximizador. Podemos definir el problema que nos compete ahora, con información asimétrica, en 4 ecuaciones. La función objetivo es equivalente a aquella utilizada en el caso de información perfecta. La restricción de responsabilidad limitada se modifica respecto a la de información completa. En este problema la suma del impuesto y de la penalidad por reportar falsamente su ingreso no puede superar la dotación de riqueza del individuo. Esto no sólo limita la recaudación total posible, también descarta la posibilidad de poder extender la multa sobre ingresos futuros, lo que hace más relevante aún el nivel relativo de t y f. En tercer lugar, como en todo juego de información asimétrica está presente la restricción de compatibilidad de incentivos. Esta se refiere a la condición necesaria para que el contribuyente tome el curso de acción deseado. En este caso se busca que los consumidores ricos deseen revelar su riqueza, en lugar de optar correr el riesgo de ser auditados y posiblemente descubiertos. Existe una probabilidad π de que entren en el proceso de auditoria. Ya dentro del grupo auditado, considerando la capacidad imperfecta de detectar infractores, la revelación estos mismos se comporta como una distribución Bernoulli (P). En caso de ser descubierto, el agente paga tanto el impuesto (t) como una penalidad (f).

Por ultimo debe tomarse en consideración la restricción presupuestaria del gobierno que determina las posibilidades de proveer el bien público tras determinar la recaudación neta. Con respecto a información completa esta restricción cambia ya que en este caso se tiene que considerar la recaudación total menos el costo de realizar las auditorías y la inversión en tecnología.

4.1.2 El problema

$$\begin{cases} \underset{\{t,f,G,\pi\}}{Max} & \alpha\mu U(Y-t)+G & \\ s.t. & 0\leq f\leq Y-t & [LL] \\ & U(Y-t)\geq \pi\left(P(e)U(Y-t-f)+(1-P(e))U(Y)\right)+(1-\pi)U(Y) & [IC] \\ & \rho G\leq \mu t-(1-\mu)\pi C-e & [G] \end{cases}$$

Para lograr resolver este problema será importante comprender las implicancias de cada una de las restricciones y por ende utilizar la intuición para acotar los casos y llegar a un resultado inequívoco.

4.1.3 Simplificación de las restricciones

La restricción [LL] sugiere que el gobierno no puede sustraer más de lo que el sujeto posee en ese momento del tiempo. Ya que nuestro mecanismo tiene como objetivo ser "revelador" y posee un costo, es razonable inferir que en el óptimo si un sujeto miente y es aprehendido el castigo será el máximo posible ya que este justamente este es el comportamiento que se quiere evitar. Es decir, se quitará toda su riqueza y quedará como si fuera de la clase pobre, tal que $Y - t - f = 0$.

Consecuentemente puede utilizarse esta derivación de la restricción [LL] sobre [IC]. Esto simplifica la expresión a tal punto que π (proporción auditada) es despejable (ya que se pierde el término del sujeto "castigado").

$$U(Y-t) = \pi(1-P(e))U(Y) + (1-\pi)U(Y)$$

$$U(Y-t) = \pi\left[(1-P(e))U(Y) - U(Y)\right] + U(Y)$$

$$\pi = \frac{U(Y) - U(Y-t)}{P(e)U(Y)}$$

Esta nueva formulación puede reemplazarse en [G], y con operaciones mínimas explicitar el nivel de consumo de bien público en términos de los parámetros P y e.

$$\rho G = \mu t - (1-\mu)\tfrac{U(Y)-U(Y-t)}{P(e)U(Y)}C - e$$

$$G = \tfrac{1}{\rho}\left[\mu t - (1-\mu)\left(\tfrac{U(Y)-U(Y-t)}{P(e)U(Y)}\right)C - e\right]$$

Al reemplazar esta nueva expresión obtenemos nuestro problema definitivo, únicamente en términos de t y los parámetros.

$$F = \begin{cases} \underset{\{t\}}{Max} \quad \alpha\mu U(Y-t) + \tfrac{1}{\rho}\left[\mu t - (1-\mu)\left(\tfrac{U(Y)-U(Y-t)}{P(e)U(Y)}\right)c - e\right] \end{cases}$$

CPO

$$-\alpha\mu U\prime(Y-t) + \tfrac{1}{\rho}\left[\mu + (1-\mu)\left(\frac{U\prime(Y-t)}{P(e)U(Y)}\right)c\right] = 0$$

$$\rho\alpha U\prime(Y-t) = 1 - \frac{1-\mu}{\mu}\frac{U\prime(Y-t)}{P(e)U(Y)}c$$

$$\rho\alpha U\prime(Y-t)\left[\frac{\mu\rho\alpha P(e)U(Y)+(1-\mu)c}{\mu\rho\alpha P(e)U(Y)}\right] = 1$$

$$\rho\alpha U\prime(Y-t) = 1 - \frac{c(1-\mu)}{c(1-\mu)+\alpha\rho\mu P(e)U(Y)}$$
$$\Downarrow$$

$$t^* = t\left(c,\mu,\rho,\alpha,P(e),Y\right)$$

Este es el valor óptimo de t si el resultado es una solución interna en concordancia con los supuestos preestablecidos. t aparece sólo en el lado izquierdo de la ecuación como parte de la derivada de una función creciente y cóncava, mientras que del lado derecho se encuentran parámetros y la función de utilidad evaluada en un punto específico. Esto implica que tenemos $U\prime$, una función monotónicamente decreciente, con $\lim_{x\to 0} U\prime(x)=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} U\prime(x)=0$, igualada a un número, por ende existe una solución si el conjunto de parámetros y función de utilidad son "adecuados".

Podemos llegar también a la conclusión de que por concavidad el impuesto óptimo t^* es menor que el de información completa.

$$U\prime(Y-t^*) = \frac{1}{\alpha\rho}$$
$$U\prime(Y-t^*) = \frac{1}{\alpha\rho}\left[1-\frac{c(1-\mu)}{c(1-\mu)+\alpha\rho\mu P(e)U(Y)}\right]$$
Como $\frac{c(1-\mu)}{c(1-\mu)+\alpha\rho\mu P(e)U(Y)} < 1$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{\alpha\rho}\left[1-\frac{c(1-\mu)}{c(1-\mu)+\alpha\rho\mu P(e)U(Y)}\right] < \frac{1}{\alpha\rho}$$

Lemma 1 *t^* de información perfecta es menor tal que $U\prime(perfecta) > U\prime(imp.)$ $\longrightarrow t(imp) > t(perfecta)$.*

4.1.4 Existencia de una discontinuidad

Cabe recordar la importancia de P en este momento. Esta variable es tomada como dada en el segundo estadio pero es consecuencia de una decisión anterior del planificador central y visible para todos. La importancia de este dato es que puede no ser conveniente auditar en toda situación. Gravar los ingresos conlleva costos de auditoría e inversión y puede ser más el daño de intentar redistribuir que el de dejar a los ricos consumir privadamente, bajo esta función de bienestar social. Asimismo es necesario recordar que cada sujeto tiene cierta probabilidad definida de ser o no descubierto. Sin embargo, al agregar todos los contribuyentes por una cuestión de variabilidad aleatoria puede la cantidad total de individuos descubiertos puede diferir de la proporción P de la cantidad π de las Bernoulli individuales. Nada garantiza que el valor realizado sea igual al valor esperado. Empero, resulta imperativo recordar que hay un continuo de sujetos entre 0 y 1, y por ende existen infinitos puntos a ser evaluados con esta probabilidad (e igualmente para cualquier intervalo cerrado de largo π). Utilizando la Ley de los Grandes números, uno puede asegurar que la proporción de la muestra auditada que evade convergerá en probabilidad a P. Esto es posible ya que tenemos una muestra de infinitas variables aleatorias distribuidas idénticamente, con la misma esperanza (P) y definidas sobre un mismo conjunto de probabilidad. Por ende, la media muestral convergerá a la media poblacional. Aún sabiendo que esta proporción es fija, es posible que no sea conveniente auditar.

Proponemos, consecuentemente, una discontinuidad en el modelo. Para costos muy altos de auditoría/bien público o escasa proporción de gente rica, puede ser conveniente no intervenir y permitir un nivel de bienestar social $\alpha\mu U(Y)$.

Proposition 2 *Estudiando* $\dfrac{dt}{dP}$ *mediante el Teorema de la Función Implícita, vemos que* t *es creciente respecto de* P.

$$\alpha\rho U''(Y-t)(-1)\cdot dt + \frac{c(1-\mu)(-1)\rho\mu U(Y)P'(e)}{[c(1-\mu)+\rho\mu P(e)U(Y)]^2}\cdot dP = 0$$

$$\frac{dt}{dP} = \frac{(-1)c(1-\mu)\rho\mu U(Y)}{\alpha\rho U''(Y-t)[c(1-\mu)+\rho\mu P(e)U(Y)]^2} > 0$$

Esto confirma que a medida que aumenta la probabilidad de descubir al evasor, ceteris paribus, el gobierno tiene mayores incentivos a subir los impuestos. A pesar de que un aumento del nivel de impuestos genera un mayor incentivo a evadir, el aumento en la probabilidad de revelar infractores más que compensa esto. Consecuentemente, a mayor nivel de inversión (ya que $P' > 0$) siempre aumentará monotónamente el impuesto. Esta determinación es categórica ya que proporciona un resultado carente de ambiguedades y válido para todo caso. Es una señal muy fuerte para los agentes, ya que una inversión fuerte conllevará a niveles de impuestos altos siempre.

Proposition 3 *Es posible encontrar un punto que genera una discontinuidad en el modelo a partir del cual no se gravará. Esto sucederá a partir del punto donde el impuesto optimo sea negativo, es decir, para* $P < \overline{P}$.

$$\rho\alpha U\prime(Y) = 1 - \frac{c(1-\mu)}{c(1-\mu) + \alpha\rho\mu P(e)U(Y)}$$

$$\overline{P} = \frac{1-\mu}{\mu}\frac{U\prime(Y)}{U(Y)}\frac{c}{1-\alpha\rho U\prime(Y)}$$

Ya que t es una función creciente de P es posible explicitar un valor para el que t toma pasa de valores negativos a positivos. Como la función es siempre creciente, siempre y cuando los parámetros permitan respetar la cota que compete a P como probabilidad (debe permanecer en el intervalo 0 a 1).

Los 2 regímenes quedan caracterizados de la siguiente manera a partir de la reformulación de la función de bienestar social esperado:

$$E[W] = \begin{cases} E[W^{tax}] = \alpha\mu U(Y-t) + \frac{1}{\rho}\left[\mu t - (1-\mu)\left(\frac{U(Y)-U(Y-t)}{P(e)U(Y)}\right)c - e\right] & P > \overline{P} \\ E[W^{notax}] = \alpha\mu U(Y) & \overline{P} > P > 0 \end{cases}$$

Es posible quedar en un régimen donde es conveniente no gravar. Dado que el estado no obtiene recursos a partir de los impuestos no proveerá el bien publico. El bienestar social quedará determinado únicamente por el consumo de los individuos ricos y la porción pobre de la sociedad, en cambio, no tendrá posibilidad de consumo.

Por otro lado, el segundo régimen tendrá las características que hemos enunciado anteriormente y un propósito de este paper es, a partir de una función de bienestar social donde se valoriza a los dos tipos de individuos y a la desigualdad entre ellos, encontrar la inversión y el impuesto óptimo que maximicen esta función.

De este modo es perfectamente explícita la importancia de P, y por ende tambien de e.

4.1.5 Estática comparativa

Falta mirar si hay un patrón relevante en π respecto de P:

$$\pi = \frac{U(Y) - U(Y - t(P))}{P(e)U(Y)}$$

Por regla de Cociente

$$\frac{d\pi}{dP} = \frac{\left[(-1)(-1)U\prime(Y-t)\frac{\partial t}{\partial P}\right][P(e)U(Y)] - [U(Y) - U(Y-t)]\,U(Y)}{[P(e)U(Y)]^2}$$

$$\frac{d\pi}{dP} = \frac{U\prime(Y-t)\frac{\partial t}{\partial P}}{P(e)U(Y)} - \frac{U(Y) - U(Y-t)}{P(e)^2 U(Y)}$$

Reemplazando la derivada implícita:

$$\frac{d\pi}{dP} = -\frac{U\prime(Y-t)\alpha\rho\mu(1-\mu)c}{U\prime\prime(Y-t)\alpha\rho\,[c(1-\mu) + \alpha\rho\mu PU(Y)]^2} - \frac{U(Y) - U(Y-t)}{P(e)^2 U(Y)} \gtreqless 0$$

Habiendo simplificado la derivada a su mínima expresión no se arribó a un juego de condiciones suficientes para poder concluir acerca del sentido de esta. El resultado resulta ambiguo. Sin embargo, sí es posible establecer los puntos extremos y saber que a fin de cuentas, π oscila de manera indefinida desde el comienzo de la discontinuidad hasta el π de auditoria perfecta explorada en Besfamille 2007, $\frac{U(Y) - U(Y - t(1))}{U(Y)}$.

Lemma 4 *Si se cumplen estas cuartro condiciones* $\frac{\partial \pi}{\partial P} > 0$ *quedan asegurado.*

1. $\mu > \pi$
2. $-\frac{U\prime(Y-t)}{U\prime\prime(Y-t)} > 1$
3. $c(1-\mu) < 1$
4. $\alpha\rho U\prime(Y-t) > 2$

Lemma 5 *Existe una condición necesaria, pero no suficiente, útil para descartar que valga* $\frac{\partial \pi}{\partial P} > 0$. :

$$\frac{cP\mu}{(c(1-\mu) + \alpha\mu\rho PU(Y))} < 1$$

4.1.6 Comprobación de máximo

Ya ha sido caracterizado la solución de óptimo interior, considerando las restricciones existentes y la discontinuidad propia del modelo. Resta determinar si en verdad estamos ante un máximo o un mínimo. Para descubrirlo es preciso realizar un análisis de concavidad/convexidad, es decir las condiciones de segundo orden. Tal como fue mencionado anteriormente, la restricción presupuestaria del gobierno y la restricción de compatibilidad de incentivos estarán saturadas ya que, en caso contrario, se estaría sacrificando un beneficio inequívoco según nuestra función objetivo. Esto deja como variables endógenas a t y f, y como única restricción la responsabilidad limitada del sujeto.

CSO

$$\begin{cases} \underset{\{t,f,\lambda\}}{Max} & \alpha\mu U\left(Y-t\right)+\frac{1}{\rho}\left[\mu t-(1-\mu)\left(\frac{U(Y)-U(Y-t)}{P(e)U(Y)}\right)C-e\right] \\ s.t. & 0\leq f\leq Y-t \qquad [LL] \end{cases}$$

Resolvemos el lagrangiano y obtenemos la matriz del hessiano orlado.

$$\mathcal{L}=\alpha\mu U\left(Y-t\right)+\frac{1}{\rho}\left[\mu t-(1-\mu)\left(\frac{U(Y)-U(Y-t)}{P(e)U(Y)}\right)C-e\right]-\lambda\left[f-Y+t\right]$$

$$\mathcal{L}_t=-\alpha\mu U\prime\left(Y-t\right)+\frac{1}{\rho}\left[\mu-(1-\mu)\frac{\partial\pi}{\partial t}C\right]-\lambda$$

$$\mathcal{L}_f=-\frac{1}{\rho}\left[(1-\mu)\frac{\partial\pi}{\partial f}c\right]-\lambda$$

$$\mathcal{L}_{tt}=\alpha\mu U\prime\prime\left(Y-t\right)-\frac{1}{\rho}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}c\right]$$

$$\mathcal{L}_{ff}=-\frac{1}{\rho}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2\pi}{\partial f^2}c\right]$$

$$\mathcal{L}_{ft}=-\frac{1}{\rho}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2\pi}{\partial f\partial t}c\right]$$

$$\mathcal{L}_{\lambda t}=\mathcal{L}_{\lambda f}=-1$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial f}=-\frac{\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t\right)\right)U\prime\left(Y-t-f\right)}{P\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}=\frac{U\prime\left(Y-t\right)}{P\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)}+\frac{\partial\pi}{\partial f}$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial t\partial f}=\frac{1}{P(U(Y)-U(Y-t-f))^3}\left[U\prime\left(Y-t-f\right)\left(\left(-U\left(Y\right)+U\left(Y-t-f\right)\right)U\prime\left(Y-t\right)+\right.\right.$$
$$\left.+2U\left(Y\right)-U\left(Y-t\right)U\prime\left(Y-t-f\right)\right)+\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t\right)\right)\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)U\prime\prime\left(Y-t-f\right)]$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}=\frac{1}{P(U(Y)-U(Y-t-f))^3}\left[-2U\prime\left(Y-t-f\right)\left(\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)U\prime\left(Y-t\right)\right)+\right.$$
$$+\left(-U\left(Y\right)+U\left(Y-t\right)\right)U\prime\left(Y-t-f\right)+\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)\left(\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)U\prime\prime\left(Y-t\right)\right.$$
$$\left.+\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t\right)\right)U\prime\prime\left(Y-t-f\right)\right)]$$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial f^2}=\frac{1}{P(U(Y)-U(Y-t-f))^3}\left[\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t\right)\right)\left(2U\prime\left(Y-t-t\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.+\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)U\prime\prime\left(Y-t-f\right)\right)]$$

4.1.7 Hessiano orlado

$$H=\begin{pmatrix}\mathcal{L}_{\lambda\lambda} & \mathcal{L}_{\lambda t} & \mathcal{L}_{\lambda f}\\ \mathcal{L}_{\lambda t} & \mathcal{L}_{tt} & \mathcal{L}_{tf}\\ \mathcal{L}_{\lambda f} & \mathcal{L}_{tf} & \mathcal{L}_{ff}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & \alpha\mu U\prime\prime\left(Y-t\right)-\frac{1}{\rho}\left(\left(1-\mu\right)\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}\right) & -\frac{1}{\rho}\left(\left(1-\mu\right)\frac{\partial^2\pi}{\partial t\partial f}c\right)\\ -1 & -\frac{1}{\rho}\left(\left(1-\mu\right)\frac{\partial^2\pi}{\partial t\partial f}c\right) & -\frac{1}{\rho}\left(\left(1-\mu\right)\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}c\right)\end{pmatrix}$$

$$Det[H]=\frac{c\left(1-\mu\right)+P\alpha\mu\rho\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)U\prime\prime\left(Y-t\right)}{P\rho\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)}\geq 0$$

Para verificar que la función que estamos maximizando sea cóncava es necesario que la matriz resultante sea semidefinida negativa. Esto es equivalente a exigir que su determinante sea positivo. En caso que esto se verifique, la función sujeta a sus restricciones es entonces cóncava y por ende el resultado obtenido de óptimo interior es de hecho un máximo local.

4.1.8 Kuhn-Tucker

Resta determinar si el óptimo obtenido es de hecho un máximo global. Para ello, requerimos que la submatriz sea semidefinida positiva y ello nos posibilita aplicar el Teorema de Kuhn-Tucker.

Theorem 6 *Kuhn-Tucker: para una función convexa y restricciones saturadas, si es posible encontrar un vector de $\lambda_i \leq 0 \forall i$ y resolvemos cada una de las derivadas parciales igual a 0, se ha encontrado un máximo.*

$$I = \begin{pmatrix} \alpha\mu U\prime\prime(Y-t) - \frac{1}{\rho}\left((1-\mu)\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}\right) & -\frac{1}{\rho}\left((1-\mu)\frac{\partial^2\pi}{\partial t\partial f}c\right) \\ -\frac{1}{\rho}\left((1-\mu)\frac{\partial^2\pi}{\partial t\partial f}c\right) & -\frac{1}{\rho}\left((1-\mu)\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}c\right) \end{pmatrix}$$

$$Det[I] = \frac{-c(-1+\mu)}{P^2\rho^2(U(Y)-U(Y-t-f))^4}\Big[c\left(-1+\mu\right)U\prime\left(Y-t\right)^2 U\prime\left(Y-t-f\right)^2 +$$
$$+\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t\right)\right)\left(c\left(-1+\mu\right)+P\alpha\rho\mu\left(-U\left(Y\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.U\left(Y-t-f\right)\right)\right)U\prime\prime\left(Y-t\right)\Big(2U\prime\left(Y-t-f\right)^2+$$
$$+\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right)U\prime\prime\left(Y-t-f\right)\Big)\Big]$$

Mediante la sustitución de algunos elementos de la ecuación es posible facilitar el análisis del signo. Consecuentemente al operar sobre la versión simplificada es claro el signo del determinante:

Notation 7 $\mathbb{A} = \frac{1}{P^2\rho^2(U(Y)-U(Y-t-f))^4} \geq 0$

Notation 8 $\mathbb{B} = c(1-\mu) \geq 0$

Notation 9 $\mathbb{C} = c(1-\mu)U\prime\left(Y-t\right)^2 U\prime\left(Y-t-f\right)^2 \geq 0$

Notation 10 $\mathbb{D} = c(1-\mu) + \alpha\rho\mu P\left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t-f\right)\right) \geq 0$

Consecuentemente al operar sobre la versión simplificada es claro el signo del determinante:

$$Det[I] = (-1)\,A\,(-1)\,B\left((-1)\,C + \left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t\right)\right)(-1)\,D\right)U\prime\prime\left(Y-t-f\right)$$

$$= -\mathbb{A}\mathbb{B}\left(\mathbb{C} + \left(U\left(Y\right)-U\left(Y-t\right)\right)\mathbb{D}\right)U\prime\prime\left(Y-t-f\right) \geq 0$$

Al cumplirse ambas condiciones se ven verificadas la condición del problema de maximización sujeta a las restricciones pertinentes del segundo estadio.

4.2 Primer estadio

4.2.1 Búsqueda de máximo

Tal como ha sido expuesto anteriormente, el problema se resuelve con inducción hacia atrás. Para resolver el problema en el primer estadio se tomará en consideración los valores óptimos hallados para las etapas posteriores. A continuación, la maximización se realizara sobre la misma función objetivo que en el segundo estadio, utilizando la misma la restricción presupuestaria del gobierno. También se utilizará la misma condición de recaudación positiva, la función de tecnología de inversión y se tomará en cuenta la discontinuidad encontrada.

$$\begin{cases} \underset{\{e,P\}}{Max} & \alpha\mu U\left(Y-t\right)+G & \\ s.t. & \rho G\leq\mu t-\left(1-\mu\right)\pi C-e & [G] \\ & 0\leq\mu t-\left(1-\mu\right)\pi C-e & [PT] \\ & t=t\left(P\right) & [SS1] \\ & \pi=\pi\left(P\right) & [SS2] \\ & P=P\left(e,\delta\right) & [SS3] \\ & \max\left\{0,\overline{P}\right\}\geq P & [D] \end{cases}$$

Al simplificar las restricciones como se hizo previamente, llegamos al siguiente problema univariado (la discontinuidad se considera implícita):

$$\begin{cases} \underset{\{e\}}{Max} & \alpha\mu U\left(Y-t\right)+\frac{1}{\rho}\left[\mu t-\left(1-\mu\right)\left(\frac{U(Y)-U(Y-t)}{P(e)U(Y)}\right)C-e\right] \end{cases}$$

CPO

$$-\alpha\mu U\prime\left(Y-t\right)t\prime\left(P\right)P\prime\left(e\right)+\frac{1}{\rho}\left[\mu t\prime\left(P\right)P\prime\left(e\right)-\left(1-\mu\right)\left[\frac{\partial\pi}{\partial t}t\prime\left(P\right)P\prime\left(e\right)+\frac{\partial\pi}{\partial P}P\prime\left(e\right)\right]-1\right]=0$$

$$t\prime\left(P\right)P\prime\left(e\right)\left[-\alpha\mu U\prime\left(Y-t\right)+\frac{1}{\rho}\left(\mu-\left(1-\mu\right)c\frac{\partial\pi}{\partial t}\right)\right]-\frac{1}{\rho}\left[\left(1-\mu\right)c\frac{\partial\pi}{\partial P}P\prime\left(e\right)-1\right]=0$$

Aplicando el Teorema del Envolvente con la condición de primer orden del segundo estadio arrivamos a la condición:

$$-\frac{1}{\rho}\left[\left(1-\mu\right)c\frac{\partial\pi}{\partial P}P\prime\left(e\right)-1\right]=0$$

$$\left(1-\mu\right)c\frac{\partial\pi}{\partial P}P\prime\left(e\right)=1$$
$$\Downarrow$$
$$e^{*}$$

Así queda caracterizada la solución de óptimo interior del primer estadio.

4.2.2 Comprobación de máximo

Para llevar a cabo el análisis univariado utilizaremos la condición de primer orden con π en forma implícita al evidenciar el resultado fácilmente.

$$-\left(1-\mu\right)\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial P^2}\frac{\partial P}{\partial e}+\frac{\partial\pi}{\partial P}\frac{\partial^2 P}{\partial e^2}\right]<0$$

Claim 11 ***Lemma 12*** *Como* $\boxed{A}=\frac{\partial^2\pi}{\partial P^2}>0$, $\boxed{B}=\frac{\partial P}{\partial e}>0$, $\boxed{C}=\frac{\partial\pi}{\partial P}<0$ *y* $\boxed{D}=\frac{\partial^2 P}{\partial e^2}<0$ *la función maximizada es cóncava.*

$$-(1-\mu)\left[\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}+\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{D}}\right]<0$$

Consecuentemente el valor de e^* encontrado es un máximo, si una vez comparado al valor de no intervención se verifica otorga un mayor nivel de bienestar social este es el máximo global y solución del problema.

4.3 Simulaciones

A efectos explicativos y como punto inicial para las simulaciones ulteriores será explicitada la resolución del problema "base". Esto ayudará a ilustrar la generación de discontinuidades por las características del modelo asi como verificar las propostulaciones anteriores.

Se tomaron los siguientes valores para los parámetros:

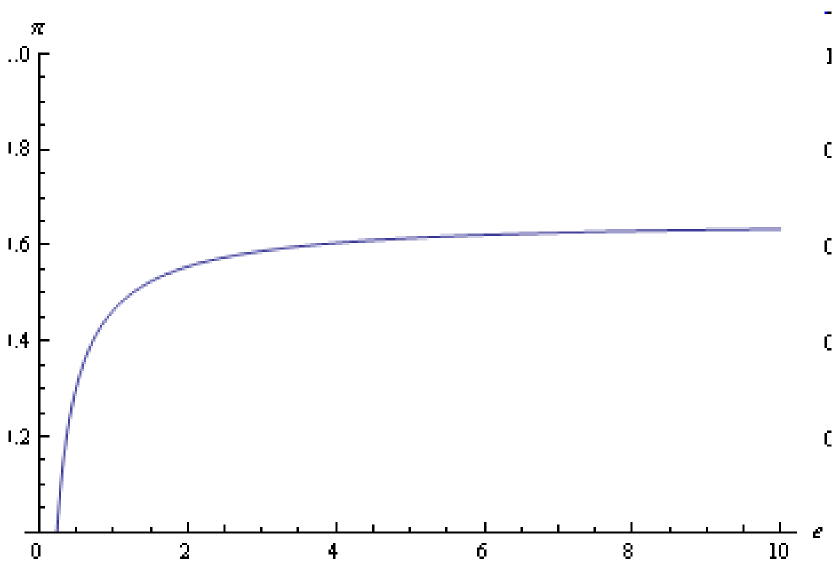
Y	γ	c	α	μ	ρ
100	0.5	50	0.5	0.4	0.5

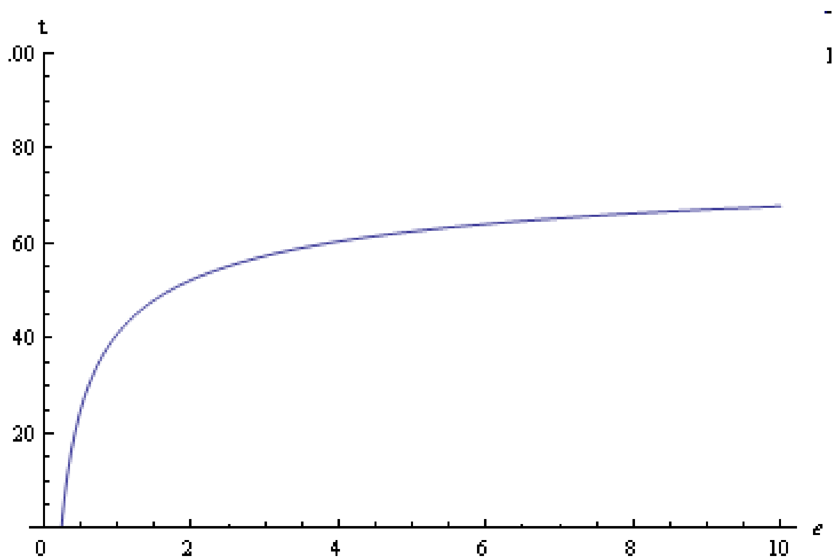
La función de utilidad utilizada será la de un coeficiente de aversión al riesgo constante:

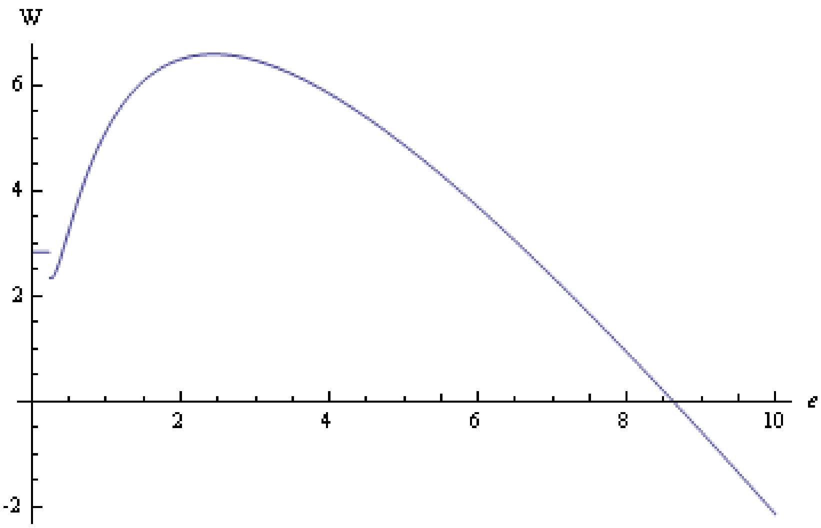
$$U\left(x\right)=\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{x}{1-\gamma}\right)^{\gamma}:\gamma\in\left(0,1\right)$$

$$W=\alpha\mu U(Y-t)+G$$

$$P(e,\delta)=\frac{\delta\sqrt[3]{e}}{\delta\sqrt[3]{e}+1}$$


π
.0
.8
.6
.4
.2
0
2
4
6
8
10
e


t
.00
80
60
40
20
0
2
4
6
8
10
e



Podemos ver que en la primera sección, para valores de $e \in [0, \overline{e}]$, e^* toma un valor nulo y la sociedad obtiene un nivel de bienestar $\alpha\mu U\left(Y\right)$. A partir de ese intervalo se ve claramente una función cóncava con un máximo único. Al evaluar el bienestar social en cada alternativa y comparar, se opta por entrar al régimen $E[W^{tax}]$.

Simulaciones con la variable α

e óptimo

GRAFICO

α representa la valoración que tiene el gobierno de la redistribución de la riqueza. Cuanto más grande sea α el gobierno valorará menos la desigualdad en su función a maximizar. En consecuencia, tendrá menores incentivos en invertir recursos para evitar la evasión por parte de los ricos.

Recaudación

GRAFICO

La naturaleza del gasto público es la provisión de un bien público. Este es consumido por todos los individuos en la economía; los pobres sólo consumen este bien. Al aumentar α, al gobierno le interesa menos la desigualdad. Entonces éste decide proveer menor cantidad de bien público.

π

GRAFICO

Dado que al gobierno le interesa menos la disparidad entre ricos y pobres, reduce su inversión en tecnologías para auditar. Por lo tanto, la probabilidad de detectar al evasor medida a través de π se reducirá.

t

GRAFICO

Dado que la utilidad marginal del bien público es constante y la del bien privado decreciente existe un punto donde la primera estará por encima de la segunda. En este caso aumenta la utilidad bajar el impuesto. Esto sucede cuando el gobierno no le preocupa tanto la desigualdad.

Simulaciones con la variable c

e óptimo

GRAFICO

c representa el costo de auditar. Al aumentar el costo, el gobierno invierte más para aumentar su recaudación. Esta función tiene un punto máximo a partir del cual no conviene invertir más recursos en la tecnología de auditar ya que el retorno de se torna negativo. A continuación se observa una elección de inversión extrema para captar a los individuos ricos y así aumentar la recaudación. Por último, el aumento del costo no se traducirá en aumentos de la recaudación y en consecuencia se decide reducir este costo por lo que la inversión es cero.

Recaudación

GRAFICO

El aumento en el costo es superior a la recaudación impostiva disponible para la creación del bien público. En consecuencia, la disponibilidad de gasto para el gobierno es decreciente.

π

GRAFICO

Dado el aumento del costo, se torna muy caro auditar a muchos individuos dado que el beneficio marginal permanece constante y el costo marginal aumenta.

t

GRAFICO

La cualidad decreciente del valor del impuesto sugiere que dado que aumenta el costo se hace muy caro auditar. En consecuencia, el gobierno decide disminuir el valor del impuesto para reducir los incentivos a la evasión.

Simulaciones con la variable δ

e óptimo

GRAFICO

La variable δ representa la productividad de la inversión. Cuando el valor de δ crece, el beneficio marginal de la inversión crece cada vez más. Al ser siempre mayor al costo marginal, el gobierno puede ahorrar dinero en inversión.

Para valores muy bajos, el costo marginal es mayor al beneficio por lo que el gobierno decide no gravar.

Recaudación

GRAFICO

Al crecer la δ, la inversión resulta más productiva. El beneficio marginal de la inversión supera el costo marginal. Los ingresos del gobierno suben y este puede aumentar G.

π

GRAFICO

La detección se hace tan eficiente que el gobierno reduce la cantidad de gente a auditar haciendo que el costo en auditorias se reduzca. Esto es posible porque aquellos individuos que el gobierno audita serán detectados como evasores dada la alta eficiencia de las auditorías.

t

GRAFICO

Dado que aumenta la probabilidad de detectar a los evasores, la base de individuos que terminan pagando el impuesto es mayor. El gobierno decide aumentar el gravamen de LLENAR

Simulaciones con la variable μ

e óptimo

GRAFICO

La variable μ representa la proporción de individuos ricos en la población. Se presentan 4 casos. Para una población pequeña de ricos el beneficio marginal de invertir es menor al costo por lo que el gobierno no cobra impuestos. A partir de un cierto valor de μ esta tendencia se revierte. En el segundo caso el gobierno invierte grandes sumas para poder detectar a los pocos ricos que existen ya que vale la pena incurrir en estos costos ya que el retorno de la inversión es positivo. Detectamos una caida abrupta de los niveles de inversion mencionados previamente. En el tercer caso, el gobierno decide invertir en forma creciente ya que la riqueza de la economía es mayor y asi puede valerse de mayores recursos. Por último, en el cuarto caso el número de ricos es suficientemente alto para que no sea necesario invertir tanto y asi asegurarse los ingresos necesarios. De este modo el gobierno se ahorra dinero en invertir.

Recaudación

GRAFICO

Al existir una mayor proporción de individuos ricos, la economía tendrá mayor riqueza total. Para el gobierno es más fácil conseguir recursos, por lo que sube el gasto en G.

π

GRAFICO

A medida que el número de ricos es mayor, el gobierno aumenta el tamaño del grupo a auditar. A pesar de que esto aumenta el gasto en auditorías, se terminan descubriendo cada vez mayor número de ricos lo que permite contar con suficientes recursos.

t

GRAFICO

El gobierno aumenta el impuesto para obtener más recursos. A pesar de que esto se traduce en mayores incentivos a evadir. Sin embargo, la creciente proporción de ricos en la población y la mayor inversion que lleva a una mejor detección más que sobrepasan este efecto.

Simulaciones con la variable Y

Para el caso de recaudación< 0 se viola la restricción presupuestaria. En consecuencia, t, π e Y serán < 0. En este caso analizaremos a partir recaudación≥ 0.

e óptimo

GRAFICO

Para el nivel de ingreso que hace que la recaudación sea igual a cero la inversión es nula. Existe un punto donde la inversión en auditar es muy alta. Esto se debe a que el Estado decide invertir mucho para detectar a un grupo reducido de individuos con alto ingreso. Esta tendencia es decreciente y encuentra un mínimo a partir del cual vuelve a crecer el nivel de inversión. Esto en consecuencia de que ha crecido suficientemente la cantidad de gente rica y es eficiente invertir positivamente a medida que aumenta el nivel de ingreso.

Recaudación

GRAFICO

Los valores de gasto mayores a cero son consecuencia del aumento del ingreso en la economía. Para valores altos de Y la imposición genera un aumento en la cantidad de gasto disponible para destinar a un bien público.

π

GRAFICO

π es > 0 a partir del punto que el gasto público es > 0. Para los valores positivos de π podemos concluir que aumentó la inversión en auditoría y en consecuencia la probabilidad de detectar al evasor con un nivel de ingreso alto aumenta.

t

GRAFICO

Un valor del impuesto positivo repercute en mayor disponibilidad, a través de la recaudación, de bien público. A medida que aumenta el nivel de la inversión aumenta el impuesto. Como el gobierno tiene foco en la redistribución, ante valores de ingreso altos, es decir una base imponible importante, aprovechará el aumento en la eficiencia de las auditorías para aumentar los impuestos y en consecuencia aumentar la recaudación.

ρ

graf

A medida que sube el precio de producción del bien público, el impuesto debería subir para compensar ceteris paribus, bajando la utilidad marginal social. Para evitar de movernos del óptimo, por lo tanto, debemos relajar la restricción de presupuesto del gobierno bajando la inversión. A partir de cierto nivel de ro, la inversión se dispara para encontrar a los infractores en el grupo de auditados, que es pequeño porque es costoso auditar en términos de bienestar. Después ya pasamos a un régimen sin intervención del gobierno ya que el sistema fiscal es demasiado costoso para ser sostenible

graf

Cuando miramos la recaudación con respecto a ro, esta función tiene una forma muy intuitiva, ya que a medida que sube el ro, baja la utilidad marginal social de proveer el bien público, por lo que el gobierno va bajando su participación en la sociedad (que se traduce en el valor decreciente de R). La curva en esta parte tiene una forma rápida porque baja no sólo el t sino también la probabilidad de las auditorías. Al igual que en el gráfico anterior, a partir de un cierto valor de ro, desaparece el estado.

graf

La probabilidad de ser auditado, pi, baja pero de una manera aproximadamente lineal, mientras aumenta el ro, por la misma razón descripta en los últimos gráficos: El ro alto sube el costo a la sociedad de G, por lo que se achica el gobierno, hasta que para un cierto nivel de ro ya no es eficiente que el gobierno siga existiendo.

graf

Sigue el mismo patrón que el pi. Ya que al subir el costo de producción de G baja la utilidad marginal social, para no movernos del óptimo, el gobierno debe simultáneamente bajar el impuesto.