

Departamento de Economía

Tipo de documento: Tesis de maestría



*Maestría en Economía*

# Identificación de largo plazo en VARs estructurales

**Autoría:** Solano, Rodrigo Gastón

**Fecha:** 2025

## ¿Cómo citar este trabajo?

*Solano, R. (2025). "Identificación de largo plazo en VARs estructurales". [Tesis de maestría. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella*  
<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13586>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la **Universidad Torcuato Di Tella** bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Internacional  
**Dirección:** <https://repositorio.utdt.edu>



**UNIVERSIDAD  
TORCUATO DI TELLA**

**UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA**

**MAESTRÍA EN ECONOMÍA**

**Identificación de largo plazo en VARs estructurales**

Alumno: Rodrigo Gastón Solano

Legajo: 22X960

Tutor: Constantino Hevia

Fecha: 15 de junio de 2025

# Índice

<b>1</b>	<b>Revisión de literatura</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Resumen econométrico</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Modelo macroeconómico</b>	<b>9</b>
3.1	Solución	12
3.2	Efectos en el largo plazo	14
3.3	Calibración	16
3.4	Funciones impulso-respuesta implicadas	17
<b>4</b>	<b>Resultados en datos sintéticos</b>	<b>19</b>
4.1	Especificación con cuatro variables	20
4.2	Especificación con tres variables	22
4.3	Especificación con dos variables	26
<b>5</b>	<b>Resultados en datos estadounidenses</b>	<b>30</b>
5.1	Restricciones de largo plazo	32
<b>6</b>	<b>Restricciones de signos</b>	<b>35</b>
6.1	Resultados en datos estadounidenses	35
6.2	Resultados en datos sintéticos	37
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>38</b>

## Introducción

En las últimas décadas mucho se ha discutido sobre el efecto que los *shocks* tecnológicos generan en la oferta laboral. Esto es de importancia para aquellos defensores de los modelos de ciclos reales (RBC, *Real Business Cycle*) dado que el principal hallazgo de los trabajos empíricos contradice uno de los resultados esenciales de este tipo de modelos.

Mientras que algunos han dirigido sus críticas contra los mismos, básicamente que no se ajustan a la realidad, otros han comenzado a dudar de la técnica estadística, i.e. modelos de vectores autorregresivos estructurales (VAR estructural o SVAR), utilizada para recuperar el efecto causal. En esta línea, diversos trabajos en la frontera entre econometría y macroeconomía han surgido batallando entre sí.

El objetivo del presente estudio es estimar las funciones impulso-respuesta en datos simulados por un modelo RBC y compararlas con aquellas implicadas por el mismo, con y sin controles. Los resultados, por lo tanto, podrían falsear la estrategia empírica mostrando que una variedad de especificaciones llevan a una variedad de resultados diferentes entre sí o bien proveer más evidencia a favor de la controversial conclusión. Específicamente, un modelo macroeconómico con cuatro *shocks* es construido donde dos de ellos afectan el valor de largo plazo de la productividad laboral. Con respecto a los SVARs bivariados los resultados medirían la relevancia de la inversión, el consumo, o ambas como variables omitidas.

Este ensayo se organiza de la siguiente manera: sección uno resume los principales trabajos de esta literatura, sección dos define los conceptos econométricos a utilizar siguiendo a Lütkepohl (2005), Kilian y Lütkepohl (2017), Hamilton (1994), y Canova (2007); sección tres especifica el modelo que generará los datos, sección cuatro estima el SVAR en dichos datos y presenta los resultados del experimento, sección cinco corre el mismo modelo en datos reales como un control de calidad de la metodología, sección seis cambia el método de identificación para medir potenciales diferencias entre el uso de restricciones de largo plazo y de signos, y finalmente sección siete resume las conclusiones relevantes.

## 1. Revisión de literatura

Galí (1999) estima un SVAR en datos de los Estados Unidos utilizando las tasas de crecimiento del producto por trabajador y de la oferta laboral con una restricción de largo plazo *à la* Blanchard y Quah (1989), anulando el efecto de largo plazo del *shock* no tecnológico en la productividad, y encuentra que *shocks* de productividad positivos generan una caída en las horas trabajadas. Por el contrario, en los modelos RBC se observa el comportamiento opuesto: producto, trabajo, y productividad aumentan en conjunto. Pues, el modelo macroeconómico *mainstream* no se condice con la realidad.

Este resultado se puede replicar considerando varias especificaciones alternativas de la serie del trabajo. En el caso del autor, luego de remover una tendencia lineal, encuentra que “most of the qualitative patterns in the impulse responses (...) are preserved” [la mayoría de los patrones cualitativos de las impulso-respuesta es preservada] (p. 259). Francis y Ramey (2005) y Galí y Rabanal (2005) exploran esta robustez en diferentes entornos que tratan a las horas trabajadas como no estacionarias, guiándose por los resultados de pruebas de raíz unitaria.

Un segundo paradigma siguiendo la línea de Christiano et al (2003) ha desafiado este resultado, señalando que las horas trabajadas estacionarias suben luego de un *shock* tecnológico cuando están especificadas en niveles en lugar de en diferencias. Esto fue seguido por un acalorado debate sobre que supuesto es correcto para esta serie y las consecuencias de cometer un error de especificación dada su correlación de baja frecuencia con la productividad laboral, y en menor medida sobre qué métrica de insumo laboral debería utilizarse. Más recientemente Canova et al (2010), sosteniendo que ambos enfoques sufren de errores de especificación, encuentran que al controlar por estos ciclos la respuesta es robustamente negativa ante *shocks* tecnológicos neutrales. Adicionalmente, esquemas de identificación alternativos fueron propuestos, con trabajos como Christiano et al (2007) justificando el uso de restricciones de corto plazo y Dedola y Neri (2007) justificando el uso de restricciones de signos.

Respondiendo a los economistas que interpretaban este efecto negativo como la muerte de los modelos RBC, Chari et al (2008) critican este “*common approach*” enfatizando que las impulso-respuesta obtenidas de datos reales no pueden compararse con las teóricas implicadas por modelos macroeconómicos dado que las primeras suelen estar sesgadas. Ellos muestran esto estimando un SVAR similar a aquel de Galí, i.e. tomando a las horas como no estacionarias, en datos simulados que conduce a la misma respuesta negativa en horas trabajadas incluso cuando el proceso generador de los datos es un modelo RBC; comparación que es un ejemplo del llamado enfoque de Sims-Cogley-Nason, concordante con el eslogan de Minnesota: “*do to the model what you do to the data*”.

Importantemente, ellos identifican dos fuerzas responsables de dicho sesgo: muestra pequeña y truncamiento de rezagos; y discuten las circunstancias bajo las cuales este es minimizado. Estas se relacionan con la importancia del *shock* tecnológico con respecto a los no tecnológicos al explicar fluctuaciones del producto, la regla siendo que mientras mayor sea el rol de estos últimos mayor será la distancia entre las impulso-respuesta estimadas mediante un SVAR y aquellas verdaderas. Los autores describen esto en su segunda proposición: “as the variance of the non-technology shocks converge to zero the truncation bias (...) converges to zero” [cuando la varianza de los *shocks* no tecnológicos converge a cero el sesgo por truncamiento (...) converge a cero] (p. 1347). Luego, ellos sostienen la visión que estos *shocks* son significativos en datos de la posguerra, siendo que el análisis de Galí sufre de este sesgo. El enigma puede describirse de la siguiente manera: si se

asume que el único *shock* que afecta el producto por trabajador en el largo plazo es uno tecnológico mientras que la varianza del resto de *shocks* es “lo suficientemente grande”, la impulso-respuesta estimada de las horas trabajadas con respecto a dicho *shock* tecnológico muestra un efecto negativo en impacto aun cuando los datos son generados basándose en una respuesta positiva.

También, Blanchard y Quah (1989) mencionan que al tratar con un SVAR pequeño, la omisión de variables relevantes implica que los *shocks* estructurales son más bien *shocks* agregados, lo que distorsiona la interpretación de las impulso-respuesta. Para dar un ejemplo, Francis y Ramey (2005) muestran que “both technology shocks and permanent shifts in capital income tax rates can affect labor productivity in the long-run. Thus, the shocks identified using Galí’s assumption could include capital income tax rate shocks” [tanto *shocks* tecnológicos como cambios permanentes en el impuesto a las rentas del capital pueden afectar la productividad laboral en el largo plazo. Pues, los *shocks* identificados con el supuesto que utiliza Galí pueden incluir *shocks* al impuesto sobre el capital] (p. 1382), algo que también fue señalado por Uhlig (2004). Entonces, extensiones del modelo RBC que incorporan otros *shocks*, así como potencialmente otras estrategias de identificación del *shock* tecnológico, que sean capaces de generar datos tal que el SVAR recupere la impulso-respuesta verdadera son de interés para guiar futuras especificaciones de trabajos empíricos.

La mayor parte de la literatura previamente mencionada también estudia los efectos sobre las horas en dichos modelos aumentados, aunque suelen imponer la misma restricción que toma al *shock* tecnológico como la única fuente de variabilidad permanente en la productividad. Incluso el *paper* fundamental de Galí (1999) discute este punto definiendo un SVAR de cinco variables sumando métricas monetarias para analizar los datos empíricos con el que llega a la misma caída en horas, aunque este efecto “is now more than fully reversed over time, leading to a positive, though quantitatively small long-term effect” [es más que revertido en el tiempo, llevando a una respuesta en el largo plazo positiva aunque pequeña] (p. 261).

Volviendo al punto levantado por Chari et al (2008), mientras que la mayoría de los trabajos teóricos ha estado en búsqueda de un modelo RBC embellecido que implique una respuesta negativa en las horas trabajadas, similar a la encontrada en modelos neo-keynesianos que imponen diferentes tipos de fricciones en la economía, otros se han preocupado por recuperar la respuesta positiva en datos simulados por el modelo RBC. Este trabajo construye en esta segunda rama de la literatura siguiendo los pasos de Erceg et al (2005).

Estos muestran que el verdadero efecto cuantitativo puede recuperarse utilizando un SVAR de cuatro variables en datos generados por un modelo RBC con múltiples *shocks*, incluyendo a las horas trabajadas ya sea en niveles o en primeras diferencias, concluyendo que “the two-variable specifications perform less adeptly than our four-variable specification in recovering the true responses” [especificaciones bivariadas son menos aptas que aquellas de cuatro variables para recuperar las respuestas verdaderas] (p. 1258). Un motivo que dan para esto es que los pesos del consumo y la inversión en el producto, su tercera y cuarta variable,

“help proxy for the omitted capital stock” [ayudan en sustituir al *stock* de capital omitido] (p. 1259) en la especificación del SVAR, lo que ellos interpretan se encuentra en el centro del sesgo por truncamiento. En otro trabajo por Chari et al (2007) se ha dicho que “the need for a large number of lags [to recover the true responses] when we run the VAR stems from the presence of capital in our model and the absence of capital in the VAR specification as well as from the presence of multiple shocks” [la necesidad por un gran número de rezagos al correr un VAR se debe a la presencia del capital en el modelo y a la ausencia del mismo en la especificación del VAR así como a la presencia de múltiples *shocks*] (p. 19), siendo que la distancia entre las impulso-respuesta estimadas e implicadas está negativamente correlacionada con la importancia del capital en el modelo.

Consecuentemente, la extensión más popular ha llamado por la introducción de, al menos, el ratio entre inversión y producto. Esto no es sin la advertencia de Chari et al (2007) quienes, al realizar este ejercicio, encontraron que “adding these variables did not significantly improve the ability of SVARs to reproduce the model responses to technology shocks” [agregar estas variables no mejora significativamente la habilidad de un SVAR para reproducir las respuestas del modelo ante *shocks* tecnológicos] (p. 26). Sin embargo, Galí and Rabanal (2005) mencionan que lo que estos autores en realidad muestran es que un “misidentified and/or misspecified SVAR often leads to incorrect inference” [SVAR mal identificado y/o mal especificado suele llevar a la inferencia incorrecta] (p. 275) siendo que “when the SVAR is correctly specified and the identifying restrictions are satisfied by the underlying data-generating models [as in Erceg et al (2005)], the estimated responses to technology shocks match (at least qualitatively) the theoretical ones” [cuando el SVAR es correctamente especificado y las restricciones de identificación son satisfechas por el modelo que genera los datos, las respuestas estimadas ante *shocks* tecnológicos se asemejan (al menos cualitativamente) a las teóricas] (p. 275).

## 2. Resumen econométrico

Sea el modelo en forma reducida un VAR( $p$ ), i.e.

$$y_t = \sum_{j=1}^p A_j y_{t-j} + u_t,$$

donde  $A_j$  es la matriz  $K \times K$  asociada al rezago  $j$  y  $u_t$  el vector de errores de estimación que se suponen son ruido blanco, i.e.  $\mathbb{E}[u_t] = 0$ ,  $\mathbb{E}[u_t u_t'] = \Sigma_u$ , y  $\mathbb{E}[u_t u_s'] = 0 \forall s \neq t$ . Si el proceso es estacionario, esto es si tiene primer y segundo momento invariantes en el tiempo, el teorema de descomposición de Wold aplica, y

el modelo tiene la siguiente representación como un modelo *moving average* (MA).

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j u_{t-j} \quad \text{with} \quad \Phi_0 = \mathbf{I}_K \wedge \Phi_s = \sum_{j=1}^s \Phi_{s-j} A_j \quad \forall s = 1, 2, \dots$$

Estas matrices contienen las impulso-respuesta de las variables dependientes a las innovaciones del VAR( $p$ ) para diferentes rezagos. Al acumular estos efectos sobre todos los períodos, los efectos totales de largo plazo pueden obtenerse como elementos de

$$\Phi = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s = \left( \mathbf{I}_K - \sum_{i=1}^p A_i \right)^{-1},$$

matriz que existe si el VAR( $p$ ) es estable, i.e.  $|\mathbf{I}_K - \sum_{i=1}^p A_i z^i|$  tiene sus raíces fuera del círculo unitario.

El modelo estructural se impone en dicho VAR( $p$ ) al definir sus residuos, que carecen de interpretación económica, como combinaciones lineales de innovaciones estructurales  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \mathbf{I}_K)$ . Con  $u_t = B\varepsilon_t$ , lo cual implica  $\Sigma_u = BB'$ , su representación MA puede escribirse como

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{with} \quad \Psi_0 = B \wedge \Psi_s = \Phi_s B \quad \forall s = 1, 2, \dots,$$

la cual define las impulso-respuestas en el SVAR( $p$ ). Dada la simetría de la matriz de covarianza, para identificar el problema se necesitan  $K(K-1)/2$  restricciones.

Si estas se incorporan en la matriz  $B$  que gobierna las interacciones contemporáneas entre variables las mismas se denominan restricciones de corto plazo. El modelo puede identificarse recursivamente por medio de una descomposición de Cholesky sobre  $\Sigma_u$ , método que vuelve a los errores de la forma reducida incorrelacionados entre sí pero que impone una cadena causal en la relación entre variables. Para estimarlo se obtiene la matriz de covarianza de los residuos de la forma reducida  $\hat{\Sigma}_u$  y se la descompone para arribar a la matriz triangular  $\hat{B}$ .

Utilizando restricciones de largo plazo estas se incorporan en la matriz de impacto total

$$\Psi = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s B = \Phi B,$$

lo cual típicamente lleva a nulificar ciertos elementos para transformarla en una matriz triangular. Vale la pena mencionar que para que estas restricciones tengan sentido las variables afectadas deben entrar en el VAR( $p$ ) en primeras diferencias tal que los elementos restringidos en  $\Psi$  representen el efecto acumulativo de

largo plazo en sus niveles. Luego, la expresión

$$\Xi = \Psi\Psi' = \Phi\Sigma_u\Phi'$$

puede calcularse, lo que permite estimar los coeficientes de  $B$  como

$$\hat{B} = \hat{\Phi}^{-1}\hat{\Psi},$$

donde  $\hat{\Phi}$  es una función de los coeficientes de la forma reducida  $\hat{A}_j$  y  $\hat{\Psi}$  puede obtenerse mediante una descomposición de Cholesky sobre  $\hat{\Xi}$  usando los residuos del VAR( $p$ ) para llegar a  $\hat{\Sigma}_u$ .

Un tercer método para identificar el modelo abandona la idea de restricciones de exclusión y apunta a imponer restricciones en los signos de las impulso-respuesta. Esto se logra requiriendo que los elementos de  $B$  se ajusten a ciertas desigualdades estrictas, llevando a parámetros que están identificados por conjuntos. El resultado es, pues, un conjunto de modelos estructurales consistentes con las características cualitativas buscadas. Siguiendo el algoritmo diseñado por Rubio-Ramírez et al (2010), el cual se basa en la metodología “*Householder-transformation*”, estos modelos se definen utilizando matrices de rotación ortogonales  $Q_i$ , tal que  $Q_iQ_i' = \mathbf{I}_K$ , obtenidas por medio de una descomposición QR única de matrices  $W_i$  tomadas de  $\mathcal{N}(0, \mathbf{I}_K)$ , para crear soluciones candidatas siguiendo

$$B_i = PQ_i \implies B_iB_i' = PQ_iQ_i'P' = PP' = \Sigma_u,$$

donde  $P$  se refiere a la descomposición de Cholesky sobre  $\hat{\Sigma}_u$ . Al recolectar las  $B_i$  para todo  $i$  donde cada *shock* tenga un patrón de signos único que asemeja a aquellos buscados es posible caracterizar el espacio de modelos estructurales admisibles. Finalmente, estos se resumen ya sea desde un enfoque frecuentista o bayesiano para conducir inferencia sobre las impulso-respuestas.

En todos los casos, si la estimación del modelo inicial no es fidedigna entonces tampoco lo serán las impulso-respuesta del modelo estructural. Una condición suficiente para que los estimadores de mínimos cuadrados sean consistentes y asintóticamente normales en un VAR( $p$ ) estable donde las innovaciones son un ruido blanco requiere que los primeros cuatro momentos de  $u_t$  existan y sean finitos, condición que se satisface automáticamente si  $u_t$  se distribuye de manera normal. El número de rezagos  $p$  se elige para que el VAR( $p$ ) de orden finito sea una buena aproximación a un proceso generador de los datos potencialmente infinito. Para un análisis de las funciones impulso-respuesta se recomienda elegir un  $p$  lo suficientemente grande para capturar todas las dinámicas en las respuestas a los *shocks*, siendo que los beneficios de hacerlo superan al costo de una mayor varianza. Con datos macroeconómicos cuatrimestrales, dado que son series

relativamente cortas, es común utilizar  $p = 4$ .

Notar que estos tipos de restricciones suelen ser combinadas al tratar con un SVAR( $p$ ) de tres o más variables. En estos casos se descarta realizar una descomposición de Cholesky, y el sistema de ecuaciones que incluyen las varianzas de los *shocks* debe resolverse ya sea algebraicamente o numéricamente sujeto a las restricciones.

### 3. Modelo macroeconómico

Sea una economía con un consumidor representativo que maximiza su utilidad esperada

$$\begin{aligned} \max_{C_t, L_t, K_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t) \right] \\ \text{s.t. } C_t + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t = (1 - \tau_{lt}) W_t L_t + (1 - \tau_{kt}) R_t K_t + T_t; \end{aligned}$$

donde  $C_t$  es consumo,  $L_t$  es trabajo,  $K_{t+1}$  es el *stock* de capital,  $\tau_{lt}$  es un impuesto sobre el ingreso laboral,  $\tau_{kt}$  es un impuesto sobre las rentas del capital,  $W_t$  es el salario real,  $R_t$  es la tasa de interés real, y  $T_t$  es una transferencia de suma fija. También,  $\beta \in (0, 1)$  es el factor de descuento y  $\delta \in (0, 1)$  es la tasa de depreciación. Asumiendo una función de utilidad  $U(\cdot)$  con aversión al riesgo relativa constante (*Constant Relative Risk Aversion*, CRRA) dos parámetros adicionales son introducidos:  $\gamma > 0$  que es el coeficiente de aversión al riesgo relativa del consumo y  $\phi > 0$  que afecta la curvatura de la función de utilidad con respecto al ocio.

La producción es llevada a cabo por firmas con funciones de producción  $Y_t(\cdot)$  Cobb-Douglas que resuelven

$$\max_{K_t, L_t} K_t^\theta (Z_t L_t)^{1-\theta} - W_t L_t - R_t K_t,$$

donde  $Z_t$  es un *shock* de productividad ahorrador de trabajo y  $\theta \in (0, 1)$  es la elasticidad producto del capital.

También hay un gobierno que mantiene un presupuesto balanceado cuya restricción es

$$G_t + T_t = \tau_{lt} W_t L_t + \tau_{kt} R_t K_t.$$

Se asume que el consumo público  $G_t$  es una fracción  $g_t$  del producto  $Y_t$ .

Este modelo contiene cuatro *shocks* exógenos diferentes: uno tecnológico o de productividad que afecta la función de producción, dos no tecnológicos o de demanda que afectan la restricción presupuestaria del

consumidor directamente, y uno de gasto. Estos evolucionan siguiendo

$$\begin{aligned} \ln Z_{t+1} &= \mu_z + \ln Z_t + \sigma_z \varepsilon_{t+1}^z, & (\tau_{lt+1} - \bar{\tau}_l) &= \rho_l (\tau_{lt} - \bar{\tau}_l) + \sigma_l \varepsilon_{t+1}^l, \\ (\tau_{kt+1} - \bar{\tau}_k) &= \rho_k (\tau_{kt} - \bar{\tau}_k) + \sigma_k \varepsilon_{t+1}^k, & \ln (g_{t+1}/\bar{g}) &= \rho_g \ln (g_t/\bar{g}) + \sigma_g \varepsilon_{t+1}^g; \end{aligned}$$

con  $\varepsilon_t^z \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\varepsilon_t^l \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\varepsilon_t^k \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ , y  $\varepsilon_t^g \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ ; siendo independientes entre sí. Pues, estos *shocks* son independientes e idénticamente distribuidos (iid) siguiendo una distribución normal estándar multivariada. También notar que  $\bar{\tau}_l$ ,  $\bar{\tau}_k$ , y  $\bar{g}$  son valores de estado estacionario tal que los procesos autorregresivos asociados se definen en términos de desvíos con respecto a ellos, ya sea en puntos porcentuales o en tasas de crecimiento.

El primer proceso, una caminata aleatoria con deriva  $\mu_z$  que es integrado de orden uno o  $I(1)$ , puede ser expresado como

$$\ln z_{t+1} = \mu_z + \sigma_z \varepsilon_{t+1}^z \quad \text{con} \quad z_{t+1} = \frac{Z_{t+1}}{Z_t}.$$

Para obtener un modelo estacionario, las variables reales que comparten una tendencia estocástica con el nivel de tecnología son normalizadas por este tal que

$$c_t = \frac{C_t}{Z_t} \quad y_t = \frac{Y_t}{Z_t} \quad k_t = \frac{K_t}{Z_{t-1}} \quad \hat{g}_t = \frac{G_t}{Z_t} \quad w_t = \frac{W_t}{Z_t} \quad \lambda_t = \Lambda_t Z_t^\gamma \quad l_t = L_t \quad r_t = R_t.$$

Notar que el gasto del gobierno puede escribirse como

$$\begin{aligned} g_t = \frac{G_t}{Y_t} &\implies G_t = g_t Y_t, \\ \hat{g}_t &= g_t y_t. \end{aligned}$$

Las condiciones de equilibrio son resumidas por el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} c_t^{-\gamma} (1 - l_t)^{\phi(1-\gamma)} &= \lambda_t, \\ \phi c_t^{1-\gamma} (1 - l_t)^{\phi(1-\gamma)-1} &= \lambda_t (1 - \tau_{lt}) w_t, \\ \lambda_t &= \mathbb{E}_t \left[ \beta z_{t+1}^{-\gamma} \lambda_{t+1} (r_{t+1} (1 - \tau_{kt+1}) + 1 - \delta) \right], \\ w_t &= (1 - \theta) \frac{y_t}{l_t}, \\ r_t &= \theta \frac{z_t y_t}{k_t}, \\ c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t z_t^{-1} + g_t y_t &= y_t, \\ y_t &= k_t^\theta z_t^{-\theta} l_t^{1-\theta}. \end{aligned} \right.$$

Las siguientes ecuaciones definen el estado estacionario no estocástico que representa los niveles de largo plazo de las variables normalizadas donde todos los *shocks* toman sus valores esperados y, para una variable  $x$ ,  $\bar{x} = x_{t+1} = x_t$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}^{-\gamma}(1-\bar{l})^{\phi(1-\gamma)} = \bar{\lambda}, \\ \phi\bar{c}^{1-\gamma}(1-\bar{l})^{\phi(1-\gamma)-1} = \bar{\lambda}(1-\bar{\tau}_l)\bar{w}, \\ \bar{\lambda} = \beta\bar{z}^{-\gamma}\bar{\lambda}[\bar{r}(1-\bar{\tau}_k) + 1 - \delta], \\ \bar{w} = (1-\theta)\frac{\bar{y}}{\bar{l}}, \\ \bar{r} = \theta\bar{z}\frac{\bar{y}}{\bar{k}}, \\ \bar{c} + \bar{k} - (1-\delta)\bar{k}\bar{z}^{-1} + \bar{g}\bar{y} = \bar{y}, \\ \bar{y} = \bar{k}^{-\theta}\bar{z}^{-\theta}\bar{l}^{1-\theta}, \\ \bar{z} = e^{\mu z}. \end{array} \right.$$

Log-linealizando el sistema alrededor del estado estacionario, usando polinomios de Taylor de primer orden y descartando la constante, el conjunto de ecuaciones que caracteriza el equilibrio es

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \gamma\tilde{c}_t + \frac{\phi(1-\gamma)\bar{l}}{1-\bar{l}}\tilde{l}_t + \tilde{\lambda}_t, \\ 0 = (1-\gamma)\tilde{c}_t + [1-\phi(1-\gamma)]\left(\frac{\bar{l}}{1-\bar{l}}\right)\tilde{l}_t - \tilde{\lambda}_t - \tilde{w}_t + \frac{\tau_{lt} - \bar{\tau}_l}{1-\bar{\tau}_l}, \\ 0 = \tilde{\lambda}_t - \mathbb{E}_t[\tilde{\lambda}_{t+1}] - \beta\bar{z}^{-\gamma}\bar{r}(1-\bar{\tau}_k)\mathbb{E}_t[\tilde{r}_{t+1}] + \beta\bar{z}^{-\gamma}\bar{r}(1-\bar{\tau}_k)\mathbb{E}_t[\tau_{kt+1} - \bar{\tau}_k], \\ 0 = \tilde{y}_t - \tilde{l}_t - \tilde{w}_t, \\ 0 = \tilde{y}_t - \hat{k}_t - \tilde{r}_t, \\ 0 = (1-\delta)\bar{k}\bar{z}^{-1}\hat{k}_t + (\bar{y} - \bar{g}\bar{y})\tilde{y}_t - \tilde{c}_t - \bar{g}\tilde{y}_t - \bar{k}\mathbb{E}_t[\hat{k}_{t+1}], \\ 0 = \theta\hat{k}_t + (1-\theta)\tilde{l}_t - \tilde{y}_t, \\ 0 = \rho_l(\tau_{lt} - \bar{\tau}_l) - \mathbb{E}_t[\tau_{lt+1} - \bar{\tau}_l], \\ 0 = \rho_k(\tau_{kt} - \bar{\tau}_k) - \mathbb{E}_t[\tau_{kt+1} - \bar{\tau}_k], \\ 0 = \rho_g\tilde{g}_t - \mathbb{E}_t[\tilde{g}_{t+1}]; \end{array} \right.$$

donde  $\hat{x}_t = \ln(x_t/\bar{x})$  denota el desvío porcentual de la variable  $x_t$  con respecto a su valor de estado estacionario  $\bar{x}$  y  $\hat{k}_t = \tilde{k}_t - \tilde{z}_t$ .

Es trivial que este modelo extendido que acomoda tres *shocks* aparte del tecnológicos también puede representar aquellos “bivariados” y “trivariados”, los más usuales en la literatura, al eliminar ya sea la evolución del gasto gubernamental, aquella del impuesto sobre la renta del capital, o ambas; perdiendo

ecuaciones en el proceso.

### 3.1. Solución

Una vez llegado al sistema log-linealizado, el modelo puede escribirse matricialmente como

$$A\mathbb{E}_t[X_{t+1}] = BX_t,$$

donde  $X_t$  es el vector de variables en el período  $t$ . Separando las variables de estado de aquellas de control,  $X_t$  puede dividirse en

$$\begin{aligned} x_t &= [\widehat{k}_t, \tau_{lt} - \bar{\tau}_l, \tau_{kt} - \bar{\tau}_k, \widetilde{g}_t]' , \\ u_t &= [\widetilde{y}_t, \widetilde{c}_t, \widetilde{l}_t, \widetilde{r}_t, \widetilde{w}_t, \widetilde{\lambda}_t]' ; \end{aligned}$$

lo cual permite hallar funciones de política de la forma

$$\begin{cases} \mathbb{E}_t[x_{t+1}] = Px_t, \\ u_t = Fx_t. \end{cases}$$

Sea el vector de variables de control de interés

$$\nu_t = [\widetilde{y}/\widetilde{l}_t, \widetilde{l}_t, \widetilde{i}/\widetilde{y}_t, \widetilde{c}/\widetilde{y}_t]' .$$

Estas pueden recuperarse como combinaciones lineales del sistema detallado en la sección previa, notando que

$$\begin{aligned} \widetilde{y}/\widetilde{l}_t &= \widetilde{y}_t - \widetilde{l}_t, \\ \widetilde{c}/\widetilde{y}_t &= \widetilde{c}_t - \widetilde{y}_t; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\tilde{i}_t &= \frac{(\bar{y} - \bar{g}y) \tilde{y}_t - \bar{c}\tilde{c}_t - \bar{g}y\tilde{g}_t}{\bar{i}}, \\
&= \frac{(\bar{y} - \bar{g}y) \tilde{y}_t - \bar{c}\tilde{c}_t - \bar{g}y\tilde{g}_t}{\bar{y} - \bar{c} - \bar{g}y}, \\
\Rightarrow \tilde{i}/\tilde{y}_t &= \frac{(\bar{y} - \bar{g}y) \tilde{y}_t - \bar{c}\tilde{c}_t - \bar{g}y\tilde{g}_t}{\bar{y} - \bar{c} - \bar{g}y} - \tilde{y}_t, \\
&= \frac{(\bar{y} - \bar{g}y) \tilde{y}_t - \bar{c}\tilde{c}_t - \bar{g}y\tilde{g}_t - (\bar{y} - \bar{c} - \bar{g}y) \tilde{y}_t}{\bar{y} - \bar{c} - \bar{g}y}, \\
&= \frac{\bar{c}\tilde{y}_t - \bar{c}\tilde{c}_t - \bar{g}y\tilde{g}_t}{\bar{y} - \bar{c} - \bar{g}y} = \frac{\bar{c}\tilde{y}_t - \bar{c}\tilde{c}_t - \bar{g}y\tilde{g}_t}{\bar{i}}.
\end{aligned}$$

Luego, los datos se generan recursivamente, basándose el proceso en matrices  $P$  y  $F$  halladas mediante una descomposición QZ como se explica en Klein (2000), siguiendo el sistema

$$\begin{cases} \hat{x}_{t+1} = \Xi \hat{x}_t + \Omega \varepsilon_{t+1}, \\ \nu_t = \Gamma \hat{x}_t; \end{cases}$$

donde  $\hat{x}_t = [\tilde{k}_t, \tilde{z}_t, \tau_{lt} - \bar{\tau}_l, \tau_{kt} - \bar{\tau}_k, \tilde{g}_t]'$ ,  $\varepsilon_{t+1} = [\varepsilon_{t+1}^z, \varepsilon_{t+1}^l, \varepsilon_{t+1}^k, \varepsilon_{t+1}^g]'$ , y

$$\begin{aligned}
\Xi &= \begin{pmatrix} P_{11} & -P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & -P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & -P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & -P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}, \\
\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_g \end{pmatrix}, \\
\Gamma &= \begin{pmatrix} F_{11} - F_{31} & -(F_{11} - F_{31}) & F_{12} - F_{32} & F_{13} - F_{33} & F_{14} - F_{34} \\ F_{31} & -F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ \bar{c}/\bar{i}(F_{11} - F_{21}) & -\bar{c}/\bar{i}(F_{11} - F_{21}) & \bar{c}/\bar{i}(F_{12} - F_{22}) & \bar{c}/\bar{i}(F_{13} - F_{23}) & \bar{c}/\bar{i}(F_{14} - F_{24}) - \bar{g}y/\bar{i} \\ F_{21} - F_{11} & -(F_{21} - F_{11}) & F_{22} - F_{12} & F_{23} - F_{13} & F_{24} - F_{14} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, las variables de interés no normalizadas se recuperan de cada simulación siguiendo las ecuaciones anteriormente descritas. Todas las variables se inicializan en sus valores de estado estacionario.

### 3.2. Efectos en el largo plazo

Utilizando el sistema que caracteriza al estado estacionario del modelo, intuiciones pueden derivarse sobre las respuestas de las variables en el largo plazo. Para el producto por trabajador, usando la función de producción y las condiciones de primer orden del capital, se puede mostrar que

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{y}}{\bar{l}} &= \frac{\bar{y}/\bar{k}}{\bar{l}/\bar{k}}, \\
&= \frac{\bar{y}/\bar{k}}{[\bar{y}/\bar{k}\bar{z}^\theta]^{\frac{1}{1-\theta}}}, \\
&= \frac{\bar{y}/\bar{k}}{(\bar{y}/\bar{k})^{\frac{1}{1-\theta}} \bar{z}^{\frac{\theta}{1-\theta}}}, \\
&= \frac{1}{(\bar{y}/\bar{k})^{\frac{\theta}{1-\theta}} \bar{z}^{\frac{\theta}{1-\theta}}}, \\
&= \frac{1}{[\bar{r}(\theta\bar{z})^{-1}]^{\frac{\theta}{1-\theta}} \bar{z}^{\frac{\theta}{1-\theta}}}, \\
&= \left(\frac{\theta}{\bar{r}}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}, \\
&= \left[\frac{\theta\beta(1-\bar{\tau}_k)}{\bar{z}^\gamma - \beta(1-\delta)}\right]^{\frac{\theta}{1-\theta}}, \\
\Rightarrow \frac{\bar{Y}}{\bar{L}} &= \bar{Z} \left(\frac{\bar{y}}{\bar{l}}\right) = \bar{Z} \left[\frac{\theta\beta(1-\bar{\tau}_k)}{\bar{z}^\gamma - \beta(1-\delta)}\right]^{\frac{\theta}{1-\theta}}.
\end{aligned}$$

Esto refleja que la productividad laboral es independiente de la cuña laboral y del gasto gubernamental, siendo afectada únicamente por cambios en el nivel de la tecnología y en el nivel del impuesto sobre las rentas del capital. Entonces, hay dos *shocks* que afectan el valor de largo plazo de esta variable: uno tecnológico bautizado *shock* de oferta y uno no tecnológico bautizado *shock* de demanda.

La oferta laboral puede derivarse de las condiciones de primer orden como

$$\begin{aligned}
\varphi \frac{\bar{c}}{1-\bar{l}} &= (1-\bar{\tau}_l)\bar{w}, \\
\varphi \frac{\bar{c}}{1-\bar{l}} &= (1-\bar{\tau}_l)(1-\theta)\frac{\bar{y}}{\bar{l}}, \\
\left(\frac{\bar{c}}{\bar{y}}\right) \frac{\varphi}{(1-\bar{\tau}_l)(1-\theta)} &= \frac{1-\bar{l}}{\bar{l}}, \\
\left(\frac{\bar{c}}{\bar{y}}\right) \frac{\varphi}{(1-\bar{\tau}_l)(1-\theta)} + 1 &= \frac{1}{\bar{l}}, \\
\Rightarrow \bar{L} = \bar{l} &= \left[\left(\frac{\bar{c}}{\bar{y}}\right) \frac{\varphi}{(1-\bar{\tau}_l)(1-\theta)} + 1\right]^{-1}.
\end{aligned}$$

En tanto el ratio de inversión, usando su definición y las condiciones de primer orden, este puede

escribirse como

$$\begin{aligned}
\bar{i} &= \bar{k} - (1 - \delta) \bar{k} \bar{z}^{-1}, \\
\frac{\bar{i}}{\bar{y}} &= \frac{\bar{k}}{\bar{y}} [1 - (1 - \delta) \bar{z}^{-1}], \\
&= \left( \frac{\theta \bar{z}}{\bar{r}} \right) [1 - (1 - \delta) \bar{z}^{-1}], \\
&= \left( \frac{\theta \bar{z} \beta (1 - \bar{\tau}_k)}{\bar{z}^\gamma - \beta (1 - \delta)} \right) [1 - (1 - \delta) \bar{z}^{-1}], \\
\Rightarrow \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} &= \frac{\bar{Z} \bar{i}}{\bar{Z} \bar{y}} = \frac{\bar{i}}{\bar{y}}.
\end{aligned}$$

De esto puede decirse que el único *shock* que tiene un efecto permanente en el peso de la inversión sobre el producto es la cuña del capital.

Con la restricción de recursos y las ecuaciones previas, el peso del consumo resulta en

$$\begin{aligned}
\bar{c} + \bar{i} + \bar{g} \bar{y} &= \bar{y}, \\
\bar{c} &= \bar{y} - \bar{i} - \bar{g} \bar{y}, \\
\frac{\bar{c}}{\bar{y}} &= 1 - \frac{\bar{i}}{\bar{y}} - \bar{g}, \\
\Rightarrow \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} &= \frac{\bar{Z} \bar{c}}{\bar{Z} \bar{y}} = \frac{\bar{c}}{\bar{y}}
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned}
\bar{Y}/\bar{L} &= f_1 \left( \varepsilon_{(+)}^z, 0, \varepsilon_{(-)}^k, 0 \right), \\
\bar{L} &= f_2 \left( 0, \varepsilon_{(-)}^l, \varepsilon_{(-)}^k, \varepsilon_{(+)}^g \right), \\
\bar{I}/\bar{Y} &= f_3 \left( 0, 0, \varepsilon_{(-)}^k, 0 \right), \\
\bar{C}/\bar{Y} &= f_4 \left( 0, 0, \varepsilon_{(+)}^k, \varepsilon_{(-)}^g \right).
\end{aligned}$$

Para lograr una identificación completa seis restricciones de largo plazo serían necesarias. Sin embargo, como el único *shock* de interés es el tecnológico una condición suficiente puede involucrar menos restricciones, tal como pasaría al imponer ceros todos en los elementos de la primera fila excepto el primero. Dado que restricciones de largo plazo únicamente deben imponerse en variables diferenciadas, los ceros en las últimas dos funciones anteriores son útiles si las tasas de crecimiento de los pesos son usadas. Como esto sería un supuesto cuestionable sobre la estacionariedad de estas series, i.e. que son estacionarias en diferencias o I(1),

la matriz de multiplicadores de largo plazo a utilizar será

$$\Psi = \begin{matrix} & (\varepsilon^z) & (\varepsilon^l) & (\varepsilon^k) & (\varepsilon^g) \\ \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix} & (Y/L) \\ & (L) \\ & (I/Y) \\ & (C/Y) \end{matrix},$$

donde  $\psi_{11}$  se normaliza para ser no negativo. Esto impone las mismas restricciones observadas en la mayor parte de la literatura mencionada: el único *shock* que tiene un efecto de largo plazo en la productividad es el tecnológico. Esto es suficiente para identificar la primera columna de  $B$ , aunque no reconoce el efecto que tiene el impuesto a las rentas del capital en el producto por trabajador.

### 3.3. Calibración

En total hay dieciséis parámetros en el modelo de cuatro variables. El conjunto de valores utilizado sigue a Chari et al (2007), el cual se resumen en la Tabla 1, donde los valores marcados están expresados en términos anuales y requieren ser convertidos a frecuencia cuatrimestral. Como es explicado por Christiano et al (2007) y por la discusión de Kehoe (2007), esta calibración implica un rol relativamente grande de los *shocks* no tecnológicos contra calibraciones alternativas.

Cuadro 1: Parametrización del modelo RBC.

		$\beta$	0.9898*		
$\mu_z$	0.0208*	$\gamma$	1.0000	$\sigma_z$	0.0131
$\phi$	2.5000	$\theta$	0.3300	$\delta$	0.0600*
$\bar{\tau}_l$	0.2430	$\rho_l$	0.9520	$\sigma_l$	0.0136
$\bar{\tau}_k$	0.3000	$\rho_k$	0.9800	$\sigma_k$	0.0123
$\bar{g}$	0.1700	$\rho_g$	0.9690	$\sigma_g$	0.0206

### 3.4. Funciones impulso-respuesta implicadas

Como se trato previamente, el modelo RBC puede escribirse como

$$\begin{cases} \hat{x}_{t+1} = \Xi \hat{x}_t + \Omega \varepsilon_{t+1}, \\ \nu_t = \Gamma \hat{x}_t; \end{cases}$$

donde  $\Xi$  es  $5 \times 5$ ,  $\Omega$  es  $5 \times 4$ , y  $\Gamma$  es  $4 \times 5$ .

La representación MA del vector  $\nu_t$ , que contiene los desvíos logarítmicos de las variables normalizadas de interés con respecto a sus valores de estado estacionario, resulta en

$$\begin{aligned} \nu_{t+s} &= \Gamma x_{t+s}, \\ &= \Gamma (\Xi x_{t+s-1} + \Omega \varepsilon_{t+s}) = \Gamma \Xi x_{t+s-1} + \Gamma \Omega \varepsilon_{t+s}, \\ &= \Gamma \Xi (\Xi x_{t+s-2} + \Omega \varepsilon_{t+s-1}) + \Gamma \Omega \varepsilon_{t+s} = \Gamma \Xi^2 x_{t+s-2} + \Gamma \Xi \Omega \varepsilon_{t+s-1} + \Gamma \Omega \varepsilon_{t+s}, \\ &= \Gamma \Xi^2 (\Xi x_{t+s-3} + \Omega \varepsilon_{t+s-2}) + \Gamma \Xi \Omega \varepsilon_{t+s-1} + \Gamma \Omega \varepsilon_{t+s} = \Gamma \Xi^3 x_{t+s-3} + \sum_{j=0}^2 \Gamma \Xi^j \Omega \varepsilon_{t+s-j}, \\ &\vdots \\ &= \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \Gamma \Xi^T x_{t+s-T}}_{=0} + \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma \Xi^j \Omega \varepsilon_{t+s-j}, \\ &= \Gamma \Xi^0 \Omega \varepsilon_{t+s} + \Gamma \Xi^1 \Omega \varepsilon_{t+s-1} + \Gamma \Xi^2 \Omega \varepsilon_{t+s-2} + \dots + \Gamma \Xi^s \Omega \varepsilon_t + \dots; \end{aligned}$$

donde el término señalado converge a cero dado que los autovalores de  $\Xi$  son menores a la unidad. Pues, tanto estados como observables son procesos MA infinitos, i.e.

$$\begin{cases} \hat{x}_{t+1} = (\mathbf{I} - \Xi L)^{-1} \Omega \varepsilon_{t+1}, \\ \nu_t = \Gamma (\mathbf{I} - \Xi L)^{-1} \Omega \varepsilon_t; \end{cases}$$

donde  $L$  es el operador rezago tal que  $L^j \varepsilon_t = \varepsilon_{t-j}$ . También puede notarse que el vector de observables puede invertirse para obtener una representación autorregresiva de forma

$$\nu_t = \Gamma \Xi \Gamma^{-1} \nu_{t-1} + \Gamma \Omega \varepsilon_t.$$

Las funciones impulso-respuesta en el período  $s$  ante un *shock* en  $\varepsilon_t$  pueden calcularse como

$$\frac{\partial \nu_{t+s}}{\partial \varepsilon'_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_t^z} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_t^l} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_t^k} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_t^g} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \nu_{t+s}^1 \\ \nu_{t+s}^2 \\ \nu_{t+s}^3 \\ \nu_{t+s}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \nu_{t+s}^1}{\partial \varepsilon_t^z} & \frac{\partial \nu_{t+s}^1}{\partial \varepsilon_t^l} & \frac{\partial \nu_{t+s}^1}{\partial \varepsilon_t^k} & \frac{\partial \nu_{t+s}^1}{\partial \varepsilon_t^g} \\ \frac{\partial \nu_{t+s}^2}{\partial \varepsilon_t^z} & \frac{\partial \nu_{t+s}^2}{\partial \varepsilon_t^l} & \frac{\partial \nu_{t+s}^2}{\partial \varepsilon_t^k} & \frac{\partial \nu_{t+s}^2}{\partial \varepsilon_t^g} \\ \frac{\partial \nu_{t+s}^3}{\partial \varepsilon_t^z} & \frac{\partial \nu_{t+s}^3}{\partial \varepsilon_t^l} & \frac{\partial \nu_{t+s}^3}{\partial \varepsilon_t^k} & \frac{\partial \nu_{t+s}^3}{\partial \varepsilon_t^g} \\ \frac{\partial \nu_{t+s}^4}{\partial \varepsilon_t^z} & \frac{\partial \nu_{t+s}^4}{\partial \varepsilon_t^l} & \frac{\partial \nu_{t+s}^4}{\partial \varepsilon_t^k} & \frac{\partial \nu_{t+s}^4}{\partial \varepsilon_t^g} \end{pmatrix};$$

donde  $\nu_{t+s}^j$  es el elemento  $j$  del vector columna  $\nu_{t+s}$ . Escribiendo lo anterior como un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \nu_{t+s}^1 = \dots + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{11} \varepsilon_t^z + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{12} \varepsilon_t^l + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{13} \varepsilon_t^k + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{14} \varepsilon_t^g + \dots, \\ \nu_{t+s}^2 = \dots + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{21} \varepsilon_t^z + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{22} \varepsilon_t^l + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{23} \varepsilon_t^k + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{24} \varepsilon_t^g + \dots, \\ \nu_{t+s}^3 = \dots + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{31} \varepsilon_t^z + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{32} \varepsilon_t^l + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{33} \varepsilon_t^k + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{34} \varepsilon_t^g + \dots, \\ \nu_{t+s}^4 = \dots + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{41} \varepsilon_t^z + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{42} \varepsilon_t^l + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{43} \varepsilon_t^k + (\Psi \Xi^s \Gamma)_{44} \varepsilon_t^g + \dots; \end{cases}$$

puede verse que las derivadas previamente mencionadas son los elementos de las matrices que acompañan al vector de *shocks* en el período de interés.

Este procedimiento resulta en las funciones impulso-respuesta de los desvíos de las variables con respecto a sus valores de estado estacionario. Para recuperar los niveles este valor debe sumarse, el cual es un número para las series del trabajo y los pesos sobre el producto dado que son constantes sobre el sendero de crecimiento, pero no para la primera serie dado que la misma se encuentra normalizada por el nivel de productividad. Entonces,

$$\begin{aligned} \ln(y_t/l_t) &= \widetilde{y}/l_t + \ln(\bar{y}/\bar{l}), \\ \ln((Y_t/Z_t)/L_t) &= \widetilde{y}/l_t + \ln(\bar{y}/\bar{l}), \\ \ln(Y_t/L_t) &= \widetilde{y}/l_t + \ln(\bar{y}/\bar{l}) + \ln(Z_t); \end{aligned}$$

donde el nivel de tecnología, asumiendo  $\ln(Z_0) = 0$ , puede obtenerse como

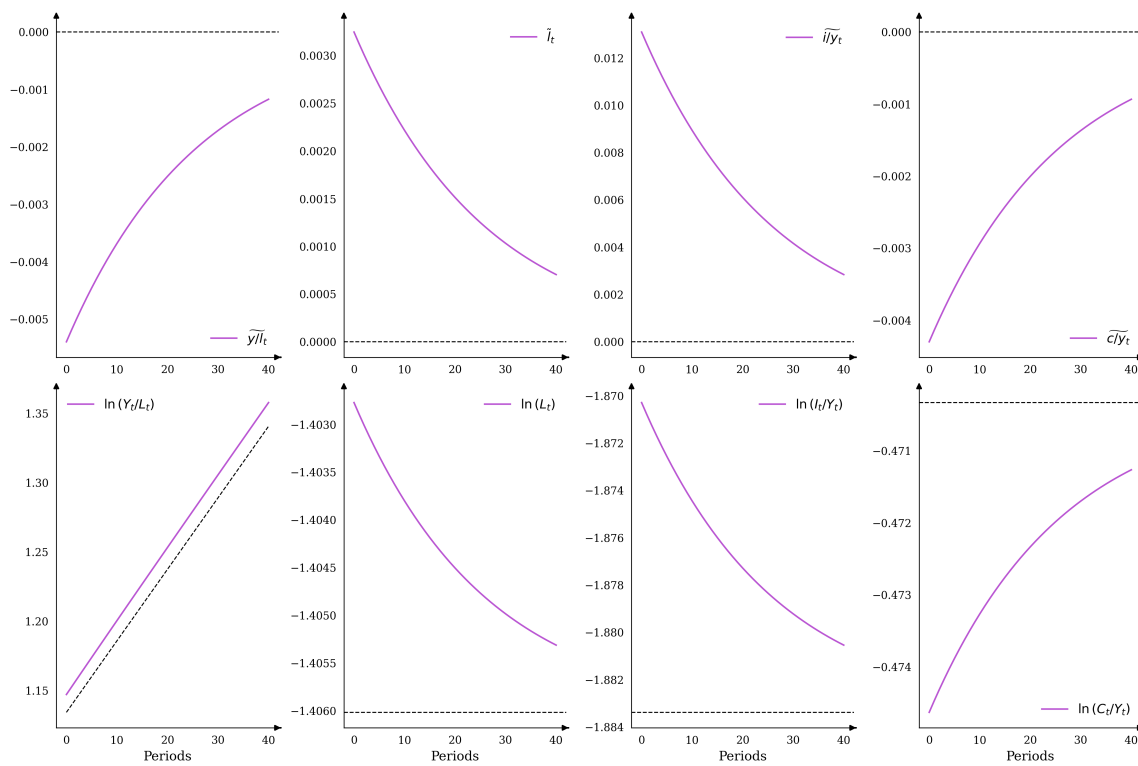
$$\begin{aligned} \widetilde{z}_t &= \ln(z_t) - \ln(\bar{z}), \\ \widetilde{z}_t + \ln(\bar{z}) &= \ln(z_t), \\ \widetilde{z}_t + \ln(\bar{z}) &= \ln\left(\frac{Z_t}{Z_{t-1}}\right), \\ \widetilde{z}_t + \ln(\bar{z}) + \ln(Z_{t-1}) &= \ln(Z_t). \end{aligned}$$

Finalmente, el valor de estado estacionario del producto por trabajador, sabiendo que la tecnología crece a tasa constante  $\mu_z$ , tal que su valor depende de  $t$ , es

$$\ln(\bar{Y}/\bar{L}) = \ln(\bar{y}/\bar{l}) + \ln(\bar{Z}) \quad \text{con} \quad \ln(\bar{Z}) = t \ln(\bar{z}) = t\mu_z.$$

Puede verse en la Figura 1 que el modelo implica un efecto positivo permanente en el producto por trabajador y un efecto positivo transitorio sobre la oferta laboral como respuestas ante un *shock* tecnológico positivo, las cuales son las estáticas comparativas esperadas en modelos RBC.

Figura 1: Respuestas teóricas ante un *shock* tecnológico positivo.



## 4. Resultados en datos sintéticos

Del modelo RBC descrito anteriormente mil simulaciones de cuatrocientas observaciones son generadas, descartando las primeras cien para considerar el sesgo que las condiciones iniciales, i.e. los valores de estado estacionario, puedan generar. En cada uno de estas simulaciones un SVAR(4) es estimado, donde el vector de variables dependientes contiene a las tasas de crecimiento del producto por trabajador e insumo laboral, siguiendo la filosofía que uno debe condicionar el análisis “on the statistical properties of the data” [en las propiedades estadísticas de los datos] (Canova et al, 2010, p. 756) y usar las primeras diferencias de las horas

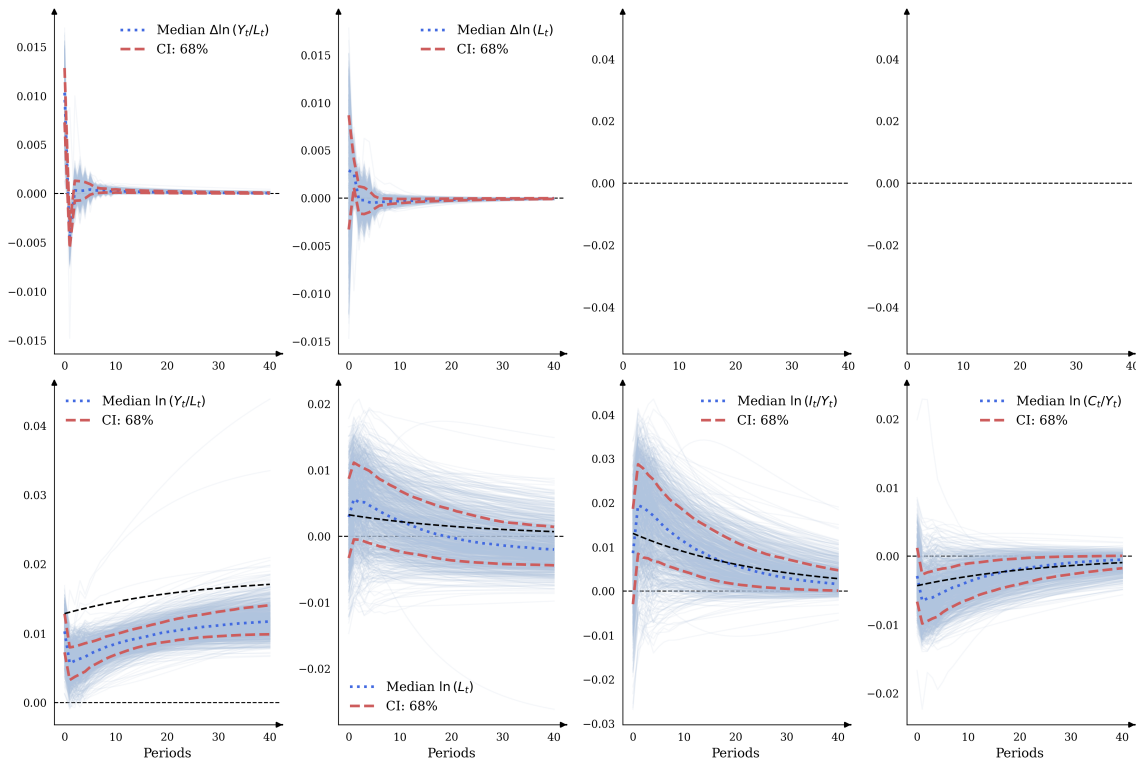
trabajadas. Como series de control se utilizan los niveles de los ratios entre la inversión y el consumo con respecto al producto.

Se menciona que, mientras que esta especificación diferenciada acarrea ciertas cuestiones problemáticas sobre la estacionariedad de la serie del trabajo, como han discutido Chari et al (2007) quienes favorecen el uso de una *quasi*-diferencia con parámetro  $\alpha = 0.99$ , mucha de la literatura la ha utilizado sin prestarle demasiada atención. Entonces, para mantener los resultados comparables y dado que el efecto en impacto suele coincidir, esta discusión es ignorada.

#### 4.1. Especificación con cuatro variables

Siguiendo los pasos detallados en la sección de resumen econométrico y la matriz de impacto total previa, las funciones impulso-respuesta son estimadas y presentadas en la Figura 2. Por su cuenta, esto concluiría que una correlación positiva, aunque no significativa, existe entre tecnología y horas trabajadas en datos del modelo RBC para el corto plazo cuando  $y_t = (\Delta \ln Y_t/L_t, \Delta \ln L_t, \ln I_t/Y_t, \ln C_t/Y_t)'$ . Notar que las líneas azules punteadas, que representan las medianas de las respuestas, y las líneas negras rayadas, que reflejan las respuestas esperadas en el modelo RBC, están relativamente cerca entre sí.

Figura 2: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(4).



Información sobre los coeficientes estimados puede encontrarse en las Figuras 3 y 4, la última repre-

sentando las restricciones de identificación.

Figura 3: Histograma de los elementos de  $B$  con un SVAR(4).

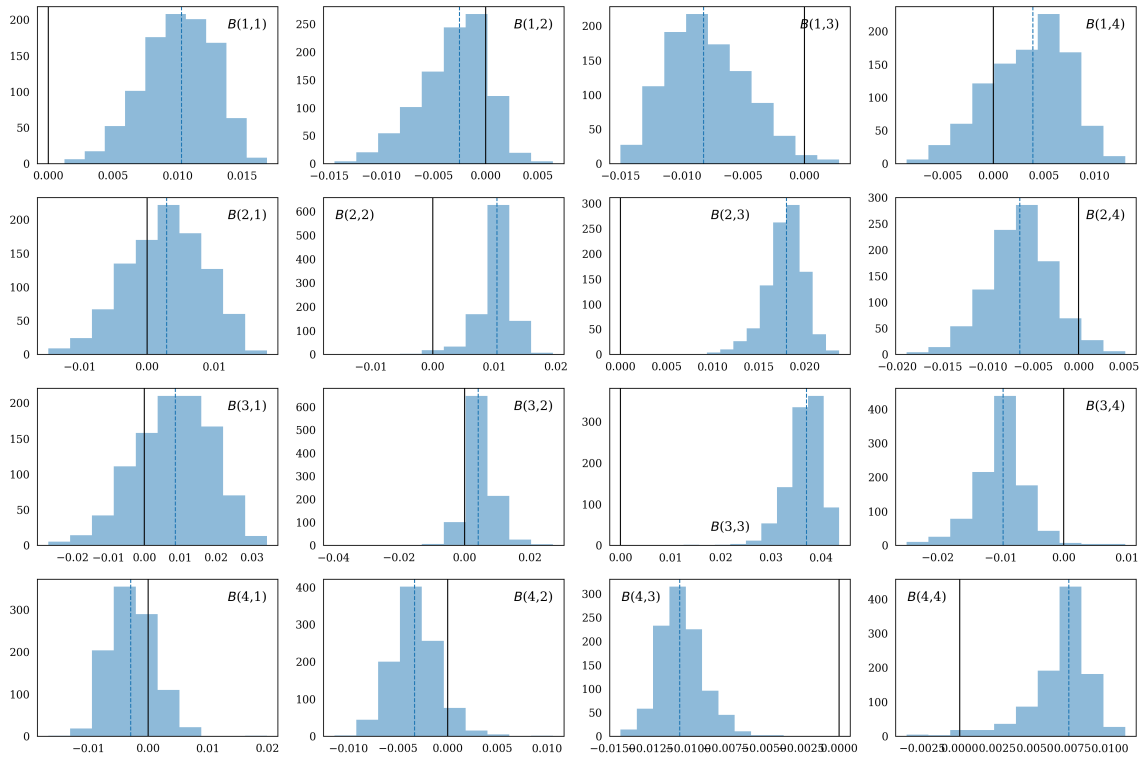
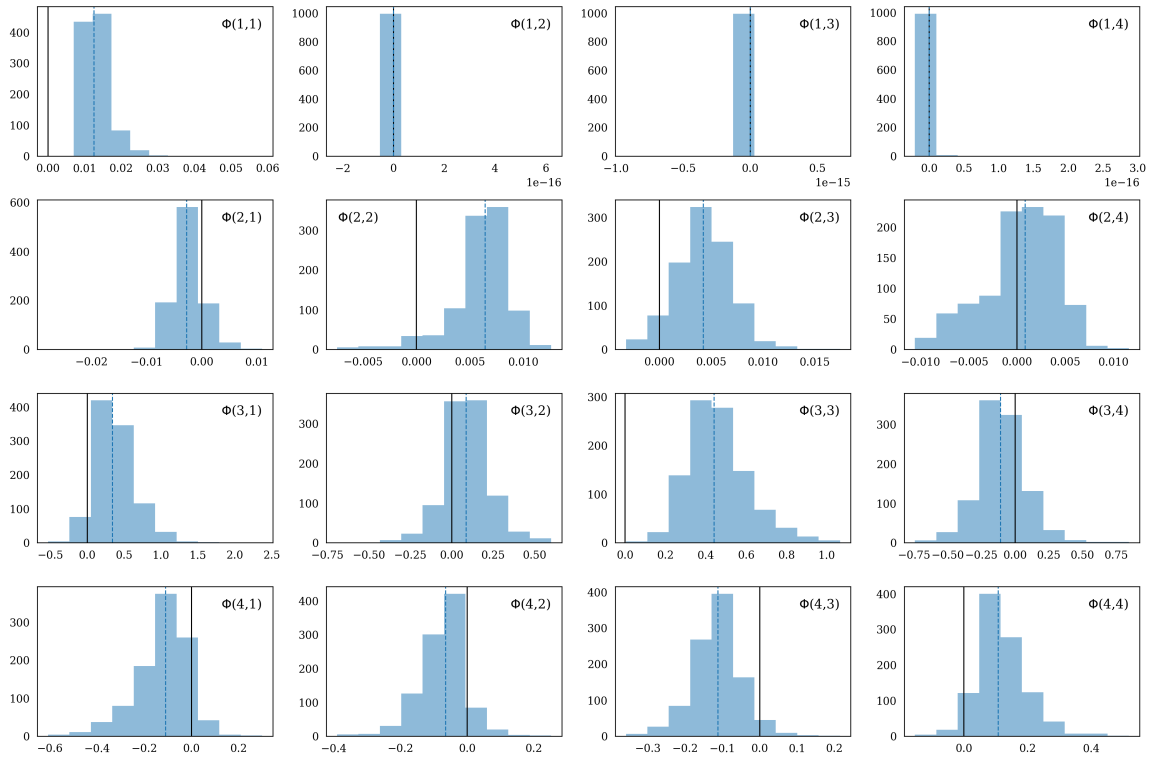


Figura 4: Histograma de los elementos de  $\Phi$  con un SVAR(4).



## 4.2. Especificación con tres variables

Si el peso del consumo es descartado de  $y_t$  las impulso-respuesta son aquellas de la Figura 5. Según esta, el nivel de la inversión es suficiente para recuperar la respuesta positiva en impacto de las horas trabajadas.

Figura 5: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(3) usando  $\ln I_t/Y_t$ .

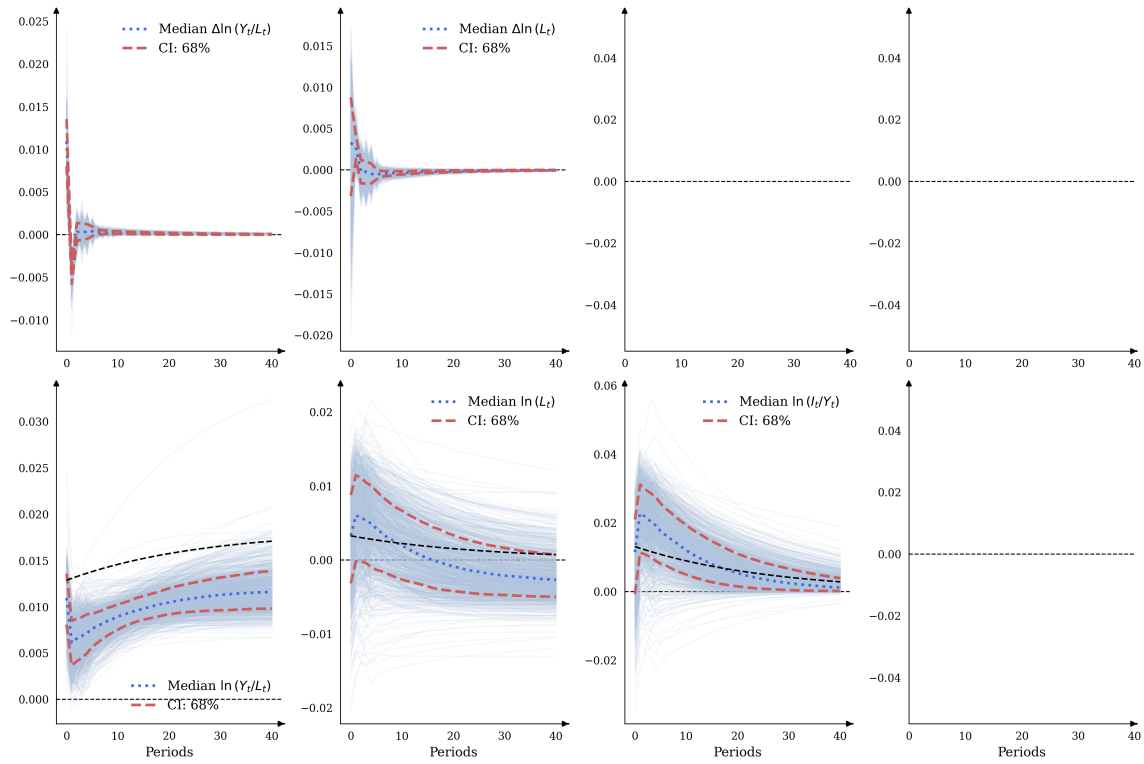


Figura 6: Histograma de los elementos de  $B$  con un SVAR(3) usando  $\ln I_t/Y_t$ .

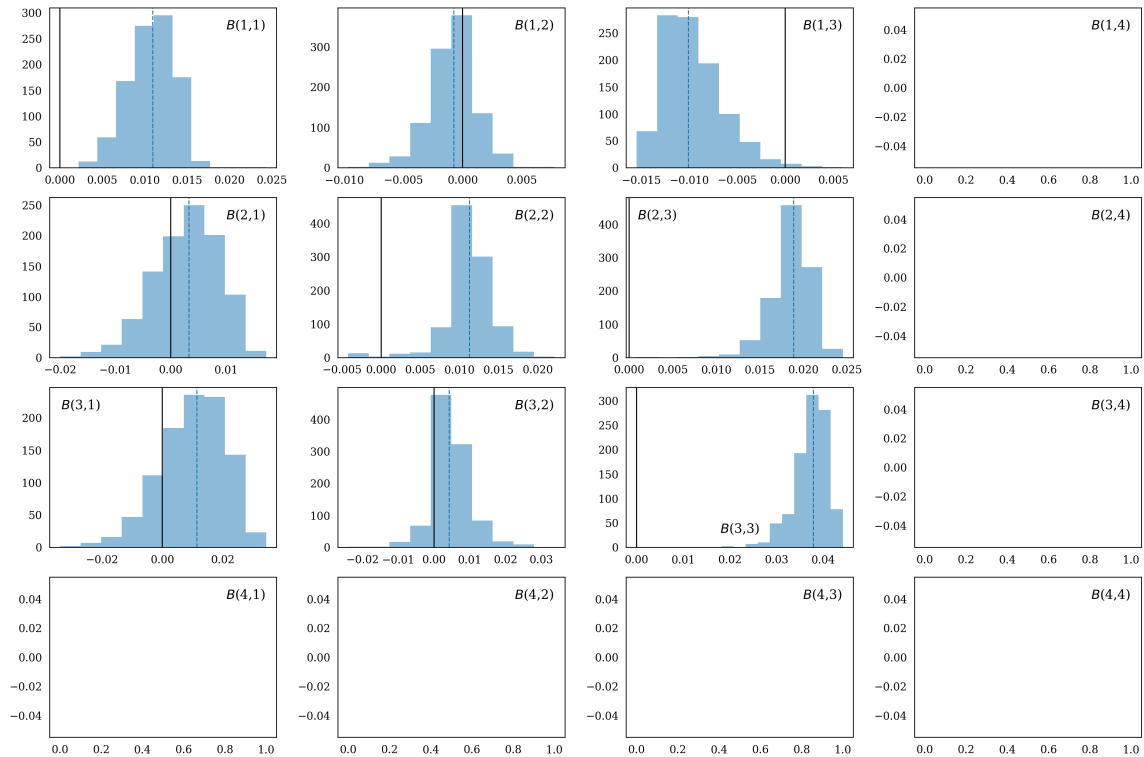
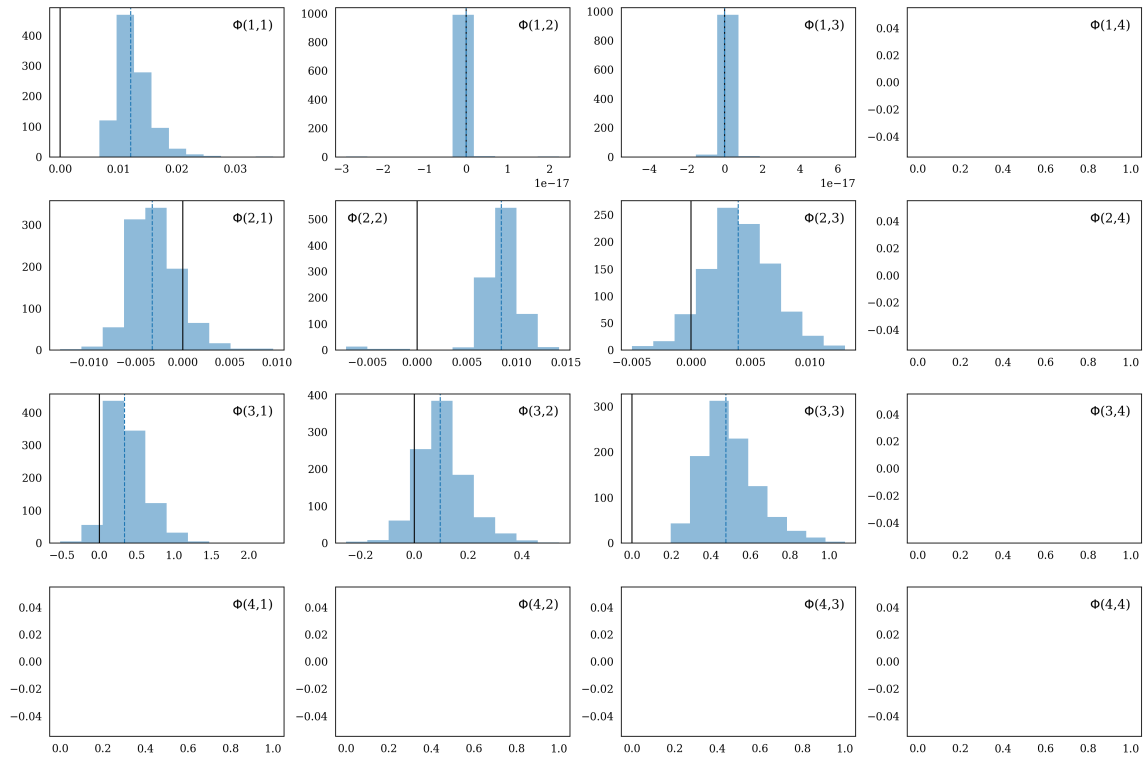


Figura 7: Histograma de los elementos de  $\Phi$  con un SVAR(3) usando  $\ln I_t/Y_t$ .



El mismo resultado puede obtenerse al mantener el consumo y descartar en su lugar la inversión, como se ve en la Figura 8. Se concluye que no importa cuál de las dos está presente en el vector de variables mientras que al menos una tercera variable en niveles se utilice.

Figura 8: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(3) usando  $\ln C_t/Y_t$ .

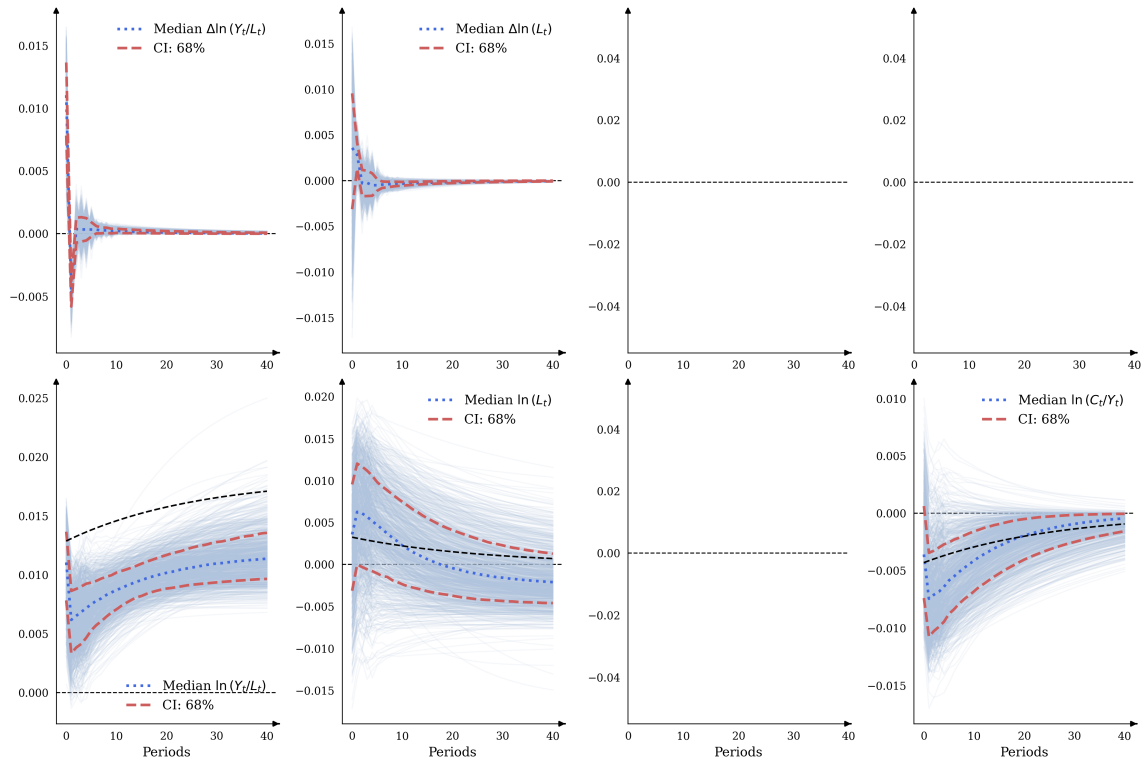


Figura 9: Histograma de los elementos de  $B$  con un SVAR(3) usando  $\ln C_t/Y_t$ .

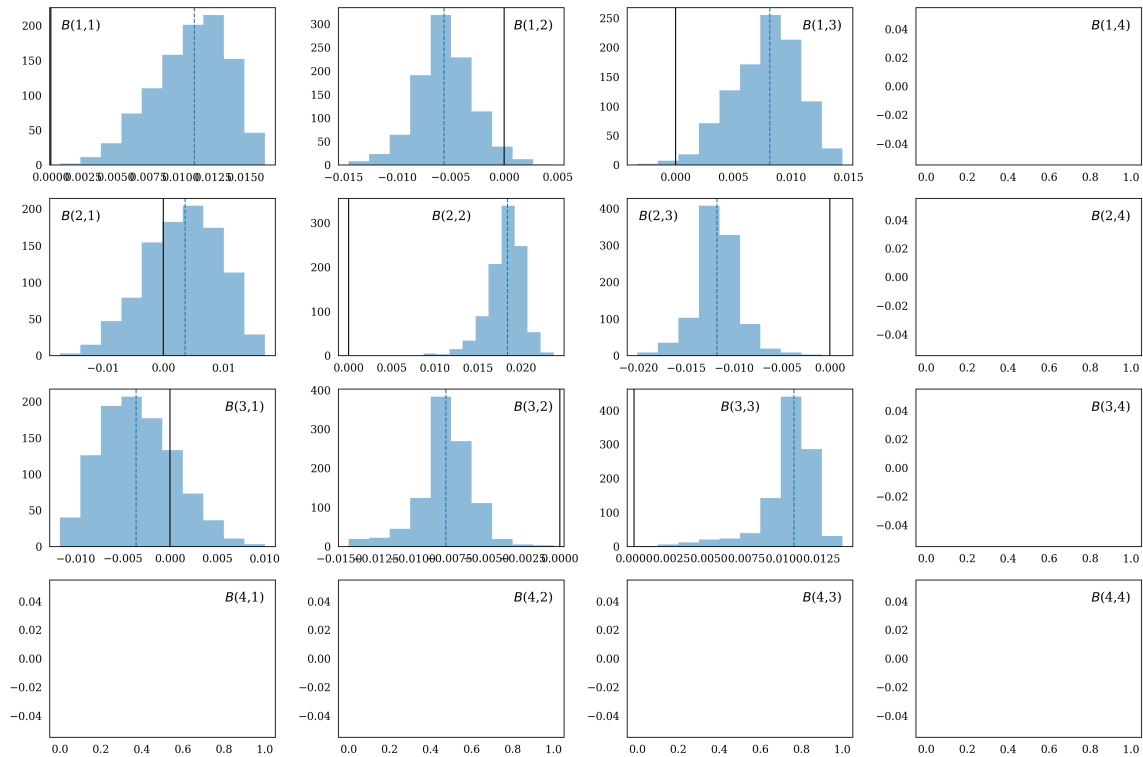
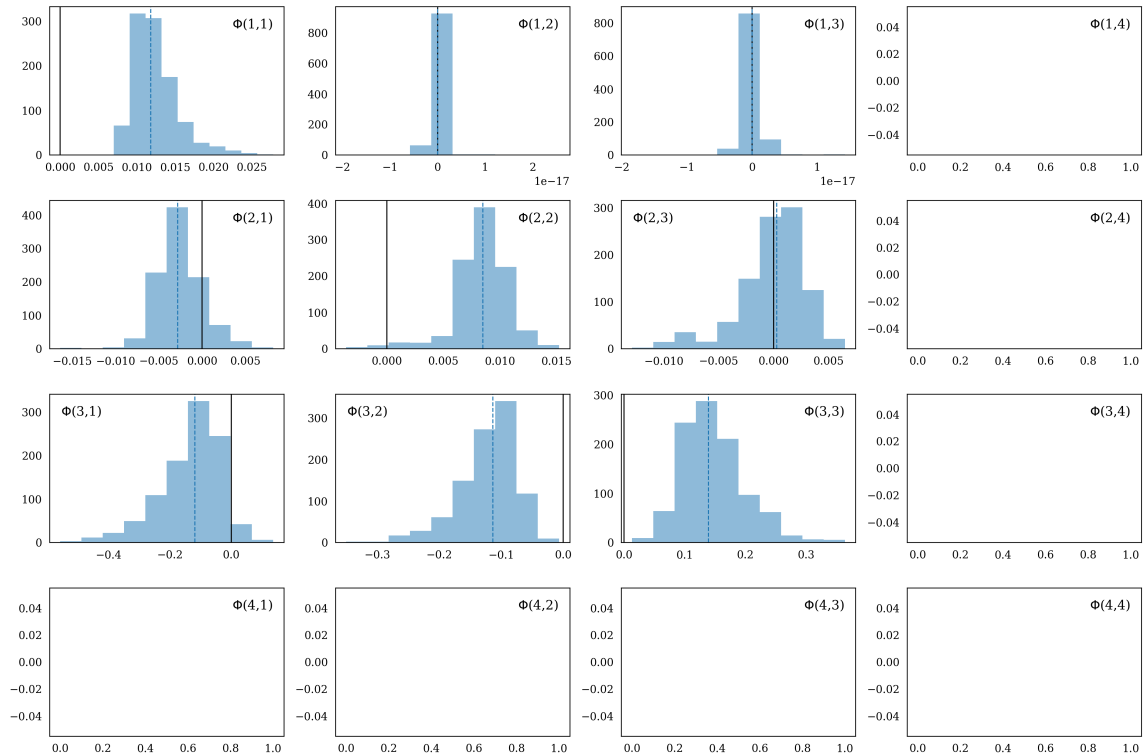


Figura 10: Histograma de los elementos de  $\Phi$  con un SVAR(3) usando  $\ln C_t/Y_t$ .

### 4.3. Especificación con dos variables

Si el vector de variables  $y_t = (\Delta \ln Y_t/L_t, \Delta \ln L_t)'$  es utilizado para estimar las funciones impulso-respuesta en datos del modelo RBC con múltiples *shocks*, imponiendo la misma restricción de largo plazo que Galí, entonces los resultados son aquellos de la Figura 11. Este gráfico debería resultar familiar dado que es el cual se obtiene utilizando un “DSVAR”, o *differenced* SVAR, bivariado; la cual es la especificación favorecida de la literatura por aquellos que tratan a la serie del trabajo como estacionaria en diferencias siguiendo la característica empírica de esta variable.

Figura 11: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(2) usando  $\Delta \ln L_t$ .

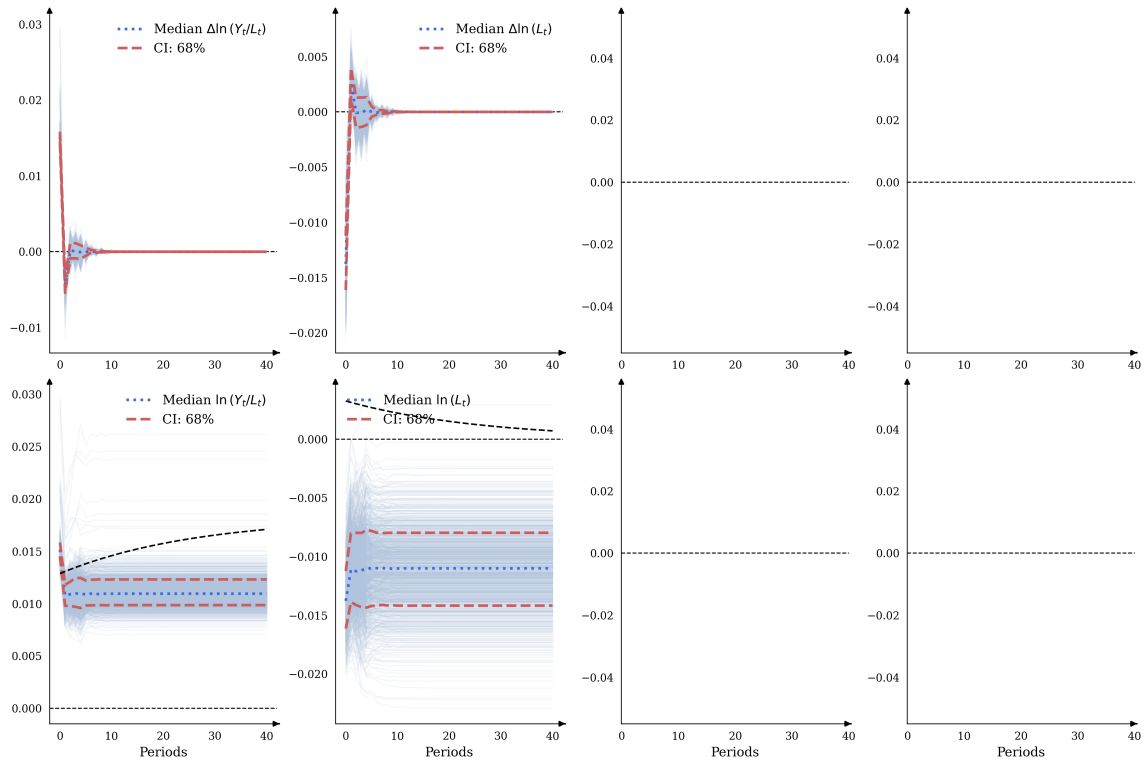


Figura 12: Histograma de los elementos de  $B$  con un SVAR(2) usando  $\Delta \ln L_t$ .

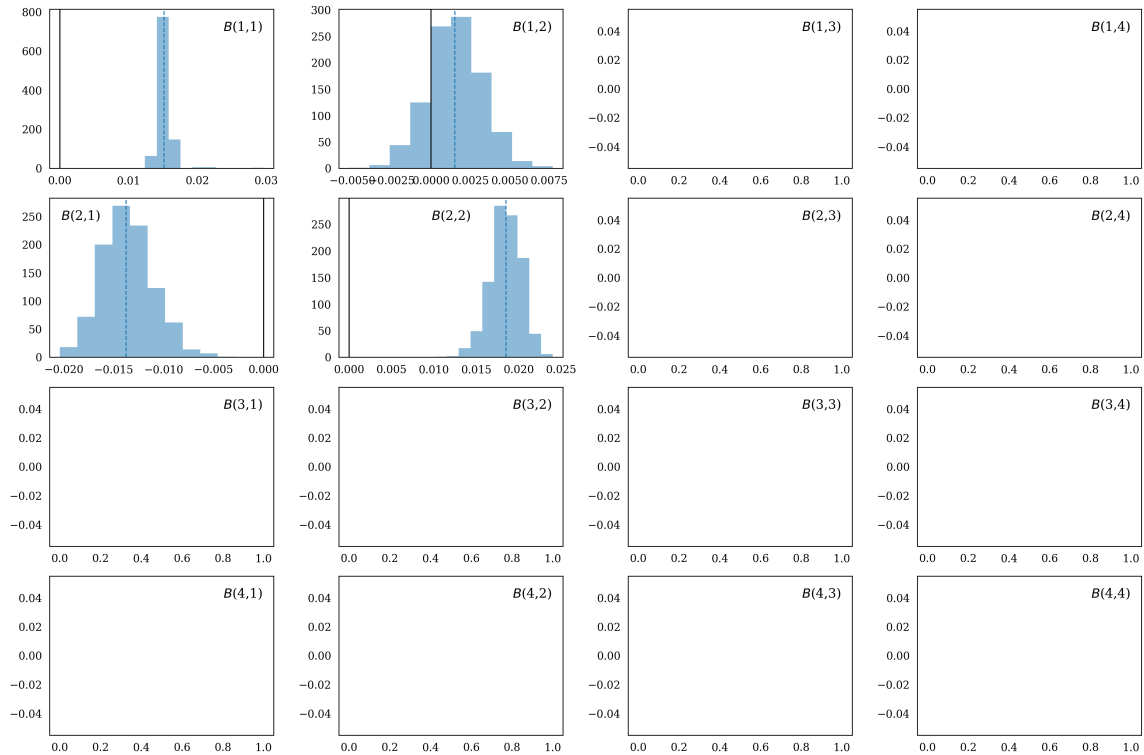
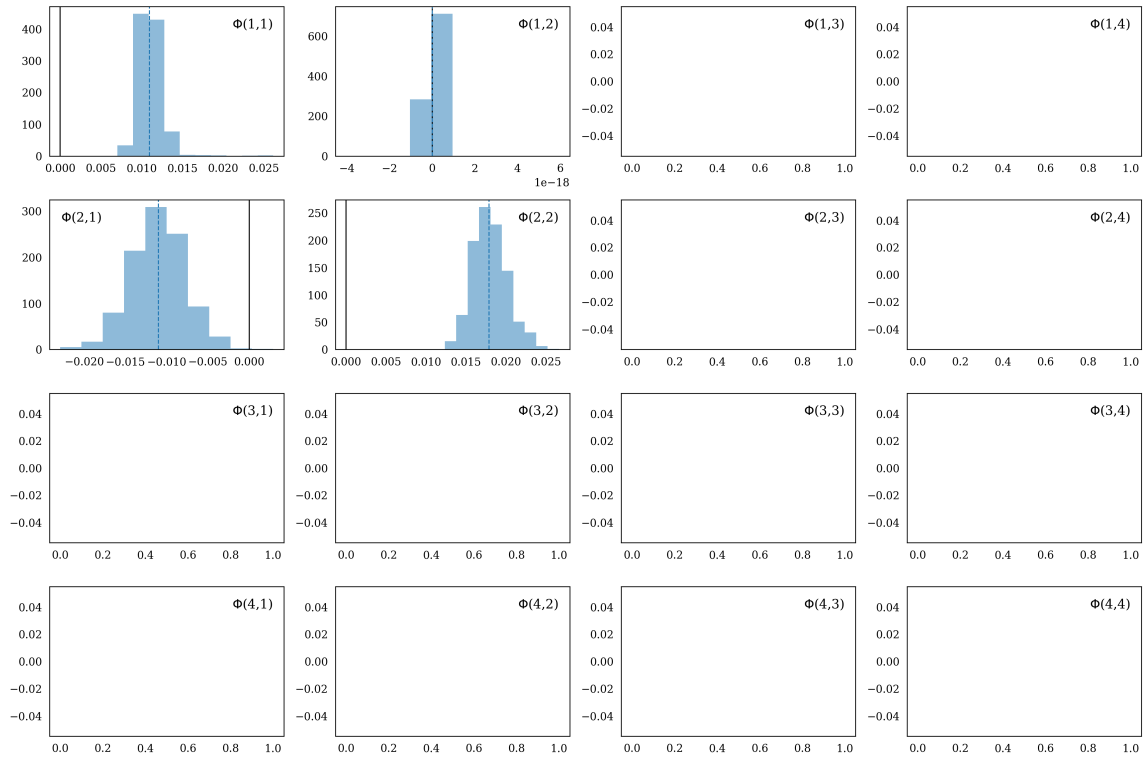


Figura 13: Histograma de los elementos de  $\Phi$  con un SVAR(2) usando  $\Delta \ln L_t$ .



Alternativamente, si el nivel de las horas trabajadas se utiliza en lugar de su tasa de crecimiento, se obtiene la Figura 15. Esta es consistente con los resultados de un “LSVAR”, o *level* SVAR, bivariado; el cual es preferido por aquellos que argumentan que la serie del trabajo es estacionaria, siendo el caso del modelo descrito.

Figura 14: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(2) usando  $\ln L_t$ .

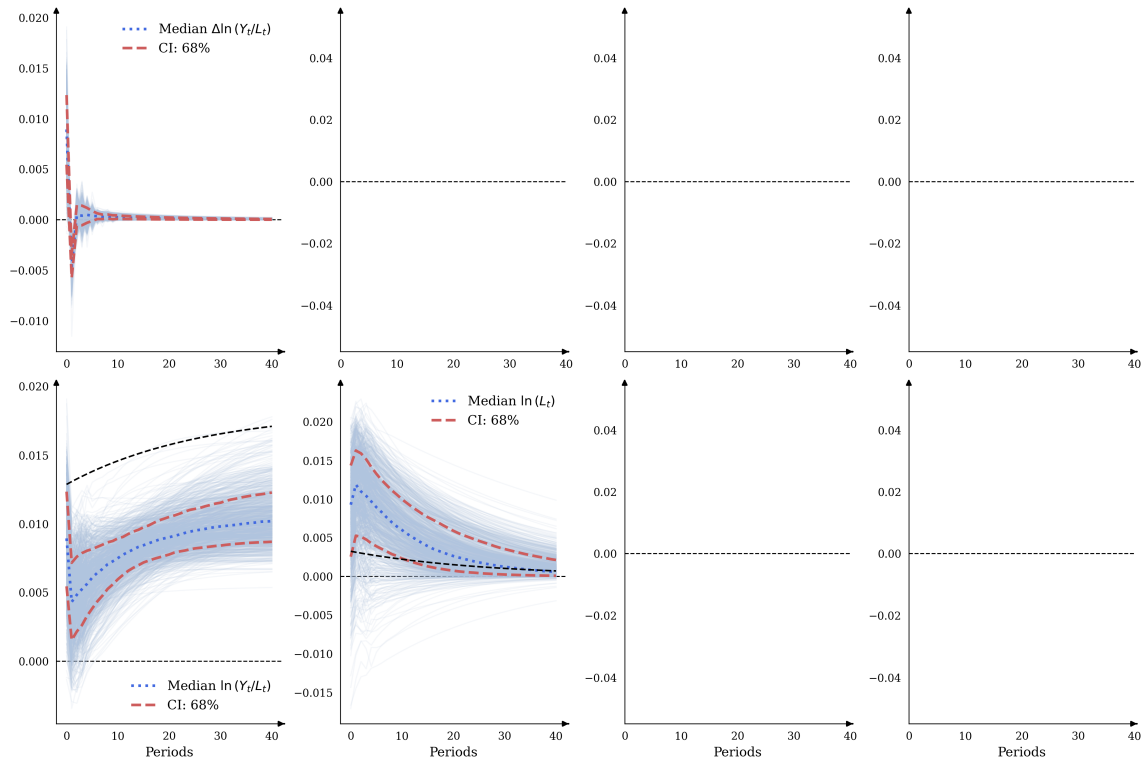


Figura 15: Histograma de los elementos de  $B$  con un SVAR(2) usando  $\ln L_t$ .

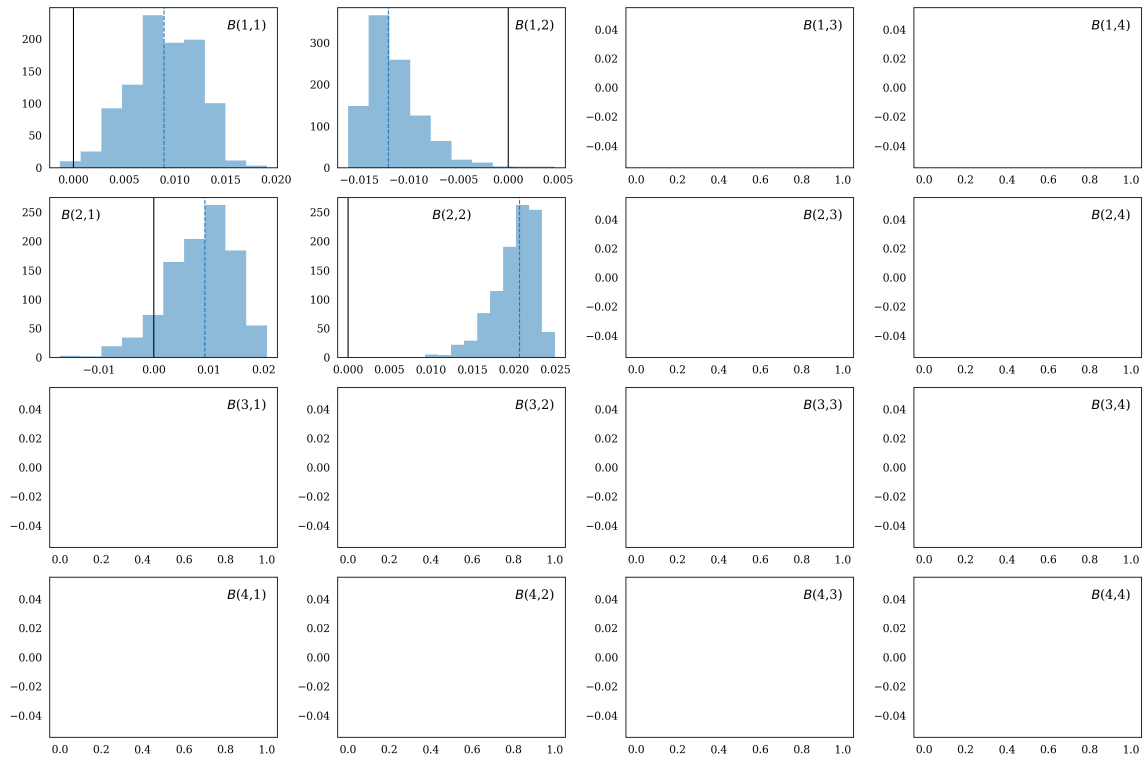
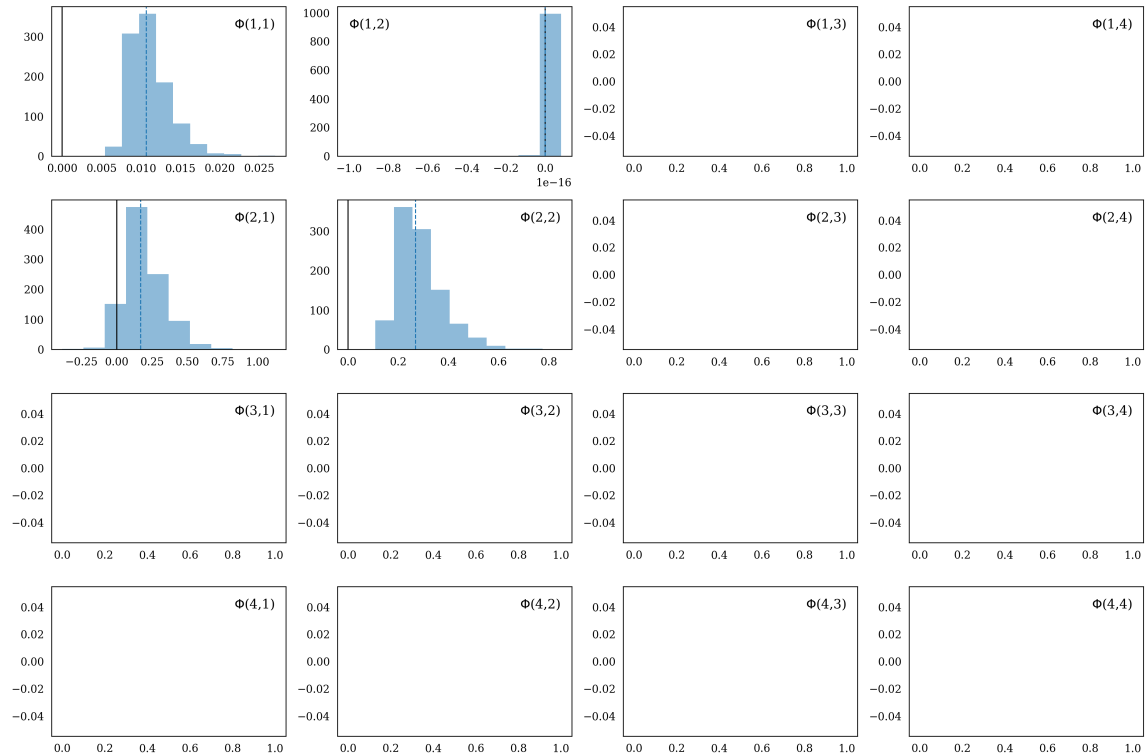
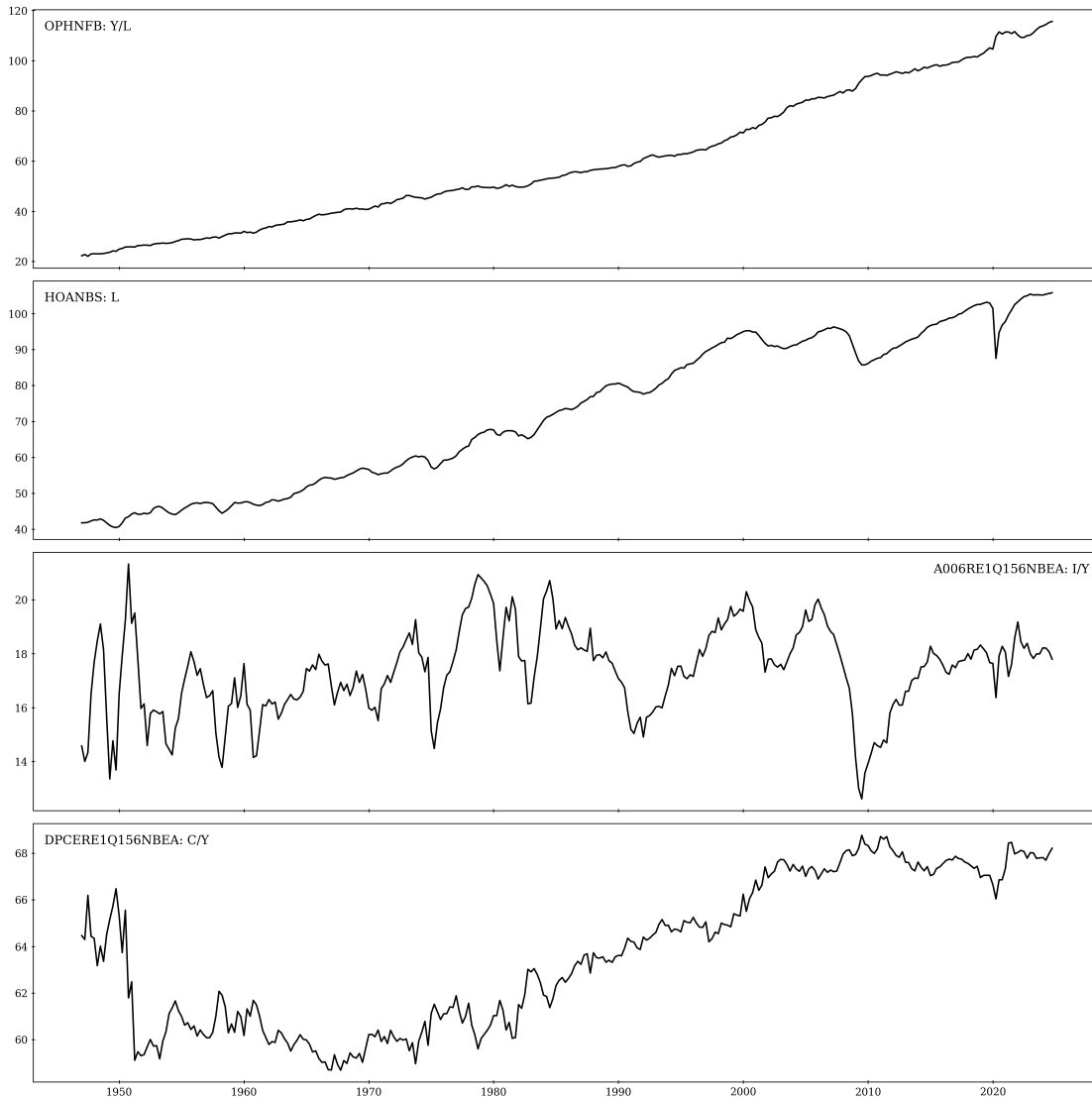


Figura 16: Histograma de los elementos de  $\Phi$  con un SVAR(2) usando  $\ln L_t$ .

## 5. Resultados en datos estadounidenses

Para probar si lo discutido anteriormente es válido para recuperar correctamente la respuestas ante un *shock* de productividad en trabajos empíricos, se obtienen series macroeconómicas del *Federal Reserve Bank of St. Louis* mediante la base de datos *FRED* para los Estados Unidos. Estas son producto por hora y horas trabajadas para todos los trabajadores del sector de negocios no agrarios e inversión privada doméstica bruta y gastos de consumo personal como pesos sobre el producto bruto interno. Estas series, desde 1947Q2 a 2024Q3, se muestran en la Figura 17, donde las primeras dos se encuentran estacionalmente ajustadas por la Reserva Federal y para las últimas se utiliza una descomposición propia por medio de un algoritmo LOESS.

Figura 17: Series empíricas.



Basándose en los resultados de la prueba de Dickey-Fuller aumentado (ADF) y la prueba KPSS puede decirse que las series del producto por hora y de las horas trabajadas son estacionarias en diferencias. En tanto las series de los pesos sobre el producto, ADF rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria pero KPSS también rechaza la nula de estacionariedad en niveles o con tendencia. Observando la Figura 17 puede decirse que la serie de la inversión es estacionaria y aquella del consumo es estacionaria alrededor de una tendencia. Pues, se utilizan las tasas de crecimiento de las primeras dos series y los logaritmos de las últimas dos.

Intervalos de confianza se obtienen siguiendo a Runkle (1987). Esto es, se realiza un muestreo *bootstrap* de los residuos del SVAR para crear nuevas variables por medio de los coeficientes estimados, estimando luego el mismo SVAR en cada una de las simulaciones. Por último, se calculan los percentiles de interés

sobre las funciones impulso-respuesta. Al utilizar este algoritmo se asume que el sesgo por muestra pequeña es despreciable. Caso contrario, una rutina “*bootstrap-after-bootstrap*” debería ser preferida.

### 5.1. Restricciones de largo plazo

Al identificar el *shock* de productividad imponiendo que es el único con un efecto permanente en el producto por hora los siguientes gráficos son obtenidos. Para la Figura 18 ambas series de control son usadas, para la Figura 19 solo el ratio de inversión, y para la Figura 20 solo el ratio de consumo. Finalmente, especificaciones bivariadas son estimadas con las horas trabajadas tanto en diferencias, Figura 21, como en niveles, Figura 22.

Figura 18: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(4).

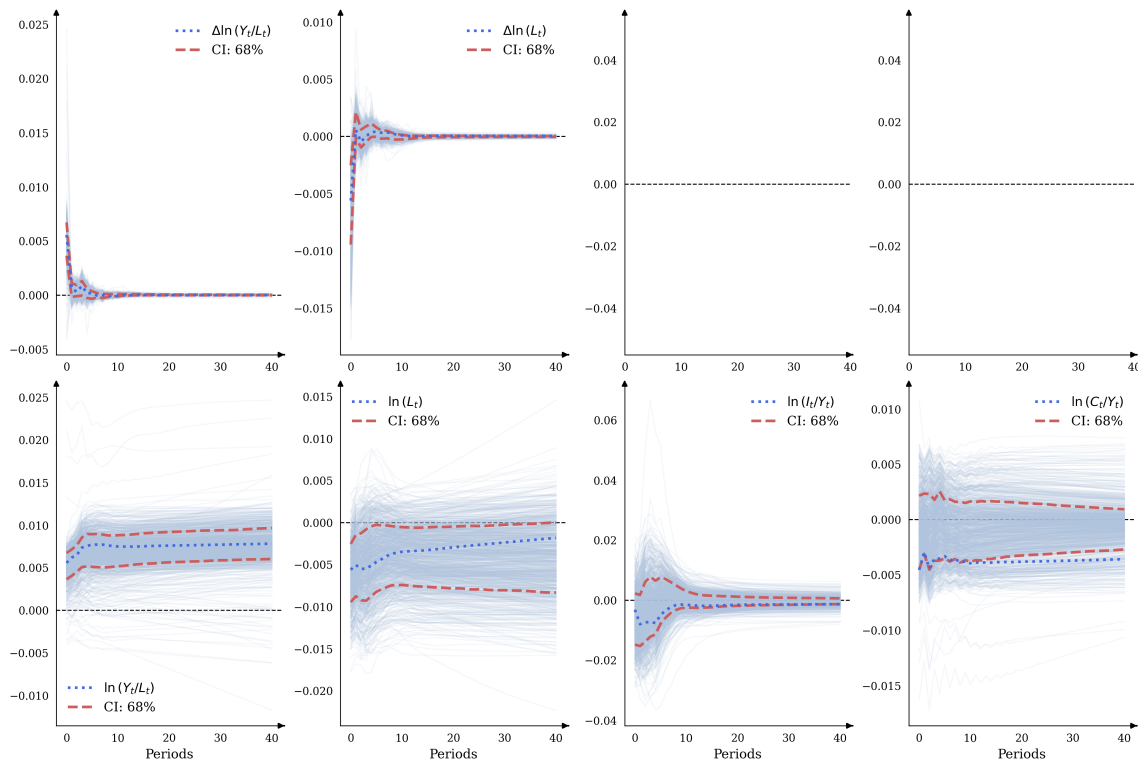


Figura 19: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(3) usando  $\ln I_t/Y_t$ .

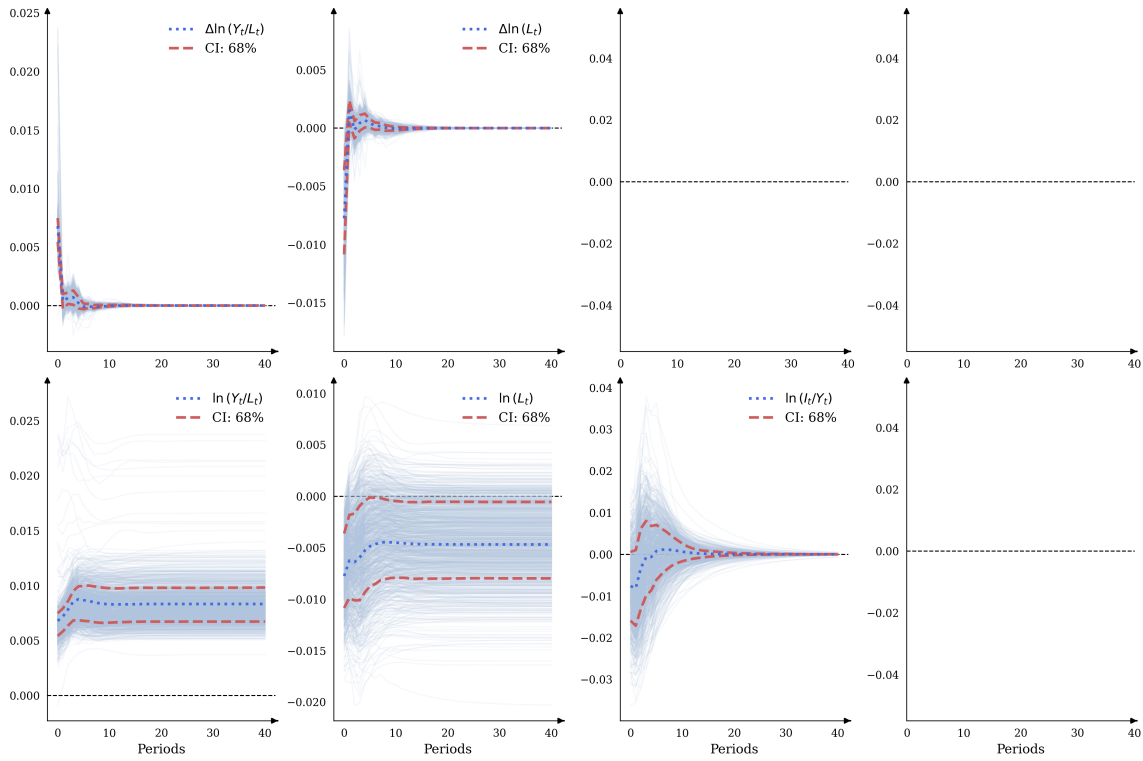


Figura 20: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(3) usando  $\ln C_t/Y_t$ .

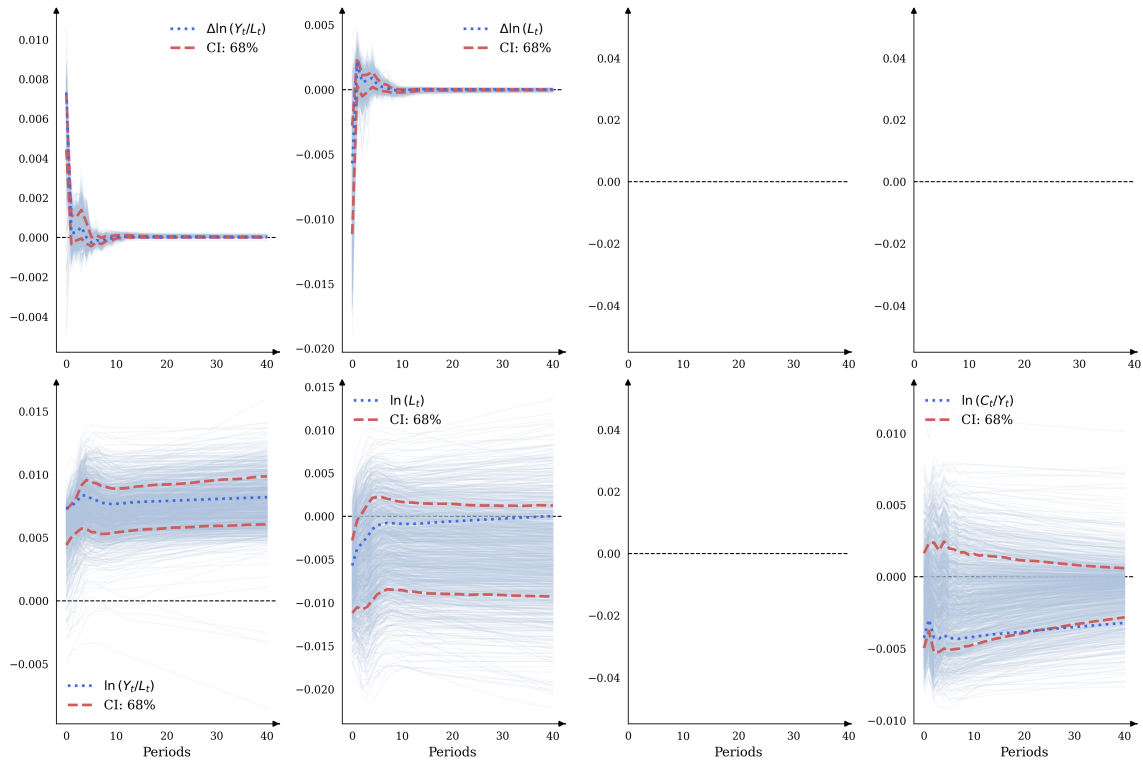


Figura 21: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(2) usando  $\Delta \ln L_t$ .

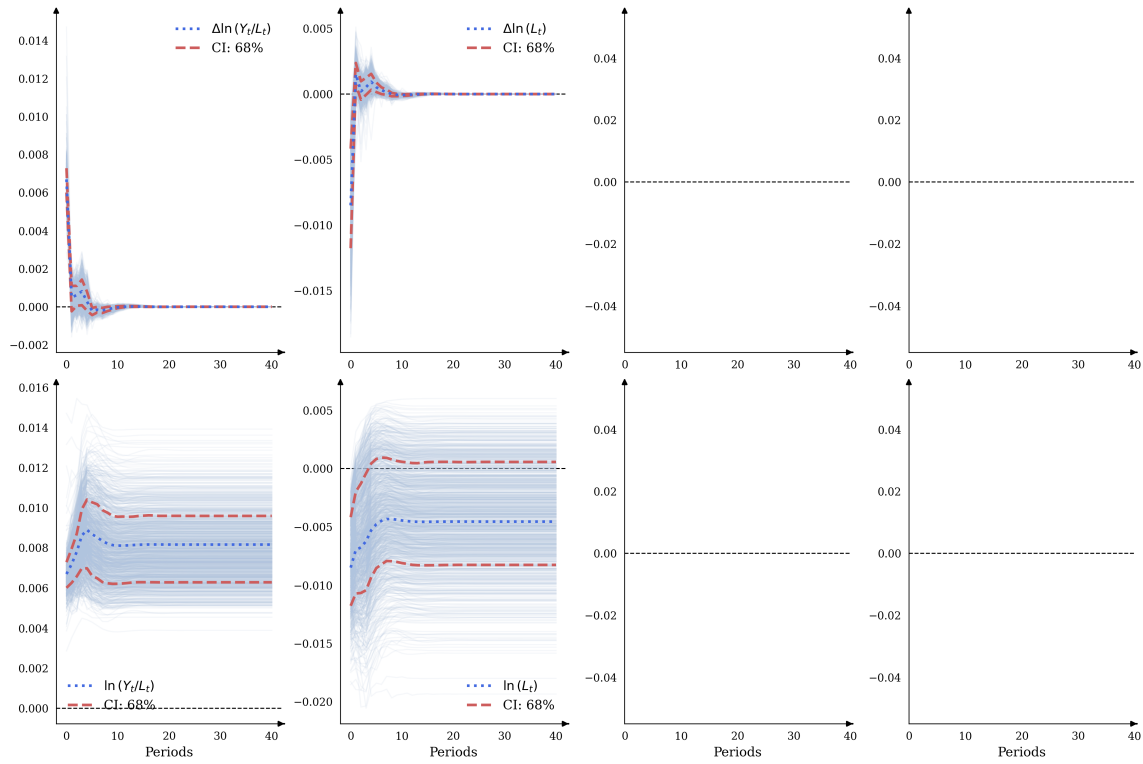
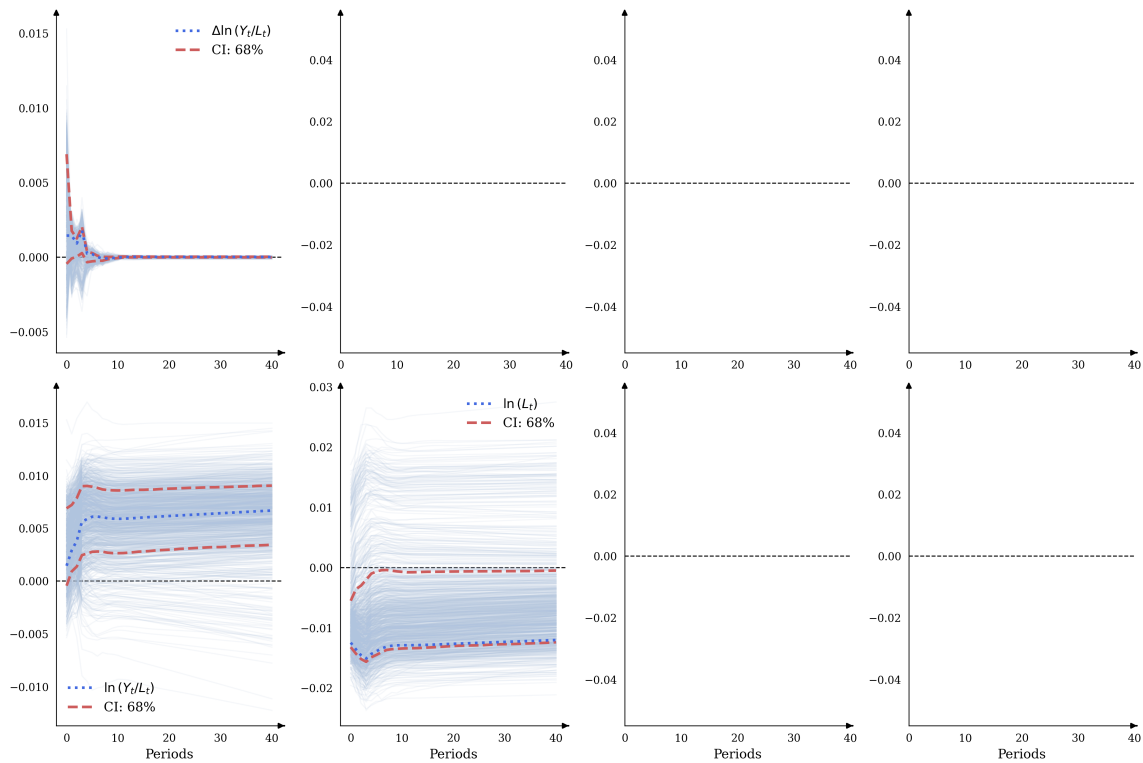


Figura 22: Respuestas estimadas ante un *shock* tecnológico positivo con un SVAR(2) usando  $\ln L_t$ .



En conclusión, mientras que las series de control son útiles para recuperar la respuesta verdadera en datos generados por un modelo RBC, corrigiendo el sesgo que surge al diferenciar la serie laboral, estas no cambiarían la inferencia al realizar trabajos empíricos.

## 6. Restricciones de signos

Con la Figura 22 puede notarse que una respuesta negativa se obtiene en datos reales aun cuando el nivel de las horas trabajadas es utilizado en el SVAR, lo cual está en contra de lo hallado por la literatura. Un ejercicio final involucra estimar el mismo SVAR bivariado identificando los *shocks* mediante restricciones sobre los signos de las respuestas en impacto. En particular, se propone que el *shock* de demanda disminuye el producto por hora e incrementa las horas trabajadas mientras que un *shock* de oferta incrementa el producto por hora, dejando el signo de interés irrestricto.

### 6.1. Resultados en datos estadounidenses

Estimando el SVAR bivariado para obtener mil modelos admisibles que respeten las convenciones sobre los signos mencionadas anteriormente, funciones impulso-respuesta son obtenidas. Estas se grafican junto con los percentiles correspondientes.

La especificación de la segunda serie, i.e. si horas trabajadas entra en niveles o en tasas de crecimiento, sería irrelevante dado que en ambos casos se encuentra una respuesta positiva como se observa en las Figuras 23 y 24.

Figura 23: Restricciones de signos con un SVAR(2) usando  $\Delta \ln L_t$ .

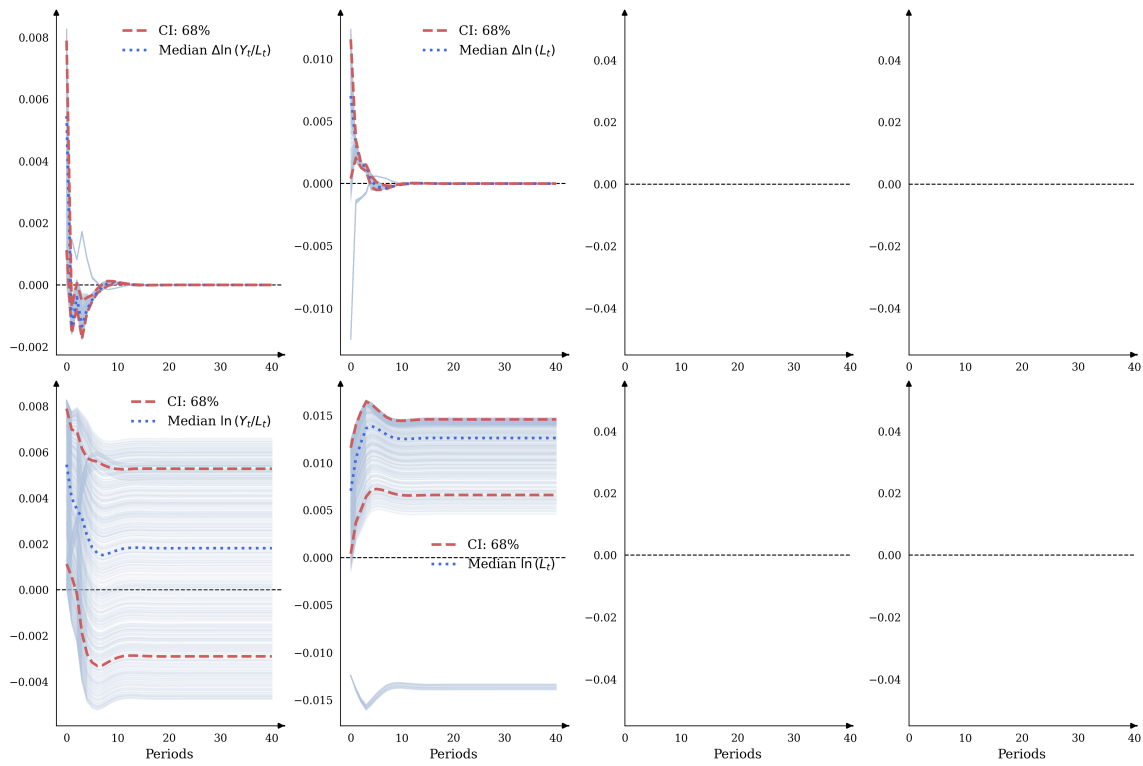
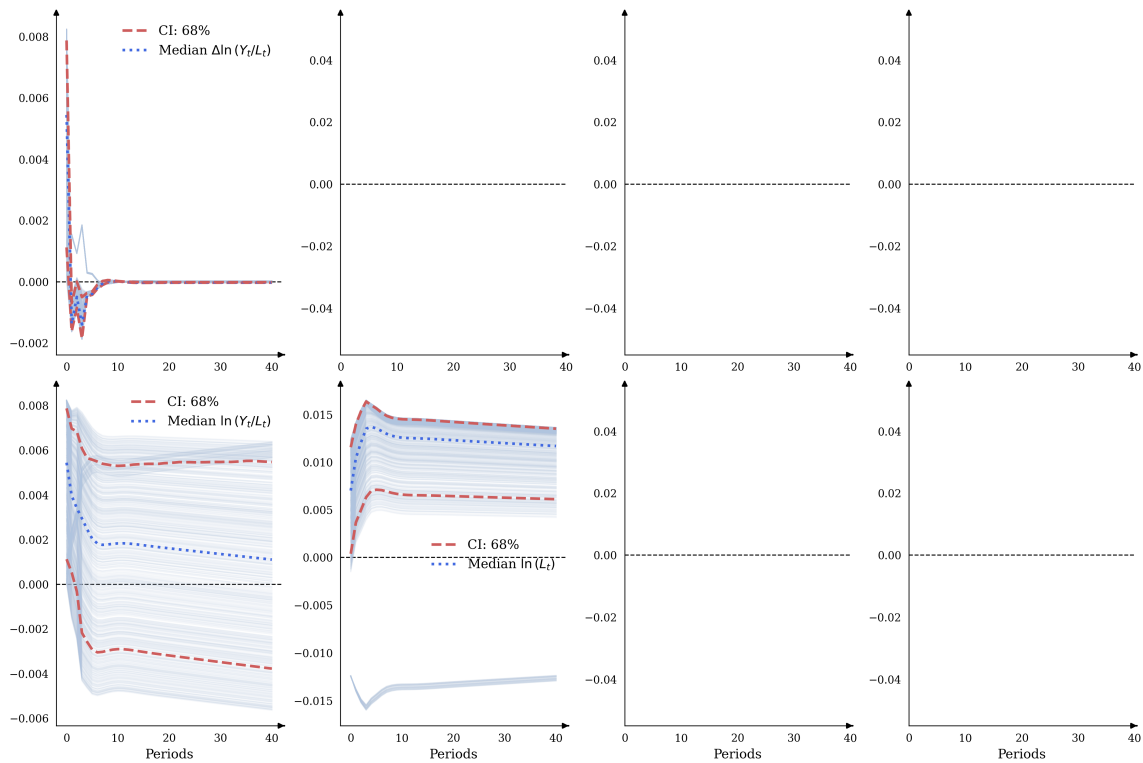


Figura 24: Restricciones de signos con un SVAR(2) usando  $\ln L_t$ .



Si se excluyen las observaciones de la pandemia del COVID-19 puede chequearse que la respuesta del trabajo es robustamente positiva, estando los *outliers* en el gráfico relacionados a dicho período.

## 6.2. Resultados en datos sintéticos

La sección anterior motiva el uso de restricciones de signos en datos simulados. Se recuerda que con restricciones de largo plazo los resultados dependen de la especificación de la serie de las horas trabajadas y en el uso de variables de control, siendo el caso que cuando las tasas de crecimiento son usadas la respuesta recuperada es incorrecta a menos que se controle por el nivel de los pesos de la inversión o del consumo sobre el producto.

En este contexto, para cada par simulado de producto por trabajador y horas trabajadas el conjunto de modelos admisibles es calculado siguiendo la “*Householder-transformation*” y la mediana de las funciones impulso-respuesta es almacenada. Mientras que mucho se ha escrito sobre la manera correcta de resumir este conjunto de modelos admisibles, e.g. Fry y Pagan (2011), aquí las medianas son reportadas como en Canova y Paustian (2011). Otra alternativa hubiera involucrado el mínimo y máximo como en Paustian (2007).

Siguiendo esto anterior, la mediana y los percentiles, de medianas, para cada horizonte sobre las mil simulaciones son calculadas y graficadas en las Figuras 25 y 26.

Figura 25: Restricciones de signos con un SVAR(2) usando  $\Delta \ln L_t$ .

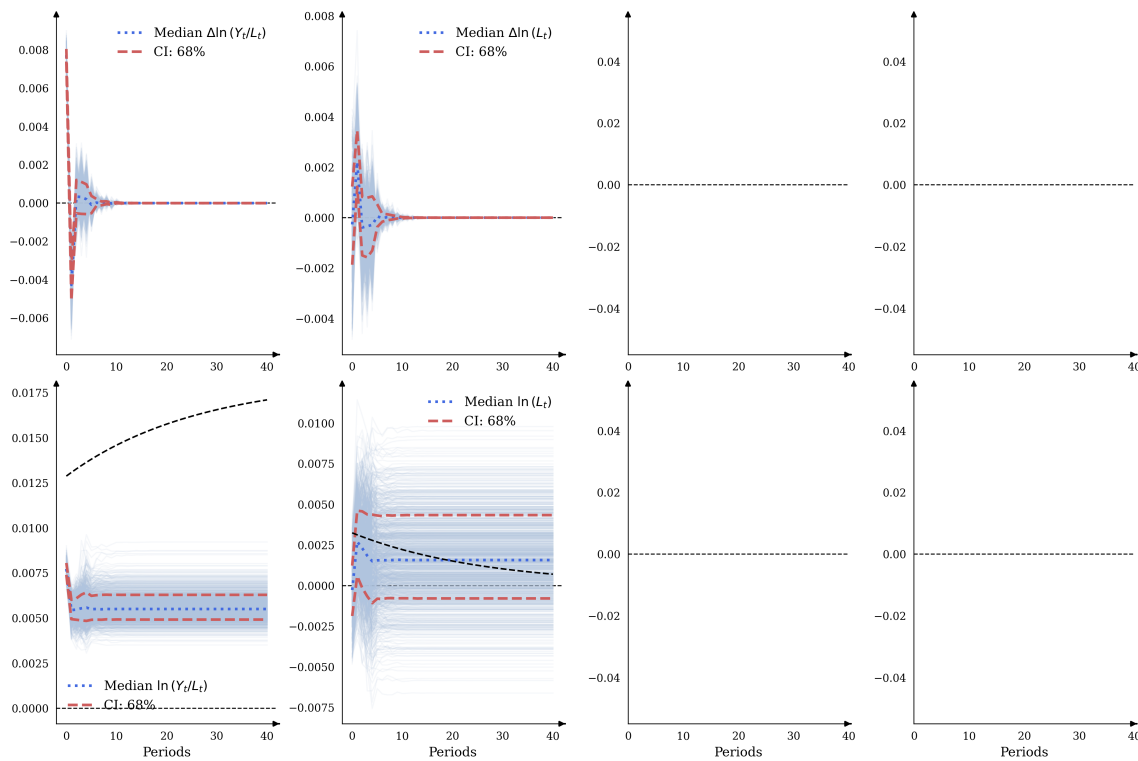
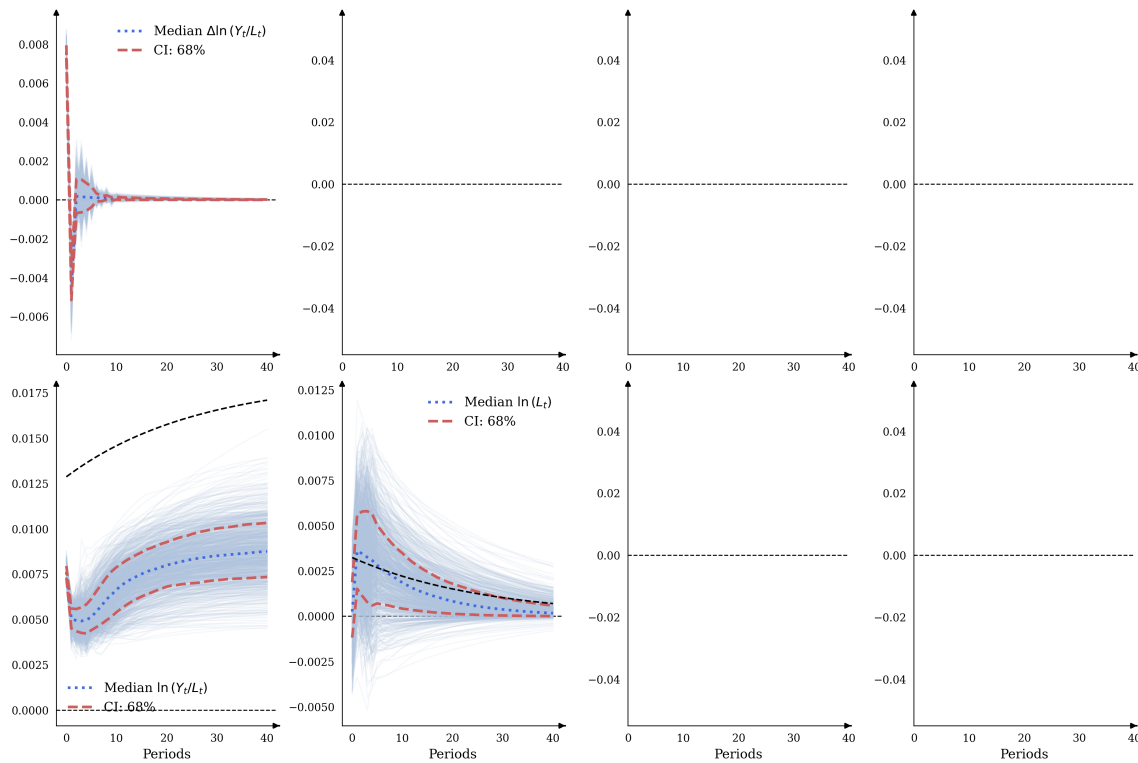


Figura 26: Restricciones de signos con un SVAR(2) usando  $\ln L_t$ .

Importantemente, aun con un SVAR bivariado que carece de series de control las respuestas positivas verdaderas al *shock* tecnológico son recuperadas. Comparando esto con los resultados de las secciones anteriores, puede decirse que la inferencia basada en un VAR estructural no es robusta al método de identificación. En este caso, identificación por conjuntos con restricciones de signos domina a identificación puntual con restricciones de largo plazo.

## 7. Conclusiones

El propósito del ejercicio de este ensayo era replicar los resultados de Erceg et al (2005) que incorporan series de control en datos simulados y juzgar si estos se mantienen en datos empíricos. El hallazgo principal es que la mediana de las funciones impulso-respuesta estimadas en un modelo RBC con múltiples *shocks* es similar a aquella implicada por el mismo si inversión o consumo, variables expresadas como pesos sobre el producto, están presentes en el SVAR que utiliza la tasa de crecimiento del trabajo. Al comparar esto con el caso bivariado que no incluye a ninguna de esas variables, los resultados se asemejan a aquellos obtenidos por la especificación LSVAR, aunque podría hacerse un llamado de atención sobre la significancia dada la amplitud del intervalo de confianza.

Utilizando datos de los Estados Unidos una respuesta positiva es recuperada únicamente al identificar con restricciones de signos. Con aquellas de largo plazo, independientemente de los controles o la especificación de la serie del trabajo, la respuesta es negativa. Mientras que la estrategia de agregar controles es útil para resolver errores de especificación en datos simulados, lo cual se relaciona a la discusión de Chari et al (2008), no aumenta la confianza del analista en el uso de SVARs con restricciones de largo plazo al realizar análisis empíricos. En su lugar, esquemas de identificación basados en los signos de las respuestas deberían favorecerse dado que no sufren de los sesgos discutidos.

## Referencias

- Blanchard, O. J., and Quah, D. (1989). The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances. *The American Economic Review*, 79 (4).
- Canova, F. (2007). *Methods for Applied Macroeconomic Research*. Princeton University Press.
- Canova, F., and Paustian, M. (2011). Business cycle measurement with some theory. *Journal of Monetary Economics*, 58 (4).
- Canova, F., Lopez-Salido, D., and Michelacci, C. (2010). The effects of technology shocks on hours and output: a robustness analysis. *Journal of Applied Econometrics*, 25 (5).
- Chari, V. V., Kehoe, P. J., and McGrattan, E. R. (2007). *A Critique of Structural VARs Using Business Cycle Theory* (Report No. 364). Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- Chari, V. V., Kehoe, P. J., and McGrattan, E. R. (2008). Are structural VARs with long-run restrictions useful in developing business cycle theory? *Journal of Monetary Economics*, 55 (8).
- Christiano, L. J., Eichenbaum, M., and Vigfusson, R. (2003). *What Happens After a Technology Shock?* (Working Paper No. 9819). National Bureau of Economic Research.
- Christiano, L. J., Eichenbaum, M., and Vigfusson, R. (2007). Assessing Structural VARs. *NBER Macroeconomics Annual 2006*.
- Dedola, L., and Neri, S. (2007). What does a technology shock do? A VAR analysis with model-based sign restrictions. *Journal of Monetary Economics*, 54 (2).
- Erceg, C., Guerrieri, L., and Gust, C. (2005). Can Long-Run Restrictions Identify Technology Shocks? *Journal of the European Economic Association*, 3 (6).
- Francis, N., and Ramey, V. A. (2005). Is the technology-driven real business cycle hypothesis dead? Shocks and aggregate fluctuations revisited. *Journal of Monetary Economics*, 52 (8).
- Fry, R., and Pagan, A. (2011). Sign Restrictions in Structural Vector Autoregressions: A Critical Review. *Journal of Economic Literature*, 49 (4).
- Galí, J. (1999). Technology, Employment, and the Business Cycle: Do Technology Shocks Explain Aggregate Fluctuations? *American Economic Review*, 89 (1).
- Galí, J., and Rabanal, P. (2005). Technology Shocks and Aggregate Fluctuations: How Well Does the Real Business Cycle Model Fit Postwar U.S. Data? *NBER Macroeconomics Annual 2004*.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Kehoe, P. J. (2007). How to Advance Theory with Structural VARs: Use the Sims-Cogley-Nason Approach. Comment on Christiano et al's "Assessing Structural VARs". *NBER Macroeconomics Annual 2006*.
- Kilian, L., and Lütkepohl, L. (2017). *Structural Vector Autoregressive Analysis*. Cambridge University Press.

- Klein, P. (2000). Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 24 (3).
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer.
- Lütkepohl, H., and Kratzig, M. (2004). *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge University Press.
- Paustian, M. (2007) Assessing Sign Restrictions. *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 7 (1).
- Rubio-Ramírez, J. F., Waggoner, W., and Zha, T. (2010). Structural Vector Autoregressions: Theory of Identification and Algorithms for Inference. *Review of Economic Studies*, 77 (2).
- Runkle, D. E. (1987). Vector Autoregressions and Reality. *Journal of Business and Economic Statistics*, 5 (4).
- Uhlig, H. (2004). Do Technology Shocks Lead to a Fall in Total Hours Worked? *Journal of the European Economic Association*, 2 (2-3).
- U.S. Bureau of Economic Analysis, *Shares of gross domestic product: Gross private domestic investment [A006RE1Q156NBEA]*, retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis; <https://fred.stlouisfed.org/series/A006RE1Q156NBEA>.
- U.S. Bureau of Economic Analysis, *Shares of gross domestic product: Personal consumption expenditures [DPCERE1Q156NBEA]*, retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis; <https://fred.stlouisfed.org/series/DPCERE1Q156NBEA>.
- U.S. Bureau of Labor Statistics, *Nonfarm Business Sector: Hours Worked for All Workers [HOANBS]*, retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis; <https://fred.stlouisfed.org/series/HOANBS>.
- U.S. Bureau of Labor Statistics, *Nonfarm Business Sector: Labor Productivity (Output per Hour) for All Workers [OPHNFB]*, retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis; <https://fred.stlouisfed.org/series/OPHNFB>.