Modelo de Ciclos Económicos para Australia: el rol de la elasticidad de la oferta de trabajo en la economía.

Michelena Agustina, Zanzuchi M. Belén, Zovich M. Luján
Universidad Torcuato Di Tella

5 de agosto de 2016

Abstract

En este trabajo se evalúa la capacidad de un modelo de equilibrio general dinámico y estocástico para reproducir las regularidades empíricas de la economía australiana en el período 1960-2015. Se utiliza como base un modelo neoclásico de una pequeña economía abierta con dos sectores: transables y no transables. A modo de replicar de manera más precisa el modelo, se estima la elasticidad de la oferta de trabajo. El modelo reproduce satisfactoriamente el comportamiento del producto y del tipo de cambio real. La elasticidad de la oferta de trabajo obtenida se asemeja al valor sugerido por la literatura macroeconómica existente.

1 Introducción

Los modelos de Real Business Cycles (RBCs) se han convertido en la herramienta más utilizada para estudiar las regularidades empíricas de los ciclos macroeconómicos en todo tipo de economías. En 1982, Finn Kydland y Edward Prescott introdujeron tres ideas revolucionarias en materia de RBCs en su paper "Time to Build and Aggregate Fluctuations". La primera, basada en un trabajo previo de Lucas y Prescott (1971), presenta la idea de que los modelos de ciclos económicos pueden ser estudiados utilizando modelos dinámicos de equilibrio general (DGEM). La segunda, explica que es posible unificar los ciclos económicos y teorías de crecimiento en tanto los ciclos económicos sean consistentes con las regularidades empíricas del crecimiento a largo plazo. La tercer idea, expone que es posible ir más allá de la comparación cualitativa entre las propiedades del modelo y los hechos estilizados predominantes en la literatura macroeconomica hasta 1982. Los autores proponen calibrar los modelos a partir de estudios microeconómicos y la caracterización de largo plazo de la economía, y utilizar estos modelos calibrados para generar datos artificiales que puedan compararse con datos reales.

La primer generación de modelos macroeconómicos que se basaron en el trabajo de Kydland y Prescott (1982) pusieron énfasis en el rol de los shocks reales, particularmente los shocks tecnológicos, como catalizadores de las fluctuaciones en ciclos. Sin embargo, modelos más recientes de RBC y la literatura contemporánea, motivados por el contexto ecómico de las últimas décadas, han virado su atención hacia shocks a los términos de intercambio, tasa de interés y tipo de cambio real. Los modelos de RBCs representan una importante herramienta en lograr el desafío propuesto por Robert Lucas (Lucas (1980)): "Una de las funciones de la economía teórica consiste en proveer sistemas económicos completamente articulados y artificiales, que sirvan como laboratorios mediante los cuales puedan testearse, a un menor costo, políticas que serían prohibitivamente caras de experimentar con las economías en la realidad."

Este trabajo se introduce en la discusión acerca de la capacidad de un modelo de equilibrio general dinámico y estocástico para reproducir las regularidades empíricas de la economía australiana partiendo del modelo "Business Cycles in Australia" de Pablo Andrés Neumeyer (2008). En dicho modelo se consideran cuatro shocks distintos que son analizados en su conjunto: a los términos de intercambio, a la tasa de interés y a la productividad de los factores tanto del sector transable como el de no transable, teniendo en cuenta que movimientos en dichas variables impulsan los ciclos económicos.

Tal como afirma Edward Prescott en “Aggregate Labour Supply”, hace más de 50 años la oferta de trabajo era considerada como una variable irrelevante para el análisis macroeconómico. Esto se debía al hecho de que, en el agregado, la oferta de trabajo no estaba determinada por factores que determinaran la oferta de trabajo individual. Sin embargo, Lucas y Rapping en “Real Wages, Employment, and Inflation” desafiaron esta visión e introdujeron la oferta de trabajo en análisis macroeconómicos, logrando grandes avances. Siguiendo esta línea de pensamiento, el objetivo de la presente investigación consiste en identificar los parámetros estructurales relevantes que determinan la decisión de ocio-consumo de los individuos, y luego usar esa información para inferir la elasticidad. De esta manera, la hipótesis a corroborar, sostiene que el rol de la oferta de trabajo es de suma importancia a la hora de explicar los ciclos económicos y por lo tanto, a la hora de replicarlos para una economía en particular, resulta relevante estimar la elasticidad de la oferta de trabajo de dicha economía específica. Con este propósito, la investigación desarrolla una forma de estimar la elasticidad agregada no compensada, minimizando la distancia entre los momentos de los datos y los teóricos. Uno de los principales desafíos consiste en encontrar una elasticidad de la oferta de trabajo que sea aceptada dentro de la literatura, y que a su vez replique de manera precisa los desvíos de las principales variables de los ciclos económicos

La idea detrás de la importancia de la oferta de trabajo en explicar las fluctuaciones de los ciclos económicos ha sido un tema de discusión desde que fue introducido por Lucas y Rapping (1969). La magnitud de esta elasticidad resulta de gran importancia al momento de explicar los ciclos económicos. Una fuente importante de confusión en la literatura es la idea de que puede estimarse la elasticidad de la oferta de trabajo en un contexto y extrapolar esa misma elasticidad a otros. Si bien esto puede funcionar en ciertos casos y bajo algunos supuestos específicos, en general, resulta problemático. Siguiendo a Browning, Hansen y Heckman (1999), interesa preguntarse qué pasa en las distintas dimensiones de la oferta de trabajo (individual o agregado) frente a algún cambio en el contexto en particular. Por este motivo, es conveniente adoptar un contexto en el que el individuo formula explícitamente su decisión, y donde los parámetros que caracterizan a la misma son los parámetros relevantes que determinan la respuesta de mucho de los componentes de la oferta de trabajo frente a distintos cambios. Una forma de calcular la misma es mediante la elasticidad de Frisch, que mide la reacción de la cantidad de horas trabajadas ante un cambio en el salario promedio cuando se mantiene la utilidad marginal de la riqueza constante. Existe un debate entre micro y macro economistas acerca del uso de esta elasticidad como el correcto estimador que se desarrollará más adelante en este estudio.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se describen las regularidades empíricas de la economía australiana para el período de análisis. Se presentan los ciclos reales observados en las principales variables macroeconómicas y sus momentos estadísticos. La sección 3 describe el modelo que se utiliza y la forma de resolución, hallando el estado estacionario y haciendo una aproximación log-lineal alrededor de éste (que se presenta en el anexo) en dos dimensiones. La primera tiene en cuenta un modelo con preferencias Cobb-Douglas y la segunda considera un modelo con preferencias Greenwood–Hercowitz–Huffman (GHH). En la sección 4 se discute la calibración de los parámetros del modelo y, en particular, el mecanismo empleado para hallar la elasticidad Frisch de la oferta de trabajo agregada. En la sección 5 se muestran los resultados y analiza los momentos estadísticos arrojados por el modelo mediante la simulación de la economia donde se utiliza un vector de shocks aleatorios. Finalmente, la sección 6 se reserva para las conclusiones del trabajo.

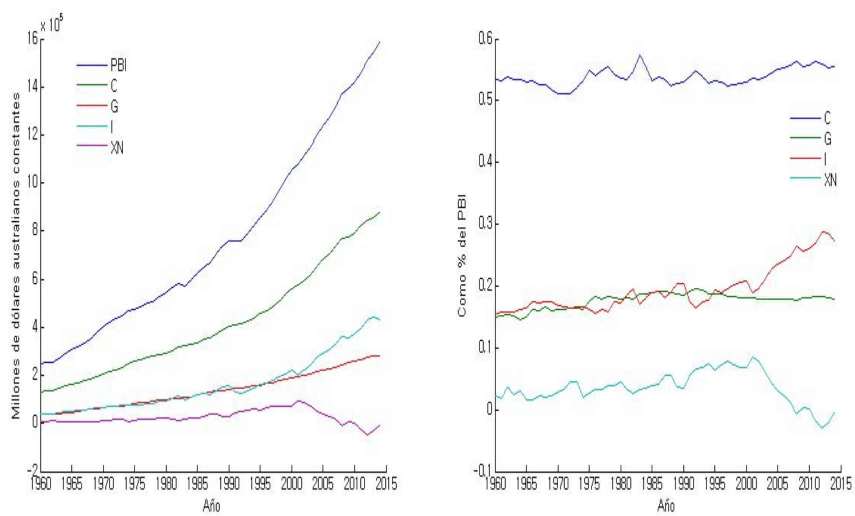
2 Regularidades Empíricas

Con el objetivo de describir las regularidades empíricas de los ciclos en Australia se procede de la forma estándar de acuerdo con la literatura de Real Business Cycle (RCB). Es decir, se realiza la descomposición tendencia-ciclo para cada uno de los agregados macroeconómicos y se calculan los momentos estadísticos que describen al ciclo. Para ello, se emplea el filtro de Hodrick-Prescott sobre el logaritmo de cada serie, a excepción de la de exportaciones netas que se expresan en términos relativos al PBI. El ciclo se calcula como la diferencia entre la serie y su tendencia, que se puede interpretar como desvíos porcentuales dado que están expresadas en logaritmos. Los momentos presentados son el desvío estándar, el desvío relativo al producto, la correlación con el producto y la persistencia. Se entiende por procíclicas a aquellas variables que presentan correlación positiva con el producto, contracíclicas las que tengan correlación negativa y acíclicas si la correlación no es significativa.

Los datos se obtienen de las cuentas nacionales de Australia, todos ellos disponibles en el sitio web del *Autralian Bureau of Statistics y el Reserve Bank of Australia* para el periodo 1970-2015. Las variables seleccionadas son: PBI, Consumo Privado, Gasto Público, Inversión y Exportaciones Netas.

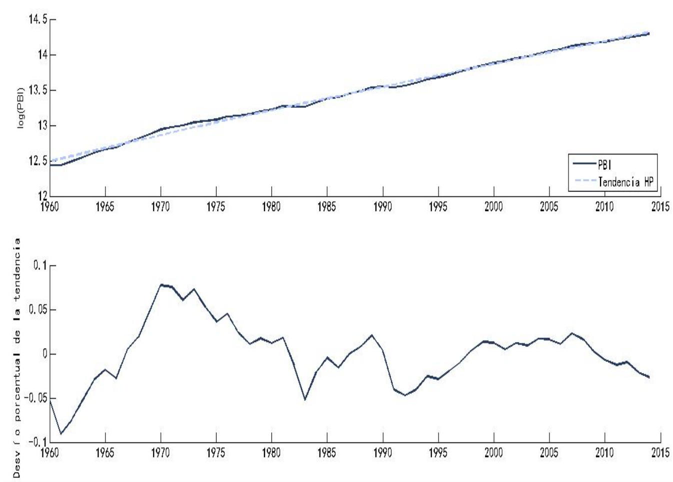
A continuación se presentan los gráficos con las realizaciones de cada serie y a su vez, a éstas como porcentaje del PBI. Posteriormente, se ilustran las realizaciones de las variables filtradas y sus gráficos respecto del PBI. Por último, se expone una tabla con los momentos antes mencionados.

Figura 1 : *Agregados Macroeconómicos*



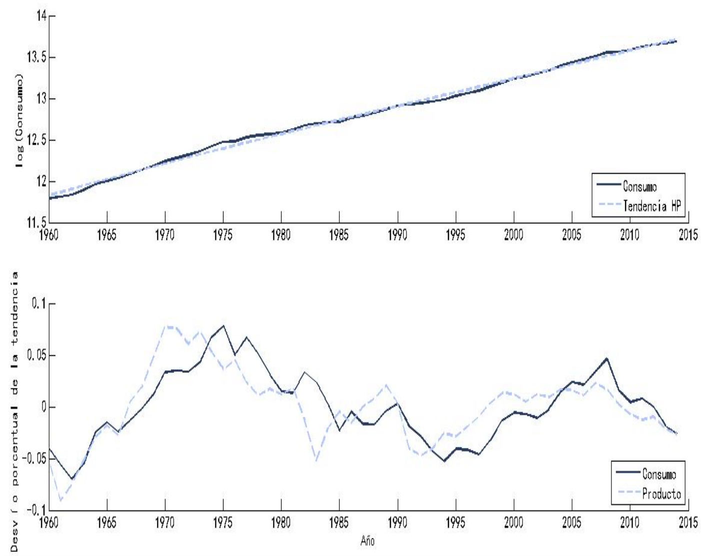
La economía de Australia ha experimentado un crecimiento continuado con reducido desempleo, inflación controlada, deuda pública muy acotada, y un fuerte y estable sistema financiero; aunque también presenta un déficit crónico en su cuenta corriente y altos niveles de endeudadmiento externo del sector privado. El crecimiento fue liderado principalmente por las exportaciones y el sector minero, pero se espera que el aporte de los servicios al producto se siga incrementando, cobrando una mayor importancia en el crecimiento del país. El consumo privado y el gasto público también experimentaron un gran crecimiento, casi a la par del producto. De forma similar, la inversión aumentó constantemente aunque su composición fue variando a lo largo de los años. Un análisis más detallado de cada variable se hace a continuación.

Figura 2 : Producto Bruto Interno (PBI)



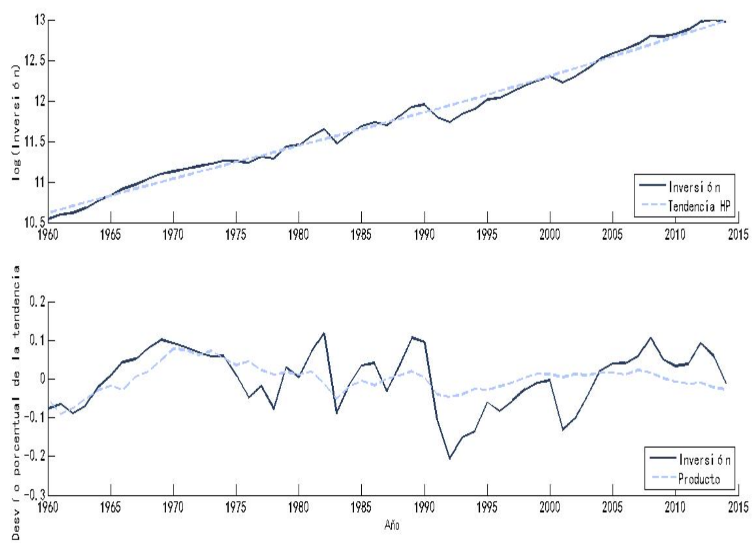
Con el paso del tiempo, la estructura de la economía Australiana fue cambiando gradualmente: pasó de estar centrada en la agricultura y manufactura a estar más orientada a los servicios, con el sector minero a su vez ganando mayor importancia en los últimos años. Si bien a partir de los sesenta la participación de las manufacturas en el producto disminuyó, en términos absolutos continuó expandiendose. Por otro lado, la industria de servicios cobró una mayor importancia, contribuyendo hoy en día a casi un 80% del producto total. En un principio, los servicios estaban orientados al sector manufacturero pero, a medida que la importancia de este sector se vió reducida, los servicios que lo acompañaban también fueron disminuyendo. Asimismo, los servicios relacionados a los negocios, como los del sector financiero, salud y eduación, crecieron. Estos sectores son más trabajo intensivo que el manufacturero, que es capital intensivo, y por ende esta trancisión de la economía también se puede ver reflejada en una mayor participación del trabajo en el sector no transable, que difiere con la situación de los 1960s.

Figura 3 : *Consumo*



La magnitud del aumento real en el nivel de consumo de los hogares entre 1960-2006 fue de más del 152% (a precios constantes del 2005) lo cual sugiere que gozan de un nivel mucho más alto de bienestar material que a principios de 1960. Cabe destacar que durante 2005-06 el 46% del gasto en consumo final de todos los hogares se explica por el gasto en alquiler y otros servicios de vivienda , la alimentación, la restauración y el transporte. Se puede identificar un cambio en el comportamiento del consumo al comparar datos de 1985 con datos actuales. Los bienes para la comunicación y la recreación y cultura aumentaron alrededor de 300% y, a su vez, otros servicios se incremenaron significativamente como el gasto en seguros, servicios de transporte, decoración, educación, entre otros.

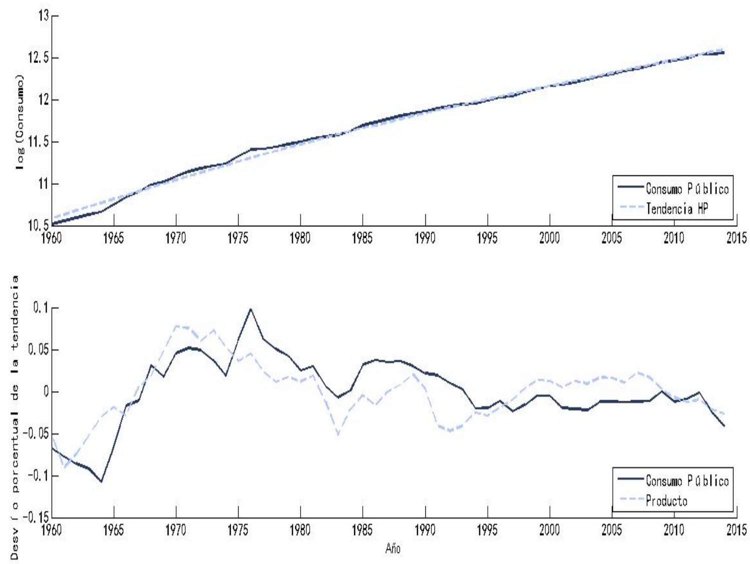
*Figura*4 : *Inversión*



La formación bruta de capital fijo real per cápita creció durante la mayor parte de los 1990s. Esto se asoció a la recesión experimentada por Australia a finales de 1980 y principios de 1990. Sin embargo, se recuperó en 1992-93 y continuó aumentando durante el resto de la década. Entre 1992-93 y 2000-01, la formación bruta de capital fijo creció casi un 37% debido, en gran parte, al impulso que dió el gobierno de Australia a las inversiones en el país mediante deducciones a los impuestos para quienes decidieran producir e innovar en dicho país, acompañado de un importante proceso de reconversión.

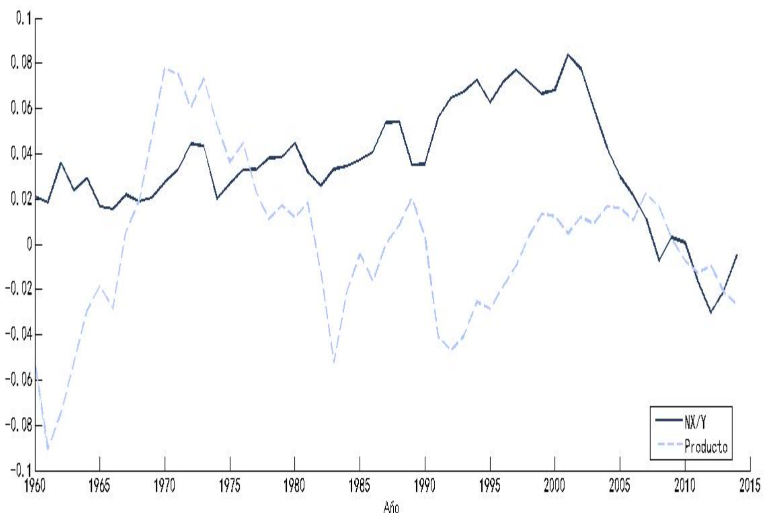
El sector privado contribuyó consistentemente a la formación del capital durante la última década, en particular su participación aumentó de poco más del 74% en 1990-91 a alrededor del 82% en 2000-01. Las industrias que contribuyen al producto son: en primer lugar la minería, luego los servicios financieros/seguros, construcción, servicios de salud, manufacturas y, por último, servicios profesionales.

Figura 5 : Gasto Publico



En cuanto al gobierno y las empresas públicas, éstas realizaron una menor contribución a la formación bruta de capital fijo total real per cápita. La inversión del gobierno representó alrededor del 12 % de la cifra total de la inversión en 2000-01, mientras que las empresas públicas representaron aproximadamente el 7 %. Aún así, en término absolutos el gasto público aumentó un 66%, destacándose un mayor crecimiento en la última década. Actualmente, la mayor parte de estos ingresos van dirigidos a seguridad social, salud, educación y defensa.

Figura 6 : *Exportaciones Netas/PBI*



Desde la desregulación de la economía Australiana en 1980s, tanto las importaciones como las exportaciones experimentaron un gran crecimiento. En los 1950s la mayor parte de las importaciones incluía maquinaria, textiles, indumentaria, manufacturas con metales, hierro y acero. Mientras que en la actualidad, el petróleo, los vehículos a motor, equipos en telecomunicaciones y medicamentos son las más importantes. Contrario al resto de las variables, las exportaciones están dominadas hoy en día por commodities. En 1960s los bienes agrícolas seguían liderando las exportaciones, aunque su participación ya venía disminuyendo gradualmente. En 1970s se comezó a experimentar un cambio hacia las exportaciones de commodities, como el carbón, hierro, gas y oro y y fue a fines de 1980s que hubo un gran crecimiento de las exportaciones de servicios, siendo las de turismo y de negocios las mayores. En el 2009/10 las correspondientes al sector minero fueron alrededor de la mitad del ingreso en exportaciones, mientras que la de los bienes agrícolas fue sólo del 10%. El hecho de que durante los últimos 200 años las exportaciones de commodities reflejen al menos la mitad del ingreso por exportaciones indica la ventaja comparativa que tiene este país sobre estos productos, que en estos últimos años se vió reforzada por el aumento del precio de estos bienes. Cabe destacar que desde 1950 Australia experimenta un continuo déficit en su balanza comercial.

Por último, la tabla 1 contiene los momentos estadísticos que describen las propiedades de los agregados macroeconómicos ya descriptos.

Tabla 1 - Momentos estadísticos				
	Desvío	Desvío/DesvíoPBI	Correlación	Persistencia
PBI	0.052	1	1	0.86
C	0.054	0.97	0.74	0.9
G	0.061	1.2	0.68	0.88
I	0.085	2.1	0.57	0.66
XN	0.046	0.73	0.0046	0.94

3 El Modelo

Para reproducir las regularidades empíricas del ciclo de la economía australiana, se toma el modelo de una economía pequeña y abierta sujeto a shocks a los términos de intercambio, la tasa de interés y la productividad de los factores. Se considera el modelo de crecimiento neoclásico con bienes exportables, importables y un sector de bienes no transables. Además, se toma como supuesto la existencia de un continuo de hogares idénticos, lo cual permite la utilización de un hogar representativo para analizar las decisiones de maximización de utilidad. El mismo supuesto se aplica a las firmas con el problema de maximización de beneficios. Además, los hogares son dueños de los factores de producción y se considera que la tecnología es de rendimientos constantes a escala, lo que genera beneficios nulos para las firmas.

Tanto en el mercado de factores como en el mercado de producto se supone la existencia de mercados perfectamente competitivos. Asimismo, al ser una economía abierta, existe libre movilidad de capitales. De esta forma la consistencia agregada requiere igualdad entre la oferta y demanda de trabajo en cada período. El resto de las condiciones de consistencia agregada implican que en cada periodo debe haber igualdad entre la cantidad de producto (definido como la suma de ambos sectores) y la suma del consumo, inversión y balanza comercial.

Finalmente, se debe tener en cuenta que los bienes importados no son producidos en estado estacionario, por lo cual se tiene dos sectores de producción; es decir, estamos frente a una economía ricardiana dado que observamos especialización completa.

3.1 Firmas y teconologías

Las funciones de producción del sector exportable y del sector de bienes no transables están descriptas por las siguientes tecnologías que poseen rendimientos constantes a escala:

$$y_x\left(s^t\right) = z_x\left(s^t\right)\left(\left(k_n^x\left(s^{t-1}\right)\right)^{\omega}\left(k_m^x\left(s^{t-1}\right)\right)^{1-\omega}\right)^{\alpha_k^x} m_x^{\alpha_m^x}\left(s^t\right) l_x^{\alpha_l^x}\left(s^t\right)$$

$$y_{nt}\left(s^t\right) = z_n\left(s^t\right)\left(\left(k_n^n\left(s^{t-1}\right)\right)^{\omega}\left(k_m^n\left(s^{t-1}\right)\right)^{1-\omega}\right)^{\alpha_k^n} m_n^{\alpha_m^n}\left(s^t\right) l_n^{\alpha_l^n}\left(s^t\right)$$

Las firmas en ambos sectores reciben al comienzo de cada período un shock a la productividad de los factores. Cada una demanda capitales no transables (estructuras), capital importado (máquinas y equipamiento), inputs intermedios importados y trabajo.

3.2 Hogares

Se analizan las preferencias por el ocio y el consumo de bienes exportables (c_x), importables (c_m) y no transables (c_n) tanto para preferencias Cobb Douglas como Greenwood–Hercowitz–Huffman (GHH).

$$Cobb-Douglas: u\left(C\left(s^t\right), l\left(s^t\right)\right) = \frac{\left[C\left(s^t\right)^{\eta}\left(1-l\left(s^t\right)\right)^{1-\eta}\right]^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$GHH: u = C_t^{1.-\sigma} - A(l_t(s))^{\eta}$$

$$C\left(s^t\right) = \left[\mu^{\frac{1}{\theta}} c_T\left(s^t\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} c_n\left(s^t\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

Los hogares comercializan tanto bonos reales no contingentes de un período, $a(s^t)$, como bienes en los mercados internacionales. Además, acumulan capital no transable y capital importable para luego prestarle a las firmas en ambos sectores.

La función de inversión viene dada por:

$$i_i^j\left(s^t\right) = (1+\gamma) k_i^j\left(s^t\right) - (1-\delta_i) k_i^j\left(s^{t-1}\right) + k_i^j\left(s^{t-1}\right)\Phi_i\left(k_i^j\left(s^t\right), k_i^j\left(s^{t-1}\right)\right)$$

para $j = n, x$ y $i = m, n$. γ es la tasa de crecimiento exógena mientras que Φ_i representa el capital de stock, comunmente usando en la literatura de ciclos económicos para pequeñas economías abiertas, para prevenir el exceso de volatilidad para la inversión. Más específicamente se usará:

$$\Phi_i\left(k_i^j\left(s^t\right), k_i^j\left(s^{t-1}\right)\right) = \phi_i^j\left(\frac{k_i^j\left(s^t\right) - k_i^j\left(s^{t-1}\right)}{k_i^j\left(s^{t-1}\right)}\right)^2$$

Por otra parte, al tratarse de una economía es pequeña y abierta la tasa de interés se toma como dada del modo:

$$r\left(s^t\right) = r^*\left(s^t\right) + s\left(a\left(s^t\right)\right), \quad \text{en donde} \quad s\left(a\left(s^t\right)\right) = \phi_r\left(e^{\frac{\bar{a}-a\left(s^t\right)}{\bar{y}}} - 1\right)$$

siendo $r^*\left(s^t\right)$ la tasa de interés internacional y $s\left(a\left(s^t\right)\right)$ es una función de ajuste que asegura la estacionalidad del estado estacionario del modelo.

Otro supuesto que se debió tener en cuenta se relaciona con la posibilidad de concentrarnos la elasticidad Frisch asumiendo que la economía aquí presentada (con mercados incompletos dado que los individuos no están completamente asegurados) se comporta como una con mercados completos. Esto resulta fundamental para centrar el estudio en la elasticidad de Frisch que permite medir el efecto sustitución que un cambio en el salario genera sobre la oferta de trabajo manteniendo la Umg de la riqueza constante.

Esta distinción se realizó siguiendo a Lucas (1987) que demostró que para preferencias estándar (i.e. con un coeficiente de aversión al riesgo entre 1 y 5), en un contexto de agente representativo, las fluctuaciones a nivel agregado tienen un escaso impacto sobre el bienestar del agente representativo; es decir, la ganancia en bienestar de reducir las fluctuaciones transitorias en el consumo agregado (relativo a la tendencia) es muy pequeño. Se sabe además que el nivel de seguro que consiguen los agentes usando activos libre de riesgo depende del tamaño y persistencia de los shocks, la oferta neta de activos disponible para suavizar, y la amplitud de préstamos que se permite. Estas dos últimas son las dos caras de la misma moneda dado que lo que determina en última instancia la posibilidad de suavizar consumo de los individuos es qué tan lejos pueden moverse de la restricción de préstamo. De esta manera, siguiendo a Ljunggvist y Sargent (2004), darle a todos los agente un dólar extra de riqueza o relajar la restricción de ahorro en un dólar tiene el mismo efecto sobre las asignaciones.

Existen distintos canales para asegurarse: mercados financieros, decisiones de oferta de trabajo, la familia y el gobierno. En particular, en la presente investigación, se trata de agentes homogéneos en una economía con shocks agregados y donde los agentes cuentan con 3 de estos mecanismos de financiamiento: además de la posibilidad de endeudarse a través del bono, se puede considerar nuestra economía como un conjunto de familias dentro de la cual tienen lugar diversas transferencias. Asimismo, la flexibilidad en el mercado de trabajo que permite a los individuos elegir el número de horas trabajadas presenta una serie de oportunidades para asegurarse. Sobre este último punto, los individuos pueden por ejemplo ajustar el número de horas que trabajan en respuesta a un cambio a su salario. Por lo tanto, proveer a los individuos con la posibilidad de ajustar el número de horas (mercado de trabajo flexible) los deja al menos débilmente mejor (Heatcote 2008). Es así como el supuesto de considerar a la economía como una de mercados completos no presenta mayores dificultades dado que de acuerdo con Lucas la ganancia en utilidad marginal es casi despreciable si se elimina todo riesgo, lo cual permite hacer el supuesto de utilidad marginal constante y centrar la investigación en la elasticidad de Frisch.

3.3 Asignaciones de equilibrio y precios

Dado las condiciones iniciales $\{a(0),\ k_n^x(0),\ k_n^n(0)\ ,\ k_m^x(0),\ k_m^n(0)\}$ y una secuencia de estados contigentes $\{p_x, r^*, z_x, z_n\}$, un equilibrio es una secuencia de asignaciones $\{c_x,\ c_m,\ c_n,\ l\ ,\ a,\ k_n^x,\ k_n^n,\ k_m^x,\ k_m^n,\ m_x,\ m_n,\ l_x,\ l_n\}$y precios $\{w,$ $p_n\}$ tal que (i) las asignaciones resuelven el problema de las firmas y los hogares, dado los precios de equilibrio, y (ii) los mercados se vacían.

Dado que se asume un equilibrio competitivo, se emplea el Primer Teorema del Bienestar y se llega al Óptimo de Pareto resolviendo el problema del planificador en vez de resolver la versión descentralizada del modelo. Luego se construye el índice de precios correspondientes a dichas asignaciones óptimas.

3.4 El modelo con tendencia

El problema del planificador, por lo tanto, consiste en elegir $\widetilde{c}_n$, $\widetilde{c}_x$, $\widetilde{c}_m$, l, l_x, l_n, $\widetilde{y}_x$, $\widetilde{y}_n$, $\widetilde{i}_n$, $\widetilde{i}_m$, $\widetilde{k}_n^x$, $\widetilde{k}_n^n$, $\widetilde{k}_m^x$, $\widetilde{k}_m^n$, $\widetilde{a}$ para maximizar:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S_t} \bar{\beta}^t \pi(s^t) u(\widetilde{C}(s^t), 1 - l(s^t))$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \widetilde{a}(s^{t-1})(1 + r(s^{t-1})) + p_x(s^t)\widetilde{y}_x(s^t) - \widetilde{a}(s^t) - p_x(s^t)\widetilde{c}_x(s^t) - \\ & - \widetilde{c}_m(s^t) - \widetilde{i}_m(s^t) - \widetilde{m}_x(s^t) - \widetilde{m}_n(s^t) \qquad (1) \\ 0 \leq\ & \lambda(s^t)\pi(s^t)[\widetilde{y}_n(s^t) - \widetilde{c}_n(s^t) - \widetilde{i}_n(s^t)] \qquad (2) \\ 0 \leq\ & \lambda(s^t)\pi(s^t)[l(s^t) - l_n(s^t) - l_x(s^t)] \qquad (3) \end{aligned}$$

siendo $\lambda(s^t)$, $p_n(s^t)$ y $w(s^t)$ los multiplicadores de lagrange de (1), (2) y (3), respectivamente.

Notar que $p_n(s^t)$ y $w(s^t)$ serán los precios de equilibrio que soporten las asignaciones pareto óptimas y $p_n(s^t)$ representa el precio relativo de los no transables con respecto a los transables, un proxy para el tipo de cambio real.

Al sacarle la tendencia del modelo de acuerdo a $x(s^t) = \widetilde{x}(s^t)(1+\gamma)^{-t}$, $k(s^{t-1}) = \widetilde{k}(s^{t-1})(1+\gamma)^{-t}$, $a(s^{t-1}) = \widetilde{a}(s^{t-1})(1+\gamma)^{-t}$ obtenemos el modelo sin tendencia.

3.5 El modelo sin tendencia

El problema del planificador consiste en elegir c_n, c_x, c_m, l, l_x, y_n, y_x, i_n, i_m, k_n^x, k, k_n^n, k_m^n, a para maximizar:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S_t} \left(\underbrace{\bar{\beta} (1+\gamma)^{(1-\sigma)\eta}}_{\beta} \right)^t \pi\left(s^t\right) u\left(C\left(s^t\right), l\left(s^t\right)\right)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & a\left(s^{t-1}\right)\left(1 + r\left(s^{t-1}\right)\right) + p_x\left(s^t\right)\ y_x\left(s^t\right) - (1+\gamma)\, a\left(s^t\right) - \\ & - p_x\left(s^t\right) c_x\left(s^t\right) - c_m\left(s^t\right) - i_m\left(s^t\right) - m_x\left(s^t\right) - m_n\left(s^t\right) \qquad (4) \\ 0 \leq\ & \lambda\left(s^t\right) \pi\left(s^t\right) \left[y_n\left(s^t\right) - c_n\left(s^t\right) - i_n\left(s^t\right)\right] \qquad (5) \\ 0 \leq\ & \lambda\left(s^t\right) \pi\left(s^t\right) \left[l\left(s^t\right) - l_n\left(s^t\right) - l_x\left(s^t\right)\right], \qquad (6) \end{aligned}$$

siendo, nuevamente, $\lambda(s^t)$, $p_n(s^t)$ y $w(s^t)$ los multiplicadores de (1), (2) y (3) respectivamente.

Las ecuaciones relevantes para resolver el modelo son:

$$u\left(C\left(s^t\right), l\left(s^t\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
y_x(s^t) &= z_x(s^t)((k_n^x(s^{t-1}))^w (k_m^x(s^{t-1}))^{1-w})^{\alpha_k^x} m_x^{\alpha_m^x}(s^t) l_x^{\alpha_l^x}(s^t) \\
y_{nt}(s^t) &= z((k_n^n(s^{t-1})^w (k_m^n(s^{t-1}))^{1-w})^{\alpha_k^n} m_n^{\alpha_m^n}(s^t) l_n^{\alpha_l^n}(s^t)
\end{aligned}$$

$$C = \left[\mu^{\frac{1}{\theta}} (c_x^{\varepsilon}(s^t) c_m^{1-\varepsilon}(s^t))^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} c_n(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}\frac{\theta}{\theta-1}}\right]$$

$$\begin{aligned}
i_m^n(s^t) &= (1+\gamma)k_m^n(s^t) - (1-\delta_m^n)k_m^n(s^{t-1}) + k_m^n(s^{t-1})\phi_m^n(k_m^n(s^t), k_m^n(s^{t-1})) \\
i_n^n(s^t) &= (1+\gamma)k_n^n(s^t) - (1-\delta_n^n)k_n^n(s^{t-1}) + k_n^n(s^{t-1})\phi_n^n(k_n^n(s^t), k_n^n(s^{t-1})) \\
i_m^x(s^t) &= (1+\gamma)k_m^x(s^t) - (1-\delta_m^x)k_m^x(s^{t-1}) + k_m^x(s^{t-1})\phi_m^x(k_m^x(s^t), k_m^x(s^{t-1})) \\
i_n^x(s^t) &= (1+\gamma)k_n^x(s^t) - (1-\delta_n^x)k_n^x(s^{t-1}) + k_n^x(s^{t-1})\phi_n^x(k_n^x(s^t), k_n^x(s^{t-1}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_i^j(k_i^j(s^t), k_i^j(s^{t-1})) &= \phi_i \left(\frac{k_i^j(s^t) - k_i^j(s^{t-1})}{k_i^j(s^{t-1})}\right)^2 \\
r(s^t) &= r^*(s^t) + s(a(s^t)) \\
s(a(s^t)) &= \phi_r(e^{\left(\frac{\bar{a}-a(s(t))}{\overline{Y}}\right)} - 1)
\end{aligned}$$

3.6 Procesos de Shock

Se asume que esta pequeña economía enfrenta cuatro shocks distintos e independientes $(\varepsilon_{p_x}, \varepsilon_r, \varepsilon_{z_x}, \varepsilon_{z_n})$, donde los términos de intercambios (p_x), tasa de interés interes (r^*) y los factores de producción total en ambos sectores (z_x, z_n) siguen procesos autoregresivos de primer orden:

$$\begin{aligned}
p_x(s^t) &= p_x^{1-\rho_{p_x}} p_x(s^{t-1})^{\rho_{p_x}} e^{\varepsilon_{p_x}} \\
r^*(s^t) &= r^{*(1-\rho_r)} r^*(s^t)^{\rho_r} e^{\varepsilon_r} \\
z_x(s^t) &= z_x^{1-\rho_{z_x}} z_x(s^t)^{\rho_{z_x}} e^{\varepsilon_{z_x}} \\
z_n(s^t) &= z_n^{1-\rho_{z_x}} z_n(s^t)^{\rho_{z_n}} e^{\varepsilon_{z_n}}
\end{aligned}$$

En especial, es de interés entender el rol de factores externos en los ciclos económicos, representado en el modelo por los términos de intercambio y los cambios a la tasa de interés.

3.7 Preferencias Cobb-Douglas

3.7.1 Condiciones de primer orden

Consumo Las condiciones de primer orden para c_n,c_x y c_m son:

$$\begin{aligned}
\{c_n\} \quad &: \quad \eta\beta^t U^{-\sigma}\left(\frac{(1-l(s^t))}{C(s^t)}\right)^{1-\eta}\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_n} = \lambda\left(s^t\right)p_{nt} \\
\{c_x\} \quad &: \quad \eta\beta^t U^{-\sigma}\left(\frac{(1-l(s^t))}{C(s^t)}\right)^{1-\eta}\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial C_T}{\partial c_x} = \lambda\left(s^t\right)p_{xt} \\
\{c_m\} \quad &: \quad \eta\beta^t U^{-\sigma}\left(\frac{(1-l(s^t))}{C(s^t)}\right)^{1-\eta}\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial C_T}{\partial cm} = \lambda\left(s^t\right)
\end{aligned}$$

en donde :

$$U(s^t) = C(s^t)^\eta(1-l(s^t))^{(1-\eta)}$$

$$C = [\mu^{\frac{1}{\theta}}(c_x^{\varepsilon}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t))^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}}c_n(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

Usando la última expresión para substituir $\lambda\left(s^t\right)$ en las dos primeras, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_n} &= \frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial C_T}{\partial c_m}p_{nt} \\
(1-\mu)^{(\frac{1}{\theta})}(\frac{C}{c_n})^{\frac{1}{\theta}} &= \mu^{(\frac{1}{\theta})}(1-\xi)(\frac{c_x}{c_m})^{\xi}(\frac{C}{c_{m^{1-\xi}}c_x^{1-\xi}})^{\frac{1}{\theta}}p_{nt} \\
\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial C_T}{\partial c_x} &= \frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial C_T}{\partial c_m}p_{xt} \\
c_{m^{1-\varepsilon}c_x^{\varepsilon-1}}\mu^{\frac{1}{\theta}}\xi(\frac{C}{c_m^{1-\varepsilon}c_x^{\varepsilon}})\frac{1}{\theta} &= \mu^{(\frac{1}{\theta})}(1-\xi)(\frac{c_x}{c_m})^{\xi}(\frac{C}{c_{m^{1-\xi}}c_x^{1-\xi}})^{\frac{1}{\theta}}p_{xt}
\end{aligned}$$

$$c_m^{\xi(\theta-1)+1} = \frac{\mu}{1-\mu}c_n(1-\xi)^\theta c_x^{\xi(\theta-1)}p_{nt}^\theta \tag{7}$$

$$c_m\frac{\xi}{1-\xi} = c_x p_{xt} \tag{8}$$

Expresiones útiles para el consumo:
Se definen p_{Tt} y P_T como:

$$\begin{aligned}
p_{Tt} &\equiv \frac{p_{xt}c_{xt}+p_{mt}c_{mt}}{c_{Tt}} \\
P_T &\equiv \frac{p_{nt}c_{nt}+p_{xt}c_{xt}+p_{mt}c_{mt}}{C_t} = \frac{p_{Tt}c_{Tt}+p_{nt}c_{nt}}{C_t}
\end{aligned}$$

Multiplicando cada ecuación por c_n, c_x, c_m y sumando productos:

$$\eta\beta^t U^{-\sigma}\left(\frac{(1-l(s^t))}{C(s^t)}\right)^{1-\eta}\left[\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_n}c_n + \frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_X}c_x + \frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_m}c_m\right] = \lambda\left(s^t\right)[p_n c_n + p_x c_{xt} + c_{mt}]$$

$$\eta\beta^t U^{-\sigma}\left(\frac{(1-l(s^t))}{C(s^t)}\right)^{1-\eta}\left[\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_n}c_n+\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_X}c_x+\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_m}c_m\right]=\lambda\left(s^t\right)P_tC_t$$

Usando el teorema de Euler, $\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_n}c_n+\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_X}c_x+\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_m}c_m=C_t$

junto a las ecuaciones previas, se obtiene una ecuación para el multiplicador:

$$\begin{aligned}\lambda\left(s^t\right)P_t &= \eta\beta^t(C(s^t)^\eta(1-l(s^t))^{1-\eta})^{-\sigma}\left(\frac{(1-l((s^t))}{C(s^t)}\right)^{1-\eta}\\ \lambda\left(s^t\right) &= \frac{\eta\beta^t(C(s^t)^\eta(1-l(s^t))^{1-\eta})^{1-\sigma}}{P(s^t)C(s^t)}=\beta^t\eta\frac{U(s^t)^{1-\sigma}}{P(s^t)C(s^t)}\end{aligned}$$

Reemplazando el multiplicador en las CPOS:

$$\begin{aligned}P_t\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_n(s^t)} &= p_{nt}\\ P_t\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T(s^t)}\frac{\partial c_T(s^t)}{\partial c_x(s^t)} &= p_{xt}\\ P_t\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T(s^t)}\frac{\partial c_T(s^t)}{\partial c_m(s^t)} &= 1\end{aligned}$$

Se puede reescribir las CPO como:

$$c_{nt}=(1-\mu)\left(\frac{P_T}{p_{nt}}\right)^\theta C_t \tag{9}$$

$$c_{xt}=\xi\left(\frac{P_{Tt}}{p_{xt}}\right)^\theta c_T \tag{10}$$

$$c_{mt}=(1-\xi)\left(\frac{P_{Tt}}{p_{mt}}\right)^\theta c_T \tag{11}$$

$$c_T=\mu\left(\frac{P_T}{p_{Tt}}\right)^\theta C_t \tag{12}$$

Sustituyendo las expresiones por c_i en las definiciones de P_T y p_T, se obtiene los siguientes índices:

$$P_T=[\mu p_{Tt}^{1-\theta}+(1-\mu)p_{nt}^{1-\theta}]^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{13}$$

$$p_{Tt}=\frac{pxt^\xi}{\xi^\xi}\frac{p_{mt}^{1-\xi}}{(1-\xi)^{(1-\xi)}} \tag{14}$$

Nota: Las ecuaciones (10), (11) y (12) no son independientes. Multiplicando cada una por una constante (p_i) y sumandolas, se llega a la definición de Pt. De manera alternativa, conociendo dos consumos, el tercero sale de la definición de P. Escribiendo c_n y c_x como funciones de c_m obtenemos las CPO de arriba.

Trabajo

Oferta de trabajo

La CPO es:

$$\beta^t \pi(s^t) \frac{\partial u(C(s^t), l((s^t))}{\partial l(s^t)} + \lambda\left(s^t\right)(s^t)\pi(s^t)w(s^t) = 0$$

Usando que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(C(s^t), l((s^t))}{\partial l(s^t)} &= -(1-\eta)[C(s^t)^\eta (1-l(s^t))^{1-\eta}]^{-\sigma} C(s^t)^\eta (1-l(s^t))^{-\eta} \\
\lambda\left(s^t\right) &= \left[\eta\beta^t (C(s^t)^\eta (1-l(s^t))^{1-\eta})^{-\sigma} \left(\frac{(1-l(s^t))}{C(s^t)}\right)^{1-\eta}\right] \frac{1}{P(s^t)}
\end{aligned}$$

y resolviendo para $l(s^t)$ se obtiene una expresión para la oferta de trabajo:

$$l(s^t) = 1 - \frac{1-\eta}{\eta} C(s^t) \frac{P(s^t)}{w(s^t)} \tag{15}$$

Demanda de trabajo

Las CPOs para el trabajo en cada sector son $w(s^t) = p_x(s^t)\dfrac{\partial y_x}{\partial l_x}$ y $w(s^t) = p_n(s^t)\dfrac{\partial y_n}{\partial l_n}$,tal que:

$$w(s^t) l_x(s^t) = \alpha_l^x p_x(s^t) y_x(s^t) \tag{16}$$

$$w(s^t) l_n = \alpha_l^n p_n(s^t) y_n(s^t) \tag{17}$$

Insumos intermedios importados

$$m_x = \alpha_m^x p_x(s^t) y_x(s^t) \tag{18}$$

$$m_n = \alpha_m^x p_n(s^t) y_n(s^t) \tag{19}$$

Bonos

La CPO para los bonos es:

$$\begin{aligned}
\lambda\left(s^t\right)\pi(s^t)(1+\gamma) &= \left(1+r(s^t)+a(s^t)\frac{\partial(1+r(a_t(s^t))}{\partial a_t(s^t)}\right)\sum_{s^{t+1}/s^t}\lambda\left(s^{t+1}\right)\pi(s^t,s_{t+1}) \\
\beta^t\eta(1-\sigma)(1+\gamma) &= \left(1+r(s^t)-\frac{a(s^t)}{\bar{y}}(s(s^t)+\phi_r)\right)\sum_{st+1}\pi\left(s^{t+1}\middle|\, s^t\right)\beta^{t+1}\eta(1-\sigma)\left(\frac{\dfrac{u(s^{t+1})}{P(s^{t+1})C(s^{t+1})}}{\dfrac{u(s^t)}{P(s^t)C(s^t)}}\right) \\
\frac{u(s^t)}{C(s^t)} &= \frac{\beta}{(1+\gamma)}\sum_{st+1}\pi\left(s^{t+1}\middle|\, s^t\right)\frac{u(s^{t+1})}{C(s^{t+1})}\left(1+r(s^t)-\frac{a(s^t)}{y}(s(s^t)+\phi_r)\right)\frac{P(s^{t+1})}{P(s^t)}
\end{aligned}$$

Resulta útil escribir esto como:

$$(1+\gamma)=E_t\left[\beta\frac{u(s^{t+1})}{u(s^t)}\frac{C(s^{t+1})}{C(s^t)}\frac{P(s^t)}{P(s^{t+1})}R(s^t)\right] \tag{20}$$

en donde,

$$M(s^{t+1})=\beta\frac{u(s^{t+1})}{u(s^t)}\frac{C(s^{t+1})}{C(s^t)}\frac{P(s^t)}{P(s^{t+1})}$$

$$R(s^t)=1+r(s^t)-\frac{a(s^t)}{y}(s(s^t)+\phi_r) \tag{21}$$

Nota:

$$\frac{\partial(1+r(a_t(s^t)))}{\partial a_t(s^t)}=\partial\phi_r\frac{(e^{\frac{b-a}{\bar{y}}}-1)}{\partial a}=-\frac{1}{y}\phi_r e^{-\dfrac{1}{y}(a-b)}$$

$$\begin{aligned}
a(s^t)\frac{\partial(1+r(a_t(s^t)))}{\partial a_t(s^t)} &= -\frac{a(s^t)}{y}\phi_r e^{\dfrac{(\bar{a}-a(s^t))}{\bar{y}}} = \\
&= -\frac{a(s^t)}{y}\left[s(s^t)-\phi_r e^{\dfrac{(\bar{a}-a(s^t))}{\bar{y}}}+\phi_r(e^{\frac{b-a}{\bar{y}}}-1)\right]=-\frac{a(s^t)}{y}(s(s^t)+\phi_r)
\end{aligned}$$

$$\lambda\left(s^t\right)=\beta^t\eta(1-\sigma)\frac{u(s^t)}{P(s^t)C(s^t)}$$

Stock de capital Las CPO para los 4 stocks de capital son:

$$\begin{aligned}
\{k_m^n\}: 1+\gamma+2\phi_m^n\frac{((k_m^n(s^t)-k_m^n(s^{t-1}))}{k_m^n(s^{t-1})} &= E\left[M(s^{t+1})1-\left(\delta_m^n+\alpha_k^n(1-w)\frac{p_x(s^{t+1})y_n(s^{t+1})}{k_m^n(s^t)}\right)\right] \\
1+\gamma+2\phi_m^n\frac{((k_m^n(s^t)-k_m^n(s^{t-1}))}{k_m^n(s^{t-1})} &= -E\left[M(s^{t+1})\phi_m^n\left(1-\left(\frac{k_m^n(s^{t-1})}{k_m^n(s^t)}\right)^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\{k_n^x\}: 1{+}\gamma{+}2\phi_n^x\frac{((k_n^x(s^t)-k_n^x(s^{t-1}))}{k_n^x(s^{t-1})}=E\left[M(s^{t+1})\frac{p_n(s^{t+1})}{p_n(s^t)}\left(1-\delta_n^x+\alpha_k^x w\frac{p_x(s^{t+1})y_x(s^{t+1})}{p_n(s^{t+1})k_n^x(s^t)}\right)\right]$$

$$1{+}\gamma{+}2\phi_n^x\frac{((k_n^x(s^t)-k_n^x(s^{t-1}))}{k_n^x(s^{t-1})} \quad =-E\left[M(s^{t+1})\frac{p_n(s^{t+1})}{p_n(s^t)}\phi_m^x\left(1-\frac{k_m^x(s^{t-1})}{k_m^x(s^t)}\right)^2\right] \tag{23}$$

$$\{k_n^n\}: 1+\gamma+2\phi_n^n\frac{((k_n^n(s^t)-k_n^n(s^{t-1}))}{k_n^n(s^{t-1})}=E\left[M(s^{t+1})(1-\delta_n^n+\alpha_k^n w\frac{y_n(s^{t+1})}{k_n^n(s^t)})\right]$$

$$1+\gamma+2\phi_n^n\frac{((k_n^n(s^t)-k_n^n(s^{t-1}))}{k_n^n(s^{t-1})} \quad =-E\left[M(s^{t+1})\phi_n^n\left(1-\frac{k_n^n(s^{t-1})}{k_n^n(s^t)}\right)^2\right] \tag{24}$$

Nota sobre la derivada del costo de ajuste:

$$\frac{\partial\left(\phi\frac{((x-y)^2)}{y}\right)}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\phi(x^2-y^2)=-\phi\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

Estado estacionario de las variables

Capital y precio de los bienes no transables en estado estacionario

Las CPO de k, m y l en estado estacionario son un sistema de 7 ecuaciones y

7 incógnitas, $\log p_n$, $\log \frac{k_n^x}{l_x}$, $\log \frac{k_m^x}{l_x}$, $\log \frac{m_x}{l_x}$, $\log \frac{k_n^n}{l_n}$, $\log \frac{k_m^n}{l_n}$ y $\log \frac{m_n}{l_n}$.

$$p_x \left(\frac{\alpha_k^x (1-\omega) z_x \left(\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)^{\omega} \left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^x} \left(\frac{m_x}{l_x}\right)^{\alpha_m^x}}{\frac{k_m^x}{l_x}} \right) = \frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_m^x$$

$$p_x \left(\frac{\alpha_k^x \omega z_x \left(\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)^{\omega} \left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_m^x}}{\frac{k_n^x}{l_x}} \right) = p_n \left(\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_n^x \right)$$

$$p_x \left(\frac{\alpha_m^x z_x \left(\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)^{\omega} \left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^x} \left(\frac{m_x}{l_x}\right)^{\alpha_m^x}}{\frac{m_x}{l_x}} \right) = 1$$

$$\alpha_k^n (1-\omega) p_n z_n \left(\frac{\left(\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)^{\omega} \left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^n} \left(\frac{m_n}{l_n}\right)^{\alpha_m^n}}{\frac{k_n^n}{l_n}} \right) = \frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_m^n$$

$$\alpha_k^n \omega z_n \left(\frac{\left(\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)^{w} \left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^n} \left(\frac{m_n}{l_n}\right)^{\alpha_m^n}}{\frac{k_n^n}{l_n}} \right) = \frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_n^n$$

$$p_n \alpha_m^n z_n \left(\frac{\left(\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)^{\omega} \left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^n} \left(\frac{m_n}{l_n}\right)^{\alpha_m^n}}{\frac{m_n}{l_n}} \right) = 1$$

$$p_x \alpha_l^x z_x \left(\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)^{\omega} \left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^x} \left(\frac{m_x}{l_x}\right)^{\alpha_m^x} = p_n \alpha_l^n z_n \left(\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)^{\omega} \left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^n} \left(\frac{m_n}{l_n}\right)^{\alpha_m^n}$$

Tomando logaritmos se obtiene el sistema:

$$\alpha_k^x\omega\log\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)+(\alpha_k^x(1-\omega)-1)\log\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)+\alpha_m^x\log\left(\frac{m_x}{l_x}\right)=\log\left(\frac{\frac{1+\gamma}{\beta}-1+\delta_m^x}{p_x\alpha_k^x(1-w)z_x}\right)$$

$$(\alpha_k^x\omega-1)\log\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)+(\alpha_k^x(1-\omega)-1)\log\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)+\alpha_m^x\log\left(\frac{m_x}{l_x}\right)-\log p_n=\log\left(\frac{\frac{1+\gamma}{\beta}-1+\delta_m^x}{p_x\alpha_k^x w z_x}\right)$$

$$\alpha_k^x\omega\log\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)+\alpha_k^x(1-\omega)\log\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)+(\alpha_m^x-1)\log\left(\frac{m_x}{l_x}\right)=\log\left(\frac{1}{p_x\alpha_m^x z_x}\right)$$

$$\alpha_k^n\omega\log\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)+(\alpha_k^n(1-\omega)-1)\log\left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)+\alpha_m^n\log\left(\frac{m_n}{l_n}\right)+\log p_n=\log\left(\frac{\frac{1+\gamma}{\beta}-1+\delta_m^n}{\alpha_k^n(1-w)z_n}\right)$$

$$(\alpha_k^n\omega-1)\log\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)+\alpha_k^n(1-\omega)\log\left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)+\alpha_m^n\log\left(\frac{m_n}{l_n}\right)=\log\left(\frac{\frac{1+\gamma}{\beta}-1+\delta_n^n}{w\alpha_k^n z_n}\right)$$

$$\alpha_k^n\omega\log\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)+\alpha_k^n(1-\omega)\log\left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)+(\alpha_m^n-1)\log\left(\frac{m_n}{l_n}\right)+\log p_n=\log\left(\frac{1}{\alpha_m^n z_n}\right)$$

$$\begin{aligned}&\alpha_k^x\omega\log\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)+(\alpha_k^x(1-\omega))\log\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)+\alpha_m^x\log\left(\frac{m_x}{l_x}\right)-\alpha_k^n\omega\log\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)-(\alpha_k\\ -\alpha_m^n\log\left(\frac{m_n}{l_n}\right)-\log p_n \quad = \quad &\log\left(\frac{\alpha_l^n z_n}{p_x\alpha_l^x z_x}\right)\end{aligned}$$

y la solución es $e^{\log(\xi)}$, en donde $\log(\xi)$ es el vector:

$$\begin{bmatrix}\log\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)\\ \log\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)\\ \log\left(\frac{m_x}{l_x}\right)\\ \log\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)\\ \log\left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)\\ \log\left(\frac{m_n}{l_n}\right)\\ \log(p_n)\end{bmatrix}=SS\_A*SS\_C \tag{25}$$

Siendo:

$$SS\_A = \begin{bmatrix} \alpha_k^x \omega & \alpha_k^x(1-\omega)-1 & \alpha_m^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_k^x\omega - 1 & \alpha_k^x(1-\omega) & \alpha_m^x & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha_k^x\omega & \alpha_k^x(1-\omega) & \alpha_m^x - 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k^n w & \alpha_k^n(1-\omega)-1 & \alpha_m^n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k^n w - 1 & \alpha_k^n(1-\omega) & \alpha_m^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k^n w & \alpha_k^n(1-\omega) & (\alpha_m^n - 1) & 1 \\ \alpha_k^x\omega & \alpha_k^x(1-\omega) & \alpha_m^x & -\alpha_k^n w & -\alpha_k^n(1-\omega) & -\alpha_m^n & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

y siendo, también,

$$SS\_C = \begin{bmatrix} \log\left(\dfrac{\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_m^x}{p_x\alpha_k^x(1-w)z_x}\right) \\ \log\left(\dfrac{\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_m^x}{p_x\alpha_k^x w z_x}\right) \\ \log\left(\dfrac{1}{p_x\alpha_m^x z_x}\right) \\ \log\left(\dfrac{\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_m^n}{\alpha_k^n(1-w)z_n}\right) \\ \log\left(\dfrac{1}{\alpha_m^n z_n}\right) \\ \log\left(\dfrac{1}{\alpha_m^x z_x}\right) \\ \log\left(\dfrac{\alpha_l^n z_n}{p_x\alpha_l^x z_x}\right) \end{bmatrix} \tag{26}$$

Entonces, los salarios de equilibrio y output por trabajador vienen dados por:

$$\frac{y_n}{l_n} = z_n\left(\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)^w\left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)^{1-w}\right)^{\alpha_k^n}\left(\frac{m_m}{l_n}\right)^{\alpha_m^n} \tag{27}$$

$$\frac{y_x}{l_x} = z_x\left(\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)^w\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)^{1-w}\right)^{\alpha_k^x}\left(\frac{m_x}{l_x}\right)^{\alpha_m^x} \tag{28}$$

$$\bar{w} = p_x\alpha_l^x\frac{y_x}{l_x} = p_n\alpha_l^n\frac{y_n}{l_n} \tag{29}$$

Indices de precios

$$p_T = \frac{p_x^\xi}{\xi^\xi}\frac{p_m^{1-\xi}}{(1-\xi)^{(1-\xi)}} \tag{30}$$

$$P = \left[\mu p_T^{1-\theta} + (1-\mu)p_n^{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{31}$$

Consumo y trabajo El consumo viene dado por:

$$\begin{aligned}
C &= (1-\bar{l})\frac{w}{P}\frac{\eta}{1-\eta} \\
c_n &= (1-\mu)\left(\frac{P}{p_n}\right)^{\theta} C \\
c_T &= \mu\left(\frac{P}{p_T}\right)^{\theta} C \\
c_x &= \xi\frac{P_T}{p_x}C_T \\
c_m &= (1-\xi)\frac{P_T}{p_m}C_T
\end{aligned}$$

Se reemplaza C en c_n y c_T:

$$\begin{aligned}
c_n &= (1-\mu)\left(\frac{P}{p_n}\right)^{\theta}\frac{w}{P}\frac{\eta}{1-\eta}(1-\bar{l}) \\
c_T &= \mu\left(\frac{P}{p_T}\right)^{\theta}\frac{w}{P}\frac{\eta}{1-\eta}(1-\bar{l})
\end{aligned}$$

Usando la restricción presupuestaria, la condición de factibilidad para el mercado de los no transables y la restricción del mercado de trabajo, se obtiene el siguiente sistema linear para l^x y l^n:

$$0 = (\frac{y_n}{l_n})l_n - \left((\delta_n^n+\gamma)\frac{k_n^n}{l_n}l_n + (\delta_n^x+\gamma)\frac{k_n^x}{l^x}l^x\right) - c_n$$

$$0 = (r-\gamma)(\frac{\bar{a}}{\bar{y}})y + p_x(\frac{y_x}{l_x})l_x - p_T c_T - \left((\delta_m^n+\gamma)\frac{k_m^n}{l_n}+\frac{m_m}{l_n}\right)l_n - \left((\delta_m^x+\gamma)\frac{k_m^x}{l_x}+\frac{m_x}{l_x}\right)l_x$$

$$0 = l_x + l_n - l$$

Reemplazando c_n en la primer ecuación se halla

$$0 = \left(\frac{y_n}{l_n}\right)l_n - \left((\delta_n^n+\gamma)\frac{k_n^n}{l_n}l_n + (\delta_n^x+\gamma)\frac{k_n^x}{l^x}l^x\right) - (1-\mu)\left(\frac{P}{p_n}\right)^{\theta}\frac{w}{P}\frac{\eta}{1-\eta}(1-\bar{l})$$

Se reemplaza c_T en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& (r-\gamma)\left(\frac{\bar{a}}{\bar{y}}\right)\left(p_x(\frac{y_x}{l_x})l_x + p_n(\frac{y_n}{l_n})l_n\right) + p_x(\frac{y_x}{l_x})l_x - p_T\mu\left(\frac{P}{p_T}\right)^{\theta}\frac{w}{P}\frac{\eta}{1-\eta}(1-\bar{l}) \\
& - \left((\delta_m^n+\gamma)\frac{k_m^n}{l_n}+\frac{m_n}{l_n}\right)l_n - \left((\delta_m^x+\gamma)\frac{k_m^x}{l_x}+\frac{m_x}{l_x}\right)l_x
\end{aligned}$$

$$0 = l_x + l_n - l$$

Luego,

$$LA = \left[\begin{array}{ccc} & \frac{y_n}{l_n} - (\delta_n^n + \gamma)\frac{k_n^n}{l_n} & -(\delta_n^x + \gamma)\frac{k_n^x}{l_x} \\ (r-\gamma)\left(\frac{\bar{a}}{\bar{y}}\right) & p_n \left(\frac{y_n}{l_n}\right) l_n - \left((\delta_m^n + \gamma)\frac{k_m^n}{l_n} + \frac{m_n}{l_n}\right) & \left(1 + (r-\gamma))\left(\frac{\bar{a}}{\bar{y}}\right)\right) p_x \left(\frac{y_x}{l_x} - \frac{m_x}{l_x}\right) - \left((\delta_m^n + \right. \\ & 1 & 1 \end{array} \right.$$

$$LC = \begin{bmatrix} (1-\mu)\left(\frac{P}{p_n}\right)^{\theta} \frac{w}{P}\frac{\eta}{1-\eta} \\ p_T \mu \left(\frac{P}{p_T}\right)^{\theta} \frac{w}{P}\frac{\eta}{1-\eta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_n \\ l_x \\ l \end{bmatrix} = LA^{-1} LC$$

Las otras variables ya han sido calculadas y el cociente $\frac{\bar{a}}{\bar{y}}$ se obtuvo a partir de los datos. Luego al tener l^x y l^n se puede calcular:

$$\begin{aligned} y_x &= \left(\frac{y_x}{l_x}\right) l_x \\ y_n &= \left(\frac{y_n}{l_n}\right) l_n \\ Y &= p_n y_n + p_x y_x \end{aligned}$$

en donde Y es la producción, gdp es y.

Las inversiones vienen dadas por:

$$\begin{aligned} i_m^n &= k_m^n (\delta_m^n + \gamma) \\ i_n^n &= k_n^n (\delta_n^n + \gamma) \\ i_m^x &= k_m^x (\delta_m^x + \gamma) \\ i_n^x &= k_n^x (\delta_n^x + \gamma) \\ inv &= p_n (i_n^n + i_n^x) + (i_m^n + i_m^x) \end{aligned}$$

3.8 Preferencias GHH

La funcion de utilidad bajo GHH es $u = C_t^{1-\sigma} - A_t (l_t(s))^{\eta}$ con $A_t = A\ (1+\gamma)^t$ donde A_t puede pensarse como la productividad de la producción doméstica. Cabe destacar que la especificación GHH no tiene efectos riqueza.

3.8.1 Condiciones de primer orden

Consumo Las condiciones de primer orden para c_n, c_x y c_m son:

$$\{c_n\} : \frac{\theta}{\theta-1}\left[\mu^{\frac{1}{\theta}}(c_x^{\varepsilon}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t))^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}}c_n(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}}(1-\mu)^{\frac{1}{\theta}}\frac{\theta-1}{\theta}c_n(s^t)^{\frac{-1}{\theta}} = \lambda\left(s^t\right)p_n\left(s^t\right)$$

$$\{c_x\} \quad : \quad \frac{\theta}{\theta-1}\left[\mu^{\frac{1}{\theta}}(c_x^{\varepsilon}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t))^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}}c_n(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}}(\mu)^{\frac{1}{\theta}}$$
$$\frac{\theta-1}{\theta}\left(c_x^{\varepsilon}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t)\right)^{\frac{-1}{\theta}}\varepsilon c_x^{\varepsilon-1}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t) \quad = \quad \lambda\left(s^t\right)p_x(s^t) \tag{32}$$

$$\{c_m\} \quad : \quad \frac{\theta}{\theta-1}\left[\mu^{\frac{1}{\theta}}(c_x^{\varepsilon}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t))^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}}c_n(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}}(\mu$$
$$\frac{\theta-1}{\theta}\left(c_x^{\varepsilon}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t)\right)^{\frac{-1}{\theta}}(1-\varepsilon)c_m^{-\varepsilon}(s^t)c_x^{\varepsilon}(s^t) \quad = \quad \lambda\left(s^t\right)p_m(s^t) \qquad (3$$

Reemplazando la tercer condición en la segunda, se obtiene:

$$c_m(s^t)\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = c_x(s^t)p_{xt} \tag{34}$$

Reacomodando (37) se llega a:

$$c_m(s^t)\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{c_x(s_t)} = p_{xt}$$

Reemplazando dicha expresión en la $(\{cn\}/\{cx\})$ se obtiene:

$$\frac{1}{\varepsilon c_x^{\varepsilon-1}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t)})\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\frac{c_n(s^t)}{c_x^{\varepsilon}(s^t)c_m^{1-\varepsilon}(s^t)}\right)^{-\frac{1}{\theta}} = \frac{\lambda\left(s^t\right)p_n(s^t)}{\lambda\left(s^t\right)p_x(s^t)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}c_x(s^t)^{(1-\varepsilon)+(\frac{\varepsilon}{\theta})}c_m(s^t)^{(\varepsilon-1)+(1-\frac{1}{\theta})}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{\frac{1}{\theta}}c_n(s^t)^{-\frac{1}{\theta}} = p_n(s^t)\frac{c_x(s^t)}{c_m(s^t)}\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$c_x(s^t)^{\varepsilon(\frac{1}{\theta}-1)}c_m(s^t)^{\varepsilon(1-\frac{1}{\theta})+\frac{1}{\theta}}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{\frac{1}{\theta}}c_n(s^t)^{-\frac{1}{\theta}} = p_n(s^t)(1-\varepsilon)$$

$$c_x(s^t)^{\varepsilon(\frac{1-\theta}{\theta})}c_m(s^t)^{\varepsilon(\frac{\theta-1}{\theta})+\frac{1}{\theta}}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{\frac{1}{\theta}}c_n(s^t)^{-\frac{1}{\theta}} = p_n(s^t)(1-\varepsilon)$$

$$c_x(s^t)^{\varepsilon(1-\theta)}c_m(s^t)^{\varepsilon(\theta-1)+1}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)c_n(s^t)^{-1} = p_n(s^t)^{\theta}(1-\varepsilon)^{\theta}$$

$$c_m(s^t)^{\varepsilon(\theta-1)+1} = p_n(s^t)^{\theta}(1-\varepsilon)^{\theta}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)c_n(s^t)c_x(s^t)^{\varepsilon(\theta-1)} \tag{35}$$

Expresiones útiles para el consumo:

Nuevamente, se definen P_T y p_{Tt} como:

$$\begin{aligned} p_{Tt} &\equiv \frac{p_{xt}c_{xt} + c_{mt}}{C_{Tt}} \\ P_T &\equiv \frac{p_n c_{nt} + p_x c_{xt} + p_{mt}c_{mt}}{C_t} = \frac{p_{Tt}c_{Tt} + p_{nt}c_{nt}}{C_t} \end{aligned}$$

Multiplicando las ecuaciones por c_n, c_x, c_m respectivamente y sumando productos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_n}c_n + \frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_X}c_x + \frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_m}c_m\right] &= \lambda\left(s^t\right)\left[p_n c_n + p_x c_{xt} + c_{mt}\right] \\ &= \lambda\left(s^t\right)P_t C_t \end{aligned}$$

Usando el teorema de Euler, $\frac{\partial C(s^t)}{\partial c_n}c_n + \frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_X}c_x + \frac{\partial C(s^t)}{\partial c_T}\frac{\partial c_T}{\partial c_m}c_m = C_t$, se llega a:

$$C_t = \lambda\left(s^t\right)P_t C_t$$

$$\frac{1}{P_t} = \lambda\left(s^t\right)$$

Reemplazando el multiplicador en las CPOS, se obtiene:

$$C_t(s^t)^{\frac{1}{\theta-1}}(1-\mu)^{\frac{1}{\theta}}c_n(s^t)^{-\frac{1}{\theta}} = \frac{1}{p_t(s^t)}p_n(s^t)$$

$$c_n(s^t)^{-1} = \left(\frac{p_n(s^t)}{p_t(s^t)}\right)^{\theta} C_t(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}}(1-\mu)^{-1}$$

$$c_n(s^t) = \left(\frac{p_t(s^t)}{p_n(s^t)}\right)^{\theta} C_t(s^t)(1-\mu) \tag{36}$$

De la definición de $p_{Tt} = \frac{p_{xt(s^t)}c_{xt(s^t)} + c_{mt}(s^t)}{C_{Tt}(s^t)}$ se despeja s $c_{mt}(s^t)$ y se obtiene $p_{Tt}(s^t)C_{Tt}(s^t) - p_{xt(s^t)}c_{xt(s^t)} = c_{mt(s^t)}$. Combinandolo con la ecuación (5) se encuentra:

$$\left[p_{Tt}(s^t)C_{Tt}(s^t) - p_{xt}(s^t)c_{xt}(s^t)\right]\frac{\xi}{1-\xi}\frac{1}{p_{xt}(s^t)} = c_x(s^t)$$

$$c_x(s^t)\left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) = \frac{p_{Tt}(s^t)}{p_{xt}(s^t)}c_{Tt}(s^t)\frac{\xi}{1-\xi}$$

$$c_x(s^t) = \frac{p_{Tt}(s^t)}{p_{xt}(s^t)}c_{Tt}(s^t)\xi \tag{37}$$

Luego,

$$C_t(s^t)^{\frac{1}{\theta-1}} \mu^{\frac{1}{\theta}} c_{Tt}(s^t)^{-\frac{1}{\theta}} \xi c_x(s^t)^{-1} c_{Tt}(s^t) = \frac{1}{p_{Tt}(s^t)} p_{xt}(s^t)$$

$$c_x(s^t) = C_t(s^t)^{\frac{1}{\theta-1}} \frac{p_{Tt}(s^t)}{p_{xt}(s^t)}$$

$$c_x(s^t) = \frac{\xi}{p_{xt}(s^t)} c_{Tt}(s^t) C_t(s^t) p_{Tt}(s^t) \mu^{\frac{1}{\theta}} c_{Tt}(s^t)^{\frac{1}{\theta}}$$

Reemplazando la expresión hallada para $c_x(s^t)$ en $c_m(s^t) = c_x(s^t) p_{xt} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

$$c_m(s^t) = \frac{p_{Tt}(s^t)}{p_{xt}(s^t)} c_{Tt}(s^t) \xi p_{xt}(s^t) \frac{1-\xi}{\xi}$$

$$c_m(s^t) = p_{Tt}(s^t) c_{Tt}(s^t)(1-\xi) \tag{38}$$

Se obtiene luego c_{Tt} :

$$\frac{P_t(s^t)}{p_{xt}(s^t)} c_{Tt}(s^t) \xi = \frac{\xi}{p_{xt}(s^t)} c_{Tt}(s^t) C_t(s^t) p_{Tt}(s^t) \mu^{\frac{1}{\theta}} c_{Tt}(s^t)^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$\frac{P_t(s^t)}{p_{xt}(s^t)}^{-\theta} C_t(s^t) \mu^{-\frac{1}{\theta}} = c_{Tt}(s^t)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$c_T(s^t) = \mu \frac{P_t(s^t)}{p_{Tt}(s^t)}^{\theta} C_t(s^t) \tag{39}$$

Sustituyendo las expresiones por c_i en las definiciones de P_T y p_T, se hallan los siguientes índices:

$$P_T = \left[\mu P_{Tt}^{1-\theta} + (1-\mu) P_{nt}^{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{40}$$

$$\frac{P_t(s^t)}{p_{xt}(s^t)}^{-\theta} C_t(s^t) \mu^{-\frac{1}{\theta}} = c_{Tt}(s^t)^{\frac{1}{\theta}} \tag{41}$$

Nota: Ecuaciones (10), (11) y (12) no son independientes. Multiplicando cada una por una constante (p_i) y sumandolas, se obtiene la definición de Pt. De manera alternativa, conociendo dos consumos, el tercer sale de la definición de P. Escribiendo c_n y c_x como funciones de c_m se llegan a las CPOs de arriba.

Trabajo

Oferta de trabajo La CPO para el trabajo es:

$$A\eta l(s^t)^{\eta-1} = w(s^t)\lambda\left(s^t\right)$$

Usando que $\lambda\left(s^t\right) = \dfrac{1}{Pt}$ se obtiene:

$$l(s^t) = \left(\frac{w(s^t)}{Pt}\frac{1}{A\eta}\right)^{\dfrac{1}{\eta-1}} \tag{42}$$

Demanda de trabajo Las CPOs para el trabajo en cada sector son: $w(s^t) = p_x(s^t)\dfrac{\partial y_x}{\partial l_x}$ y $w(s^t) = p_n(s^t)\dfrac{\partial y_n}{\partial l_n}$,que resulta en:

$$w(s^t)l_x(s^t) = \alpha_l^x p_x(s^t)y_x(s^t) \tag{43}$$

$$w(s^t)l_n = \alpha_l^n p_n(s^t)y_n(s^t) \tag{44}$$

Insumos intermedios importados

$$m_x = \alpha_m^x p_x(s^t)y_x(s^t) \tag{45}$$

$$m_n = \alpha_m^x p_n(s^t)y_n(s^t) \tag{46}$$

Bonos La CPO para los bonos es:

$$\begin{aligned}
\lambda\left(s^t\right)\pi(s^t)(1+\gamma) &= \left(1 + r(s^t) + a(s^t)\frac{\partial(1+r(a_t(s^t)))}{\partial a_t(s^t)}\right)\sum_{s^{t+1}/s^t}\lambda\left(s^{t+1}\right)\pi(s^t, s_{t+1}) \\
\frac{1}{P(s^t)}(1+\gamma) &= \left(1 + r(s^t) + a(s^t)\frac{\partial(1+r(a_t(s^t)))}{\partial a_t(s^t)}\right)\sum_{s^{t+1}/s^t}\frac{1}{P_{t+1}(s^t)}\pi(s^t, s_{t+1}) \\
1 &= \frac{1}{(1+\gamma)}\sum_{s^{t+1}/s^t}\pi(s^t, s_{t+1})\left(1 + r(s^t) - \frac{a(s^t)}{\bar{y}}(s(s^t)+\phi_r)\right)\frac{P(s^t)}{P(s^{t+1})}
\end{aligned}$$

Es útil escribir esto como:

$$(1+\gamma) = E_t\left[\frac{P(s^t)}{P(s^{t+1})}R(s^t)]\right] \tag{47}$$

$$M(s^{t+1}) = \frac{P(s^t)}{P(s^{t+1})}$$

$$R(s^t) = 1 + r(s^t) - \frac{a(s^t)}{y}(s(s^t)+\phi_r) \tag{48}$$

Stock de capital

Las CPO para los 4 stocks de capital son:

$$\{k_m^x\}: 1+\gamma+2\phi_m^x \frac{((k_m^x(s^t)-k_m^x(s^{t-1}))}{k_m^x(s^{t-1})} = E\left[M(s^{t+1})(1-\delta_m^x+\alpha_k^x(1-w)\frac{p_x(s^{t+1})y_x(s^{t+1})}{k_m^x(s^t)})\right] \tag{49}$$

$$1+\gamma+2\phi_m^x \frac{((k_m^x(s^t)-k_m^x(s^{t-1}))}{k_m^x(s^{t-1})} = -E\left[M(s^{t+1})\phi_m^x\left(1-\left(\frac{k_m^x(s^{t-1})}{k_m^x(s^t)}\right)^2\right)\right]$$

$$\{k_m^n\}: 1+\gamma+2\phi_m^n \frac{((k_m^n(s^t)-k_m^n(s^{t-1}))}{k_m^n(s^{t-1})} = E\left[M(s^{t+1})(1-\delta_m^n+\alpha_k^n(1-w)\frac{p_x(s^{t+1})y_n(s^{t+1})}{k_m^n(s^t)})\right] \tag{50}$$

$$1+\gamma+2\phi_m^n \frac{((k_m^n(s^t)-k_m^n(s^{t-1}))}{k_m^n(s^{t-1})} = -E\left[M(s^{t+1})\phi_m^n\left(1-\left(\frac{k_m^n(s^{t-1})}{k_m^n(s^t)}\right)^2\right)\right]$$

$$\{k_n^x\}: 1+\gamma+2\phi_n^x \frac{((k_n^x(s^t)-k_n^x(s^{t-1}))}{k_n^x(s^{t-1})} = E\left[M(s^{t+1})\frac{p_n(s^{t+1})}{p_n(s^t)}\left(1-\delta_n^x+\alpha_k^x w\frac{p_x(s^{t+1})y_x(s^{t+1})}{p_n(s^{t+1})k_n^x(s^t)}\right)\right] \tag{51}$$

$$1+\gamma+2\phi_n^x \frac{((k_n^x(s^t)-k_n^x(s^{t-1}))}{k_n^x(s^{t-1})} = -E\left[M(s^{t+1})\frac{p_n(s^{t+1})}{p_n(s^t)}\phi_m^x\left(1-\left(\frac{k_m^x(s^{t-1})}{k_m^x(s^t)}\right)^2\right)\right]$$

$$\{k_n^n\}: 1+\gamma+2\phi_n^n \frac{((k_n^n(s^t)-k_n^n(s^{t-1}))}{k_n^n(s^{t-1})} = E\left[M(s^{t+1})\left(1-\delta_n^n+\alpha_k^n w\frac{y_n(s^{t+1})}{k_n^n(s^t)}\right)\right] \tag{52}$$

$$1+\gamma+2\phi_n^n \frac{((k_n^n(s^t)-k_n^n(s^{t-1}))}{k_n^n(s^{t-1})} = -\left[EM(s^{t+1})\phi_n^n\left(1-\left(\frac{k_n^n(s^{t-1})}{k_n^n(s^t)}\right)^2\right)\right]$$

Nota sobre la derivada del costo de ajuste:

$$\frac{\partial\left(\phi\frac{((x-y)^2)}{y}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\phi(x^2-y^2) = -\phi\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

3.8.2 Estado estacionario de las variables

Capital y precio de n en estado estacionario Las CPO de k, m y l en estado estacionario son sistemas de 7 ecuaciones y 7 incógnitas, $\log p_n$, $\log \frac{k_n^x}{l_x}$, $\log \frac{k_m^x}{l_x}$, $\log \frac{m_x}{l_x}$, $\log \frac{k_n^n}{l_n}$, $\log \frac{k_m^n}{l_n}$ y $\log \frac{m_n}{l_n}$.

$$1+\gamma = 1-\delta_m^x + \alpha_k^x(1-w)\frac{p_x y_x}{k_m^x}$$

$$\gamma+\delta_m^x = p_x\left(\frac{\alpha_k^x(1-w)z_x\left(\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)^{\omega}\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)^{1-\omega}\right)^{\alpha_k^x}\left(\frac{m_x}{l_x}\right)^{\alpha_m^x}}{k_m^x}\right)$$

$$\gamma+\delta_m^x = \left(\frac{p_x\alpha_k^x(1-w)z_x\left(\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)^{\omega}\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)^{1-\omega}\right)^{\alpha_k^x}\left(\frac{m_x}{l_x}\right)^{\alpha_m^x}}{\frac{k_m^x}{l_x}}\right)$$

$$1+\gamma = 1-\delta_n^x + \alpha_k^x w\frac{p_x y_x}{p_n k_n^x}$$

$$p_x\left(\frac{\alpha_k^x w z_x((k_n^x)^{\omega}(k_m^x)^{1-\omega})^{\alpha_m^x} m_x^{\alpha_m^x} l_x^{\alpha_l^x}}{k_n^x}\right) = p_n(\gamma+\delta_n^x)$$

$$p_x\left(\frac{\alpha_k^x w z_x\left(\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right)^{\omega}\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right)^{1-\omega}\right)^{\alpha_k^x}\left(\frac{m_x}{l_x}\right)^{\alpha_m^x}}{\frac{m_x}{l_x}}\right) = p_n(\gamma+\delta_n^x)$$

$$m_x = \alpha_m^x p_x y_x$$

$$m_x = p_x\alpha_m^x z_x((k_n^x)^{\omega}(k_m^x)^{1-\omega})^{\alpha_k^x} m_x^{\alpha_m^x} l_x^{\alpha_l^x}$$

$$p_x \left(\frac{\alpha_m^x z_x \left(\left(\frac{k_n^x}{l_x} \right)^{\omega} \left(\frac{k_m^x}{l_x} \right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^x} \left(\frac{m_x}{l_x} \right)^{\alpha_m^x}}{\frac{m_x}{l_x}} \right) = 1$$

$$1+\gamma = 1-\delta_m^n + \alpha_k^n (1-w) \frac{p_n y_n}{k_m^n}$$

$$p_n \left(\frac{\alpha_k^n (1-w) z_n ((k_n^n)^{\omega} (k_m^n)^{1-\omega})^{\alpha_k^n} m_n^{\alpha_m^n} l_x^{\alpha_l^n}}{k_m^n} \right) = (\gamma + \delta_m^n)$$

$$\alpha_k^n (1-\omega) p_n z_n \left(\frac{\left(\left(\frac{k_n^n}{l_n} \right)^{\omega} \left(\frac{k_m^n}{l_n} \right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^n} \left(\frac{m_n}{l_n} \right)^{\alpha_m^n}}{\frac{k_m^n}{l_n}} \right) = \gamma + \delta_m^n$$

$$1+\gamma = 1-\delta_n^n + \alpha_k^n p_n w \frac{y_n}{k_n^n}$$

$$\alpha_k^n \omega z_n \left(\frac{((k_n^n)^w (k_m^n)^{1-\omega})^{\alpha_k^n} (m_n)^{\alpha_m^n}}{k_n^n} \right) = \gamma + \delta_n^n$$

$$\alpha_k^n \omega z_n p_n \left(\frac{\left(\left(\frac{k_n^n}{l_n} \right)^{\omega} \left(\frac{k_m^n}{l_n} \right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^n} \left(\frac{m_n}{l_n} \right)^{\alpha_m^n}}{\frac{k_n^n}{l_n}} \right) = \gamma + \delta_n^n$$

$$m_n = \alpha_m^n p_n y_n$$

$$m_n = \alpha_m^n p_n z_x ((k_n^x)^{\omega} (k_m^x)^{1-\omega})^{\alpha_k^x} m_x^{\alpha_m^x} l_x^{\alpha_l^x}$$

$$p_n \alpha_m^n z_n \left(\frac{\left(\left(\frac{k_n^n}{l_n} \right)^{\omega} \left(\frac{k_m^n}{l_n} \right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^n} \left(\frac{m_n}{l_n} \right)^{\alpha_m^n}}{\frac{m_n}{l_n}} \right) = 1$$

$$\alpha_l^x \frac{y_x p_x}{l_x} = \alpha_l^n \frac{p_n y_n}{l_n}$$

$$p_x \alpha_l^x z_x \left(\left(\frac{k_n^x}{l_x} \right)^{\omega} \left(\frac{k_m^x}{l_x} \right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^x} \left(\frac{m_x}{l_x} \right)^{\alpha_m^x} = p_n \alpha_l^n z_n \left(\left(\frac{k_n^n}{l_n} \right)^{\omega} \left(\frac{k_m^n}{l_n} \right)^{1-\omega} \right)^{\alpha_k^n} \left(\frac{m_n}{l_n} \right)^{\alpha_m^n}$$

Tomando logaritmos se obtiene el sistema:

$$\alpha_k^x \omega \log \left(\frac{k_n^x}{l_x} \right) + (\alpha_k^x (1-\omega) - 1) \log \left(\frac{k_m^x}{l_x} \right) + \alpha_m^x \log \left(\frac{m_x}{l_x} \right) = \log \left(\frac{\gamma + \delta_m^x}{p_x \alpha_k^x (1-w) z_x} \right)$$

$$(\alpha_k^x \omega - 1) \log \left(\frac{k_n^x}{l_x} \right) + (\alpha_k^x (1-\omega)) \log \left(\frac{k_m^x}{l_x} \right) + \alpha_m^x \left(\frac{m_x}{l_x} \right) - \log p_n = \log \left(\frac{\gamma + \delta_n^x}{p_x \alpha_k^x w z_x} \right)$$

$$\alpha_k^x \omega \log \left(\frac{k_n^x}{l_x} \right) + \alpha_k^x (1-\omega) \log \left(\frac{k_m^x}{l_x} \right) + (\alpha_m^x - 1) \log \left(\frac{m_x}{l_x} \right) = \log \left(\frac{1}{p_x \alpha_m^x z_x} \right)$$

$$\alpha_k^n \omega \log \left(\frac{k_n^n}{l_n} \right) + (\alpha_k^n (1-\omega) - 1) \log \left(\frac{k_m^n}{l_n} \right) + \alpha_m^n \log \left(\frac{m_n}{l_n} \right) + \log p_n = \log \left(\frac{\gamma + \delta_m^n}{\alpha_k^n (1-w) z_n} \right)$$

$$(\alpha_k^n \omega - 1) \log \left(\frac{k_n^n}{l_n} \right) + \alpha_k^n (1-\omega) \log \left(\frac{k_m^n}{l_n} \right) + \alpha_m^n \log \left(\frac{m_n}{l_n} \right) = \log \left(\frac{\gamma + \delta_n^n}{w \alpha_k^n z_n} \right)$$

$$\alpha_k^n \omega \log \left(\frac{k_n^n}{l_n} \right) + \alpha_k^n (1-\omega) \log \left(\frac{k_m^n}{l_n} \right) + (\alpha_m^n - 1) \log \left(\frac{m_n}{l_n} \right) + \log p_n = \log \left(\frac{1}{\alpha_m^n z_n} \right)$$

$$\alpha_k^x \omega \log \left(\frac{k_n^x}{l_x} \right) + (\alpha_k^x (1-\omega)) \log \left(\frac{k_m^x}{l_x} \right) + \alpha_m^x \log \left(\frac{m_x}{l_x} \right) = \log \left(\frac{1}{\alpha_m^x z_x} \right)$$

$$\alpha_k^n \omega \log \left(\frac{k_n^n}{l_n} \right) - (\alpha_k^n (1-\omega) \log \left(\frac{k_m^n}{l_n} \right) - \alpha_m^n \log \left(\frac{m_n}{l_n} \right) - \log p_n = \log \left(\frac{\alpha_l^n z_n}{p_x \alpha_l^x z_x} \right)$$

Se tiene así

$$\begin{bmatrix} \log\left(\frac{k_n^x}{l_x}\right) \\ \log\left(\frac{k_m^x}{l_x}\right) \\ \log\left(\frac{m_x}{l_x}\right) \\ \log\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right) \\ \log\left(\frac{k_m^n}{l_n}\right) \\ \log\left(\frac{m_n}{l_n}\right) \\ \log\left(p_n\right) \end{bmatrix} = SS\_A * SS\_C \tag{53}$$

Siendo:

$$SS\_A = \begin{bmatrix} \alpha_k^x\omega & \alpha_k^x(1-\omega)-1 & \alpha_m^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_k^x\omega-1 & \alpha_k^x(1-\omega) & \alpha_m^x & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha_k^x\omega & \alpha_k^x(1-\omega) & \alpha_m^x-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k^n w & \alpha_k^n(1-\omega)-1 & \alpha_m^n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k^n w-1 & \alpha_k^n(1-\omega) & \alpha_m^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k^n w & \alpha_k^n(1-\omega) & (\alpha_m^n-1) & 1 \\ \alpha_k^x\omega & \alpha_k^x(1-\omega) & \alpha_m^x & -\alpha_k^n w & -\alpha_k^n(1-\omega) & -\alpha_m^n & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

y siendo, también,

$$SS\_C = \begin{bmatrix} \log\left(\frac{\gamma+\delta_m^x}{p_x\alpha_k^x(1-w)z_x}\right) \\ \log\left(\frac{\gamma+\delta_n^x}{p_x\alpha_k^x w z_x}\right) \\ \log\left(\frac{1}{p_x\alpha_m^x z_x}\right) \\ \log\left(\frac{\gamma+\delta_m^n}{\alpha_k^n(1-w)z_n}\right) \\ \log\left(\frac{\alpha_l^n z_n}{p_x\alpha_l^x z_x}\right) \\ \log\left(\frac{1}{\alpha_m^n z_n}\right) \\ \log\left(\frac{\gamma+\delta_n^n}{p_n w\alpha_k^n z_n}\right) \end{bmatrix}$$

Entonces, los salarios de equilibrio y output por trabajador vienen dadon por:

$$\frac{y_n}{l_n} = z_n\left(\left(\frac{k_n^n}{l_n}\right)^w\left(\frac{k_m^n}{l_n}\right)^{1-w}\right)^{\alpha_k^n}\left(\frac{m_m}{l_n}\right)^{\alpha_m^n} \tag{54}$$

$$\frac{y_x}{l_x} = z_x \left(\left(\frac{k_n^x}{l_x} \right)^w \left(\frac{k_m^x}{l_x} \right)^{1-w} \right)^{\alpha_k^x} \left(\frac{m_x}{l_x} \right)^{\alpha_m^x} \tag{55}$$

$$\bar{w} = p_x \alpha_l^x \frac{y_x}{l_x} = p_n \alpha_l^n \frac{y_n}{l_n} \tag{56}$$

Indices de precios

$$p_T = \frac{p_x^\xi}{\xi^\xi} \frac{p_m^{1-\xi}}{(1-\xi)^{(1-\xi)}} \tag{57}$$

$$P_t = \frac{p_t^\theta p_n^{1-\theta} C(1-\mu) + p_T c_T \varepsilon + (1-\varepsilon) p_T c_T}{C} = p_T^{1-\theta} \mu p_t^\theta C + (1-\varepsilon) p_T c_T$$

$$P_t = \frac{p_t^\theta p_n^{1-\theta} C(1-\mu) + p_T^\theta C p_T^{1-\theta} \mu}{C}$$

$$P_t C = p_t^\theta C \left[(1-\mu) p_n^{1-\theta} + p_T^\theta p_T^{1-\theta} \mu \right]$$

$$P_t = p_T^\theta \left[\mu p_T^{1-\theta} + (1-\mu) p_n^{1-\theta} \right] \tag{58}$$

Consumo y trabajo El consumo viene dado por:

$$\begin{aligned} c_n &= (1-\mu) \left(\frac{P}{p_n} \right)^\theta C \\ c_T &= \mu \left(\frac{P}{p_T} \right)^\theta C \\ c_x &= \xi \frac{P_T}{p_x} C_T \\ c_m &= (1-\xi) \frac{P_T}{p_m} C_T \end{aligned}$$

Usando la restricción presupuestaria, la condición de factibilidad para el mercado de los no transables y la restricción del mercado de trabajo, se obtiene el siguiente sistema linear para l^x y l^n:

$$0 = (\frac{y_n}{l_n}) l_n - \left((\delta_n^n + \gamma) \frac{k_n^n}{l_n} l_n + (\delta_n^x + \gamma) \frac{k_n^x}{l^x} l^x \right) - c_n$$

$$0 = (r-\gamma)(\frac{\bar{a}}{\bar{y}}) y + p_x (\frac{y_x}{l_x}) l_x - p_T c_T - \left((\delta_m^n + \gamma) \frac{k_m^n}{l_n} + \frac{m_m}{l_n} \right) l_n - \left((\delta_m^x + \gamma) \frac{k_m^x}{l_x} + \frac{m_x}{l_x} \right) l_x$$

$$0 = l_x + l_n - l$$

Dado que l queda determinado por la oferta de trabajo, se reescriben las ecuaciones en un sistema tal que las restricciones dependen de l_n, l_x, y C

$$0 = \left(\frac{y_n}{l_n}\right) l_n - \left((\delta_n^n + \gamma)\frac{k_n^n}{l_n} l_n + (\delta_n^x + \gamma)\frac{k_n^x}{l^x} l^x\right) - (1-\mu)\left(\frac{P}{p_n}\right)^{\theta} C$$

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; (r-\gamma)\left(\frac{\bar{a}}{\bar{y}}\right)\left(p_x(\frac{y_x}{l_x})l_x + p_n(\frac{y_n}{l_n})l_n\right) + p_x(\frac{y_x}{l_x})l_x - p_T\mu\left(\frac{P}{p_T}\right)^{\theta} C \\ &\quad - \left((\delta_m^n + \gamma)\frac{k_m^n}{l_n} + \frac{m_n}{l_n}\right) l_n - \left((\delta_m^x + \gamma)\frac{k_m^x}{l_x} + \frac{m_x}{l_x}\right) l_x \end{aligned}$$

$$0 = l_x + l_n - \left(\frac{w}{P}\frac{1}{A\eta}\right)^{\dfrac{1}{\eta - 1}}$$

Luego,

$$LA = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} \frac{y_n}{l_n} - (\delta_n^n + \gamma)\frac{k_n^n}{l_n} \end{array} & \begin{array}{c} -(\delta_n^x + \gamma)\frac{k_n^x}{l_x} \end{array} & \begin{array}{c} -(1-\mu)\left(\frac{P}{p_n}\right)^{\theta} \end{array} \\ \begin{array}{c} (r-\gamma)\left(\frac{\bar{a}}{\bar{y}}\right) \; p_n \; \left(\frac{y_n}{l_n}\right) l_n - \\ \left((\delta_m^n + \gamma)\frac{k_m^n}{l_n} + \frac{m_n}{l_n}\right) \end{array} & \begin{array}{c} \left(1 + (r-\gamma))\left(\frac{\bar{a}}{\bar{y}}\right)\right) p_x \left(\frac{y_x}{l_x}\right) - \\ \frac{m_x}{l_x} - \left((\delta_m^n + \gamma)\frac{k_m^x}{l_x}\right) \end{array} & \begin{array}{c} p_T\mu\left(\frac{P}{p_T}\right)^{\theta} \end{array} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$LC = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{w}{P}\frac{1}{A\eta}\right)^{\dfrac{1}{\eta - 1}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_n \\ l_x \\ C \end{bmatrix} = LA^{-1} LC$$

Las otras variables ya han sido calculadas y el cociente $\frac{\bar{a}}{\bar{y}}$ se obtuvo a partir de los datos. Luego al tener l^x y l^n se puede calcular:

$$\begin{aligned} y_x &= \left(\frac{y_x}{l_x}\right) l_x \\ y_n &= \left(\frac{y_n}{l_n}\right) l_n \\ Y &= p_n y_n + p_x y_x \end{aligned}$$

en donde Y es la producción, gdp es y.

Finalmente, las inversiones vienen dadas por:

$$
\begin{aligned}
i_m^n &= k_m^n(\delta_m^n + \gamma) \\
i_n^n &= k_n^n(\delta_n^n + \gamma) \\
i_m^x &= k_m^x(\delta_m^x + \gamma) \\
i_n^x &= k_n^x(\delta_n^x + \gamma) \\
inv &= p_n(i_n^n + i_n^x) + (i_m^n + i_m^x)
\end{aligned}
$$

4 Calibración

Con el objetivo de calibrar el modelo, se utiliza información de Australia para el período 1960-2015.

Los parámetros del modelo son:

γ : tasa de crecimiento
β : tasa de descuento
σ : sustitución intertemporal
μ : proporción de x en $c_x^{\varepsilon} c_m^{1-\varepsilon}$
θ : sustitución intratemporal $[\mu^{\frac{1}{\theta}} c_T^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} c_n^{\frac{\theta-1}{\theta}}]^{\frac{\theta-1}{\theta}}$
η : participación del consumo en $C(s^t)^{\eta}(1-l(s^t))^{1-\eta}$
ω : proporción de n en K
α_j^i : participación de j en y_i, $i = x, n \quad j = k, m, l$
δ_j^i :tasa de depreciación de k_i, $i = x, n \quad j = k, m, l$
ϕ_j^i : costo de ajuste, $i = x, n \quad j = k, m, l$

Los parámetros de las variables de estado exógenas ρ_p, $\rho_{r,}$ $\rho_{zx,}$ $\rho_{zn,}$ σ_{ε_p}, σ_{ε_r}, $\sigma_{\varepsilon_{zx}}$, $\sigma_{\varepsilon_{zn}}$ y sus valores se obtienen de la siguiente forma:

1. El valor neto de los activos se fija a $\dfrac{\overline{a}}{\overline{y}} = -0.14$, que es el nivel de deuda promedio en 1970. Desarrollo financiero global (deuda-reservas)/PBNT

2. La tasa de crecimiento promedio del PBI, γ, se calcula corriendo la regresión $\log y_t = c + \gamma$, donde y_t es el PBI real. La estimación de γ, con datos cuatrimestrales, para el período 1960-2015 es 0.008773 por lo que γ es $1.008773^4 - 1 = 0.0356$

	γ	Pop growth
1960-2014	0.03556	0.01363

3. Se determina $r^* = 0.02$ y $\phi_r = 0.01$ tal que $R = 1 + r^* + \phi_r \frac{\overline{a}}{\overline{y}} = 1 + 0.02 - 0.001 \times 0.014 = 1.0200$

4. $\beta = R^{-1}$

5. $\sigma = 2$ (Prescott)

6. Calibración de α_m. Se obtienen datos del Australian Bureau of Statistics y de Australian National Accounts. Se calibró α_m^i como:

$$\alpha_m^i = \frac{\text{Importaciones}}{\text{Producción bruta}}$$

y se obtuvo:

α_m^x	α_m^n
0.12	0.05

El sector transable (x) incluye minería, agricultura y manufactura. El sector no transable(n) incluye principalmente construcción, servicios (alojamiento, electricidad, entre otros, educación, comunicación, salud, transporte, entre otros).El α agregado es 0.07

7. Para la calibración de α_l^i se uso la matriz input-output de ABS y se obtuvo α_l^i siendo α_l^i= [share del ingreso laboral $\times \left(1 - \alpha_m^i\right)$]. Los shares del ingreso laboral se calculan en base a Experimental Estimates of Industry Multifactor Productivity, Australia: Detailed Productivity Estimates.

   La participación del trabajo en el sector transable es el peso promedio de las participaciones en los sectores transables, en donde los pesos son las participaciones en el valor agregado del mercado, tal como lo define ABS. El sector del mercado excluye propiedades y servicios económicos, administración gubernamental, defenza, educación, salud y servicios comunitarios, personal y otros servivios.

   La participación del capital se calcula residualmente: $\alpha_k^i = 1 - \alpha_l^i - \alpha_m^i$ para $i = x, n$

   Por lo tanto, las participaciones del trabajo y capital son:

	K	L	α_l^i
T	0.5	0.45	0.4
NT	0.35	0.62	0.6

8. Para el ratio de depreciación y capital-producto, el ABS posee tablas del stock de capital por industria y por tipo de asset. El ratio de capital-producto para el mercado transable de Australia es $K/Y = 3$. Se ignora la clasificación de industrias y se observó la maquinaria,equipamiento y construcción total (no solo viviendas). Estos dos items constituyen el 97% del K desde 1975. El promedio de los valores de K_N y K_T en K desde 1960 son 20% y 80% respectivamente. Se puede observar una tendencia suave de decrecimiento para K_T y crecimiento para K_N. Se asume que para el sector no transable la proporción de K_T y K_N es la misma. El ratio de depreciación para las maquinas y equipamiento es $\delta_T = 11.5\%$ y

el ratio de depreciación para la construcción es $\delta_N = 2.5\%$.

$$\frac{i_m/gdp}{\delta_m+\gamma} = \frac{0.07}{0.115+0.035} = \frac{k_m}{gdp} = 0.47$$
$$\frac{i_n/gdp}{\delta_n+\gamma} = \frac{0.20}{0.025+0.035} = \frac{k_m}{gdp} = 3.33$$

$$3.33 + 0.47 = 3.8$$
$$3.33/3.8 = 0.88$$

Si se atribuye parte de la inversión del gobierno a M&E se obtiene:

$$\frac{i_m/gdp}{\delta_m+\gamma} = \frac{0.1}{0.115+0.035} = \frac{k_m}{gdp} = 0.67$$
$$\frac{i_n/gdp}{\delta_n+\gamma} = \frac{0.17}{0.025+0.035} = \frac{p_n k_n}{gdp} = 2.83$$

$$2.83 + 0.67 = 3.5$$
$$2.83/3.5 = 0.81$$

Sumado las CPO para k_m^i y k_n^i en ambos sectores y diviendo las expresiones resultantes obtenemos se llega a una expresión para calibrar ω.

$$\frac{1}{\omega} = \frac{k_m^x}{p_n k_n^x}\frac{\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_m^x}{\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_n^x} + 1$$
$$\frac{1}{\omega} = \frac{\frac{i_m/gdp}{\delta_m+\gamma}}{\frac{i_n/gdp}{\delta_n+\gamma}}\frac{\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_m^x}{\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 + \delta_n^x} + 1$$

9. La participación de las importaciones en el consumo es:

$$1 - \xi = \frac{p_m c_m}{p_T c_T} = 0.62$$

en donde se calcula bienes importados usados para el consumo sobre el consumo de bienes; obtenido del Australian Bureau of Statistics.

10. La elasticidad θ se obtiene de Gonzalez-Rozada y Neumeyer (2003), $\theta = 0.4$

11. Para calibrar μ de la condición de primer orden tenemos $\mu = \frac{p_T c_T}{p_c}(\frac{p_T}{p})^{\theta-1}$. De acuerdo a los datos de la economía australiana, $\frac{p_T c_T}{p_c} = 0,36$. Se obtiene θ, y $\frac{p_T}{p}$ se encuentra a partir del estado estacionario del modelo

(Balassa-Samuelson).

$$\mu = \frac{p_T c_T}{Pc}\left(\frac{p_T}{p}\right)^{\theta-1} = 0.36\left(\frac{p_T}{p}\right)^{\theta-1}$$

$$\mu = 0.36\left(\frac{p_T}{\left[\mu {p_T}^{1-\theta} + (1-\mu)\,{p_n}^{1-\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}}\right)^{\theta-1}$$

$$\mu = 0.36\frac{p_T^{\theta-1}}{\mu {p_T}^{-1+\theta} + (1-\mu)\,{p_n}^{-1+\theta}}$$

$$\mu = 0.36\frac{1}{\mu + (1-\mu)\left(\frac{p_n}{p_T}\right)^{\theta-1}}$$

$$0.36 = \mu^2 + (1-\mu)\,\mu\left(\frac{p_n}{p_T}\right)^{\theta-1}$$

$$0 = \mu^2\left(1-\left(\frac{p_n}{p_T}\right)^{\theta-1}\right) + \mu\left(\frac{p_n}{p_T}\right)^{\theta-1} - 0.36$$

$$\mu = \frac{-\left(\frac{p_n}{p_T}\right)^{\theta-1} \pm \sqrt{2\left(\frac{p_n}{p_T}\right)^{\theta-1} - 1}}{2\left(1-\left(\frac{p_n}{p_T}\right)^{\theta-1}\right)} = 0,25$$

12. Los parámetros del costo de ajuste $\phi_{j,}^{i},\ i = x, n \quad j = k, m, l$ se fijan tal que $\phi_n^x = \phi_n^m$ y $\phi_m^x = \phi_m^m$ y se calibran tal que la volatilidad relativa de la inversión para cada tipo de inversión coincida con los datos:

	Inv NT	Inv T	GDP
SD	0.087607	0.154690	0.046074
Real SD	$\frac{0.087607}{0.046074} = 1.9$	$\frac{0.154690}{0.046074} = 3.4$	

Se usa el GDP a precios del estado estacionario para el cálculo.

13. Procesos exógenos

(a) Se calculan los TOT mediante la regresión: $\log tot = c + \rho_p \log tot(-1)$ y se obtiene:

Muestra cuatrimestral	ρ_p	σ_{ε_p}
1960-2014	0.98	0.03

Muestra Anual	ρ_p	σ_{ε_p}
1960-2015	0.92	0.12

(b) Como no se posee data para k por sector, se calibra z_i usando la regresión:

$$\log\frac{y_i}{l_i} = c + \rho_{z_i}\log\frac{y_i}{l_i}(-1)$$

	Transable		No transable	
Muestra (86-14)	ρ_z	σ_{ε_z}	ρ_z	σ_{ε_z}
	0.57 (3.36)	0.013	0.58 (2.34)	0.027

(c) Para la tasa internacional de interés, se computa la tasa real como una constante (bono anual del tesoro Estadounidense) menos la inflación actual medida por el deflactor del PBI (se toman promedios anuales para ambas variables). La regresión utilizada fue: $\log r = c + \rho_r \log r(-1)$ y se obtiene:

Muestra	ρ_r	σ_{ε_r}
47-06	0.83 (1.6)	0.29

(d) Se infiere los shocks a la productividad mediante el siguiente procedimiento. A continuación se muestra cómo calcular los shocks a la productividad en el modelo. El equilibrio se define mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t \\ 0 &= E_t[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t] \\ 0 &= Nz_t + \varepsilon_t; \quad E_t[\varepsilon_t] = z_{t+1} \end{aligned}$$

donde x_t son las variables de estado endógenas, y_t las variables de control y z_t las variables de estado exógenas. La solución a este sistema es de la forma:

$$\begin{aligned} x_t &= Px_{t-1} + Qz_t \\ y_t &= Rx_{t-1} + Szt \end{aligned}$$

Conociendo la secuencia de z_t y los valores de las variables de estado iniciales x_{t-1} se puede caracterizar toda la solución. En nuestro caso en particular, se conocen los shocks a p_t y r_t y los valores iniciales de x_t. Se sabe que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\overline{p}_x\overline{y}_x}{PBI_x}\widehat{y}_{xt} - \frac{\overline{m}_x}{PBI_x}\widehat{m}_{xt} \\ \frac{\overline{p}_n\overline{y}_n}{PBI_n}\widehat{y}_{nt} - \frac{\overline{m}_n}{PBI_n}\widehat{m}_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{p}_x\overline{y}_x}{PBI_x}R_{yx} - \frac{\overline{m}_x}{PBI_x}R_{mx} \\ \frac{\overline{p}_n\overline{y}_n}{PBI_n}R_{yn} - \frac{\overline{m}_n}{PBI_n}R_{mn} \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} \frac{\overline{p}_x\overline{y}_x}{PBI_x}S_{yx} - \frac{\overline{m}_x}{PBI_x}S_{mx} \\ \frac{\overline{p}_n\overline{y}_n}{PBI_n}S_{yn} - \frac{\overline{m}_n}{PBI_n}S_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ r_t \\ z_{xt} \\ z_{nt} \end{bmatrix}$$

donde R_{yi} S_{yi} , R_{mi} , $S_{mi,}$ son las columnas de las respectivas matrices correspondientes a yi o mi. Dado que se conoce la matriz de LHS de los datos, se puede definir $SSzz$ como las últimas dos columnas de

$$Sxn = \begin{bmatrix} \frac{\overline{\rho}_x\overline{y}_x}{PBI_x}S_{yx} - \frac{\overline{m}_x}{PBI_x}S_{mx} \\ \frac{\overline{\rho}_n\overline{y}_n}{PBI_n}S_{yn} - \frac{\overline{m}_n}{PBI_n}S_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SSzz & SSpr \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} SSzz^{-1}\begin{bmatrix}\widehat{PBI}_x\\ \widehat{PBI}_n\end{bmatrix} &= SSzz^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\overline{p}_x\overline{y}_x}{PBI_x}R_{yx}-\frac{\overline{m}_x}{PBI_x}R_{mx}\\ \frac{\overline{p}_n\overline{y}_n}{PBI_n}R_{yn}-\frac{\overline{m}_n}{PBI_n}R_{mn}\end{bmatrix}x_{t-1}+ \\ &+SSzz^{-1}SS_{pr}\begin{bmatrix}p_t\\ r_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z_{xt}\\ z_{nt}\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{59}$$

tal que

$$\begin{bmatrix}z_{xt}\\ z_{nt}\end{bmatrix} = SSzz^{-1}\begin{bmatrix}\widehat{PBI}_x\\ \widehat{PBI}_n\end{bmatrix} - SSzz^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\overline{p}_x\overline{y}_x}{PBI_x}R_{yx}-\frac{\overline{m}_x}{PBI_x}R_{mx}\\ \frac{\overline{p}_n\overline{y}_n}{PBI_n}R_{yn}-\frac{\overline{m}_n}{PBI_n}R_{mn}\end{bmatrix}x_{t-1} - SSzz^{-1}SS_{pr}\begin{bmatrix}p_t\\ r_t\end{bmatrix}$$

14. La elección de consumo-ocio, dada por η se calibra teniendo en cuenta la elasticidad de la oferta de trabajo:

$$\begin{aligned} Cobb-Douglas \quad &: \quad \varepsilon_L = -\left[\frac{1-lbar}{lbar}\right] \\ GHH \quad &: \quad \varepsilon_L = -\left[\frac{1}{\eta-1}\right] \end{aligned}$$

Como puede observarse, la elasticidad de Frisch depende del parámetro η, ya sea de manera directa (GHH) o indirecta (a través de lbar en las Cobb-Douglas). Por lo tanto, para poder estimar la elasticidad de la oferta de trabajo, se necesita estimar η. Usando el método de *"golden search"*, se realiza una serie de simulaciones teniendo en cuenta distintos rangos para el valor de η, con distinto grids, hasta encontrar el η que minimiza la distancia cuadrada entre el momento de los datos y el momento teórico del producto, del trabajo y del tipo de cambio real. Adicionalmente, se toma como criterio de elección, aquel η que mejor recree el desvío de estas variables. Esto pone de manifiesto el trade-off existente entre la elección de un η que minimice la suma de los desvíos al cuadrado, frente al que mejor replica los datos. El método de "golden search" reemplaza al Método Simulado de los Momentos (ver en McFadden, 1989).

5 Resultados

El desempeño del modelo se evalúa de diferentes formas. En primer lugar, s analiza el desempeño del modelo para reproducir los momentos de los datos, y se comparan con los resultados de los momentos teóricos obtenidos bajo GHH y Cobb-Douglas. Luego, de acuerdo a los resultados anteriores, se analizan las funciones de impulso-respuesta bajo aquellas preferencias que mejor recrean los momentos de los datos. En particular, se analiza rápidamente por escrito el comportamiento de las variables frente a los shocks en la productividad de los factores sin incluir los gráficos para luego centrar el estudio en el análisis de los factores externos. Sobre estos último se presenta un analisis detallado de las funciones de impulso-respuesta frente a shocks a los términos de intercambio y a la tasa de interés internacional, que son de nuestro interés. Luego, se analiza el desempeño del modelo para reproducir los momentos economía, comparándolos con los momentos teóricos cuando utiliza un vector de shocks aleatorios. Al mismo tiempo, se introduce el $\eta*$ obtenido, que minimiza los momentos de las variables de interés del modelo con los empíricos, dentro de la discusión sobre elasticidades.

5.1 Diferencias a raíz de las distintas funciones con preferencias para ocio-consumo

La diferencia principal en la forma en la que responde el modelo dependiendo del tipo de utilidad es la intensidad con la que esto pasa. En el caso de GHH, a falta de efecto ingreso, los efectos del shock son exclusivamente provocados por el efecto sustitución. En cambio, con Cobb Douglas, existe un efecto ingreso que contrarresta el sustitución provocando que la intensidad de la respuesta al shock sea menor que en el primer caso.

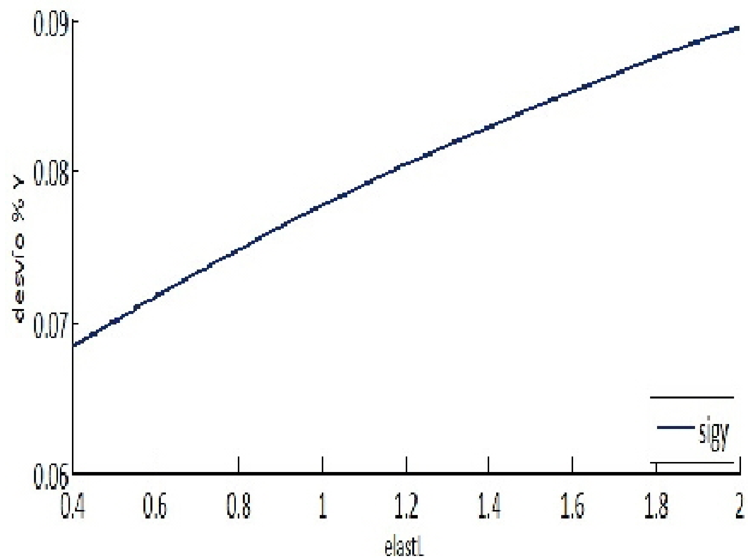
5.1.1 Segundos momentos bajo shocks aleatorios

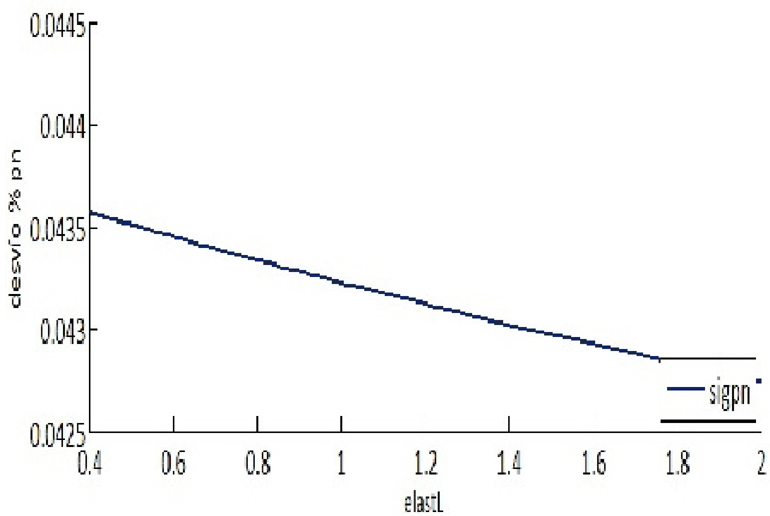
	σ_y	σ_q	σ_l
CD	0.0804	0.0717	0.0097
GHH	0.0695	$0,0458$	$0,0023$
$Datos$	0.0515	0.0690	0.0365

Se puede notar que el modelo replica, aunque no de manera perfecta, el desvío del producto y del trabajo. Sin embargo no se puede decir lo mismo para el trabajo, razón que se explica posteriormente. El η al que corresponden estos resultados Cobb-Douglas es $\eta = 0.3530$, que arroja una elasticidad de $\varepsilon_L = -1,8996$. Para el caso de GHH, los resultados de la trabla corresponden a un $\eta = 1.7$ que arroja una elasticidad de $\varepsilon_L = -1,4710$.

Por lo tanto, el modelo logra reproducir relativamente bien los ciclos pero hay un trade off entre acercarnos a los momentos de los datos, y obtener una elasticidad aceptada dentro de la literatura sobre todo para las preferencias GHH dado que con el valor de η que consideramos, la elasticidad es menor que la aceptada entre los macroeconomistas porque no tiene en cuenta el efecto ingreso, por lo tanto, las cantidades en el modelo ajustan menos que los precios, que deben realizar un ajuste mayor para justificar el cambio en el producto frente a los distintos shocks.

Antes de realizar el análisis de las funciones impulso-respuesta, se presenta el siguiente gráfico con el comportamiento del desvío del producto y el desvío del TCR respecto a la elasticidad de la oferta de trabajo. Para el caso del producto, se observa que el desvío aumenta a medida que aumenta la elasticidad de la oferta de trabajo debido a que cuanto mayor sea la reacción en la oferta laboral, más impacto va a tener sobre el producto para impulsar el ciclo. En el caso del TCR se puede observar que el desvío cae a medida que aumenta la elasticidad de la oferta de trabajo, esto se debe a que una mayor elasticidad frente a un shock hace que los salarios sean menores y el precio se mueva menos, por lo cual el desvío de pn es menor cuanto mayor es la elasticidad de la oferta de trabajo.





5.1.2 Análisis impulso-respuesta

En este apartado se analizan los shocks bajo preferencias GHH

Impulso-respuesta de un shock a la tecnología del sector transable y no transable

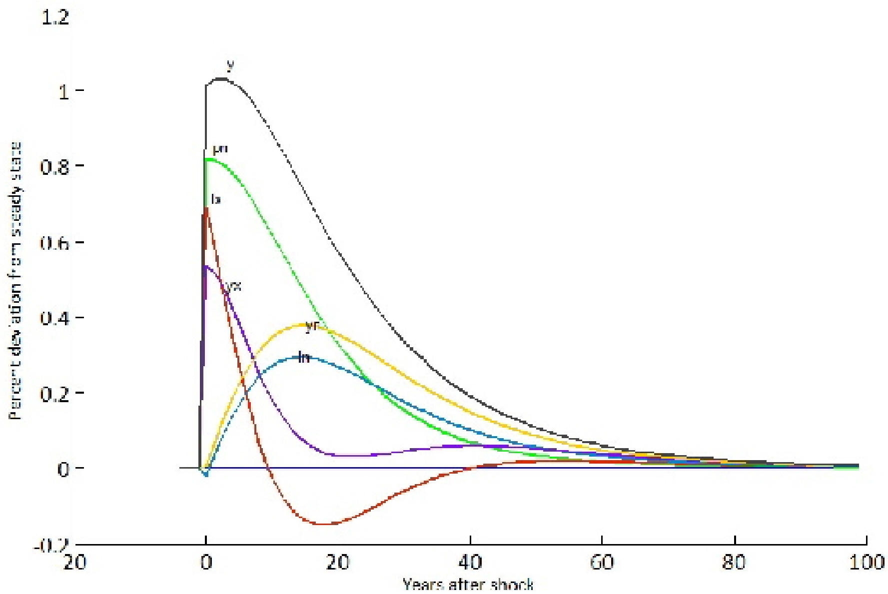
Un shock tecnológico genera un aumento en la productividad marginal del trabajo asi como también en el capital, en el sector correspondiente en cada caso. De este modo, las firmas aumentan la demanda por ambos factores, resultando en un aumento del salario y de la tasa de alquiler del capital. El resultado es un aumento del trabajo en el sector que se volvió más productivo, es decir, tiene lugar una reasignación de los trabajadores que se mueven hacia el sector donde aumentó la productividad y de esta manera contribuyen a reducir el salario en ese sector hasta que vuelve a igualarse entre sectores. Por otro lado, tiene lugar un aumento en el capital y un aumento en la producción en el sector del shock en cuestión.

El aumento en el salario y en el precio de alquiler del capital se traducen en un aumento del consumo agregado debido a que la tecnología de rendimientos constantes a escala implica que el aumento en la remuneracion a los factores cubre el beneficio, expandiendo la restricción presupuestaria.

La inversión de las firmas del sector no transable aumenta debido a la mayor demanda de capital por parte de las firmas de ambos sectores, en el que el shock afecta directamente como también al que afecta indirectamente, y luego se estabiliza para volver a su estado estacionario.

Impulso-respuesta de un shock a los términos de intercambio

Ante un shock a los términos de intercambio, el modelo utilizado para reproducir la economía australiana reacciona de acuerdo a las siguientes funciones de Impulso-Respuesta:

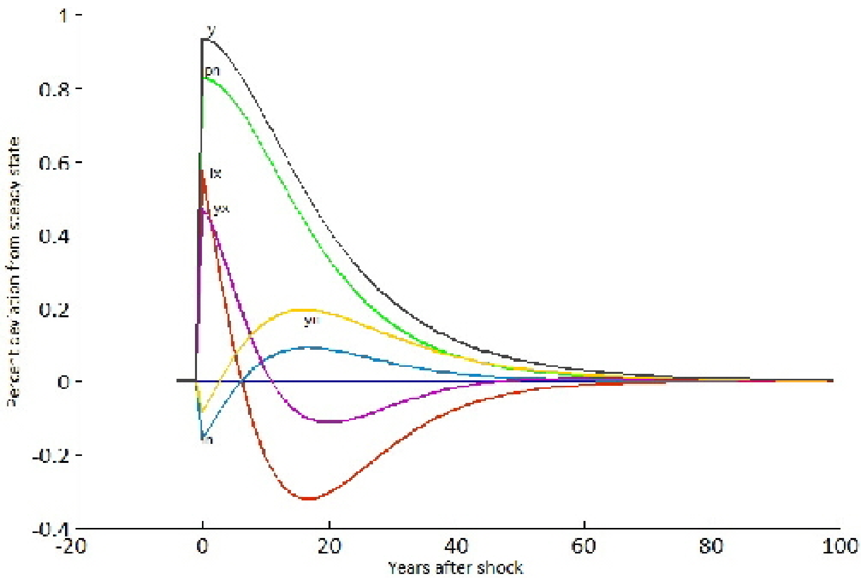


Frente a un shock en los términos de intercambio, aumenta la producción del sector transable ya los mayores precios relativos que presenta el sector hace que se vuelva más atractivo producir bienes que se comercializan a nivel mundial. De este modo, aumentan los salarios en el sector transable para atraer trabajadores a ese sector que son contratados hasta el punto en que los salarios se vuelven a igualar entre sectores. Los agentes perciben así una mejora en sus ingresos futuros y por ende aumenta el consumo de ambos bienes y pn debe aumentar (se aprecia la moneda). Tanto la inversión como los insumos aumentan en el corto plazo en el sector transable.

A continuación se presentan casos extremos para evaluar el desempeño del modelo:

con

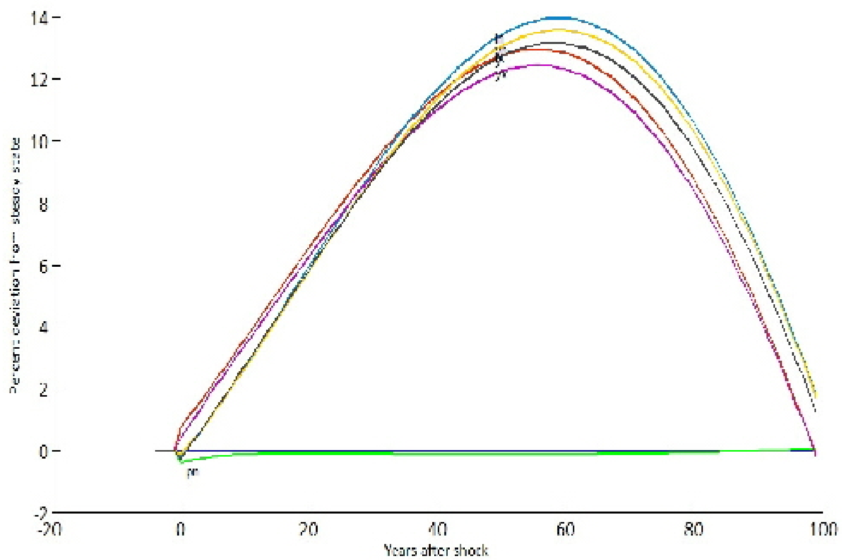
$\eta = 100$ (oferta de trabajo relativamente inelástica)



En el gráfico anterior se puede observar que si la oferta de trabajo es relativamente inelástica, es decir, que ante un cambio en el salario los trabajadores básicamente no modifican su oferta de trabajar, debido a que trabajar les genera mucha desutilidad y por lo tanto no tienen en cuenta que el ocio se encarece en términos relativos. En este caso lo que se da es un fuerte ajuste por el lado de precios (mirando TCR). Lo que ocurre es que frente a un shock en px y la mayor propensión a contratar trabajadores en el sector de transables, dado que muy pocos trabajadores se mueven de un sector al otro, deben ser inducidos con un mayor aumento en el salario que se traduce en un aumento de precios en el sector no transable de mayor magnitud para compensar la mayor demanda por estos bienen dada una oferta limitada.

con

$\eta = 0.97$ (oferta de trabajo muy elástica)

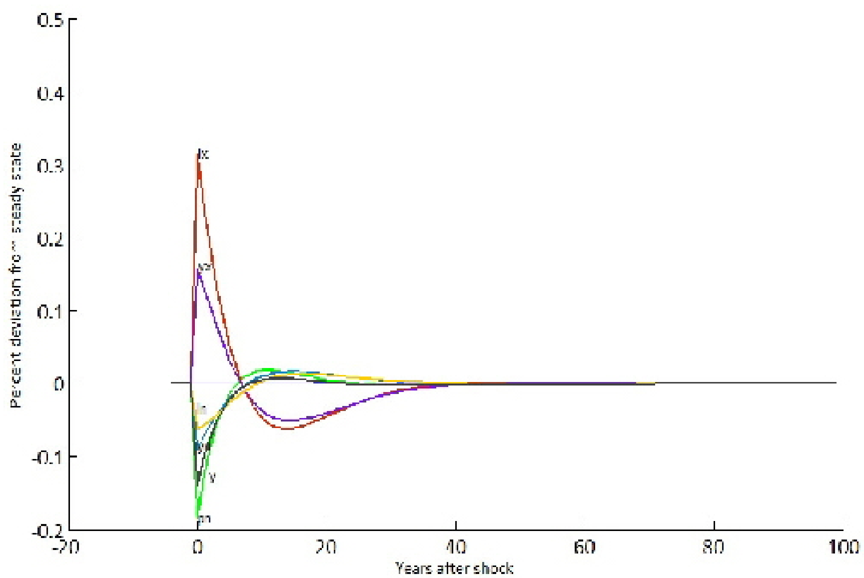


Si por el contrario, los individuos muestran una oferta de trabajo muy elástica, esto quiere decir que frente a una mínima variación en los salarios, los individuos reaccionan mucho a su elección de ocio-consumo; por lo tanto se puede decir que que la desutilidad que le genera trabajar no es tan grande porque asigna mucha importancia al consumo. En este escenario, un shock a los términos de intercambio hace que la cantidad de horas ofrecidas al nuevo salario sean mayores y por lo tanto el aumento de salarios necesario para inducir la reasignación de trabajo de un sector al otro va a ser más bajo y así es como pn casi no se mueve y el tcr permanece casi invariante dado que px aumenta y pn también pero en menor magnitud que antes,

Impulso-respuesta de un shock a la tasa de interés internacional

Ante un shock a la tasa de interés internacional, el modelo utilizado para reproducir la economía australiana reacciona de acuerdo a las siguientes funciones de Impulso-Respuesta:

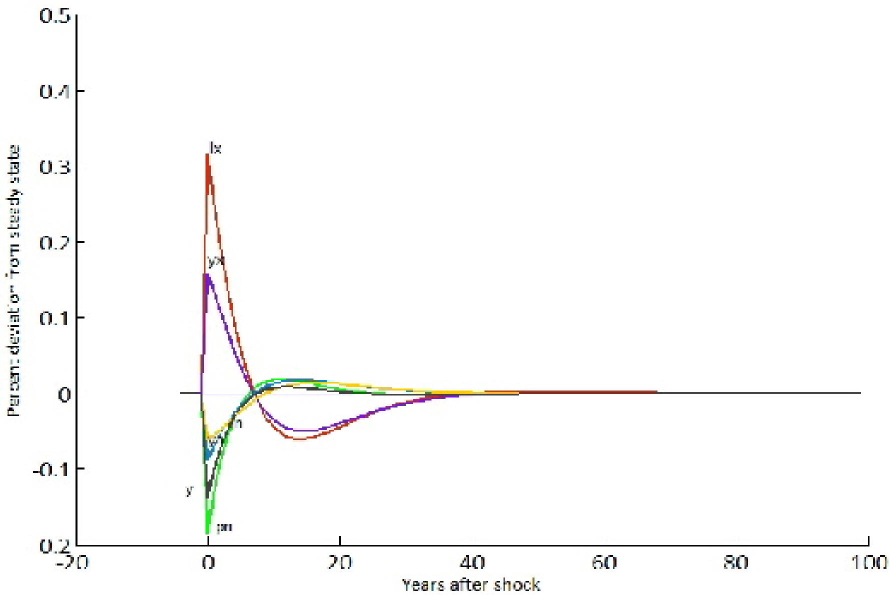
Un shock a la tasa de interés internacional puede interpretarse como un shock negativo a la economía debido al efecto recesivo que provoca, dado que incentiva un mayor ahorro y por ende desincentiva el gasto en consumo. De esta forma, el consumo de ambos bienes cae pero sólo el precio de los bienes no transables disminuye, por el hecho de que es una economía chica y no tiene incidencia en los precios internacionales. El tcr se deprecia y esto fomenta las exportaciones dado que el país se abarata en términos relativos y por ende aumenta la producción en dicho sector. Además, el costo de alquiler del capital se encarece debido al aumento en la tasa de interés y desincentiva no sólo el consumo sino también la inversión.



A continuación, siguiendo la misma lógica que antes, se analizan los casos extremos,

Con

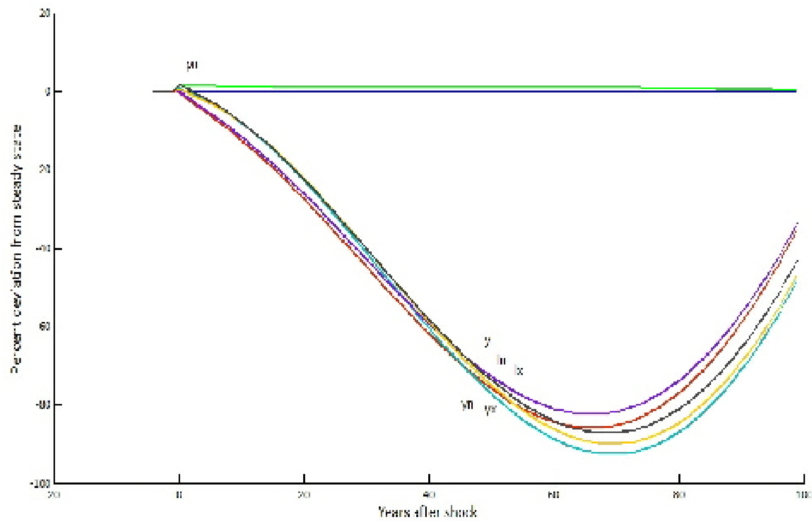
$\eta = 100$ (oferta relativamente inelástica)



Con una oferta de trabajo relativamente inelástica, el shock a la tasa de interés hace que las cantidades se muevan y por lo tanto se requiere de un mayor salario para incentivar a los trabajadores a aumentar su oferta en el sector exportable y así aumentar la producción. La moneda se deprecia dado que la economía es percibida con mayor riesgo. Nuevamente el aumento en las tasas de interés incentiva el ahorro y cae el consumo de ambos bienes para una oferta dada de no transables. La relativa inelasticidad de la oferta de trabajo exacerba la caída en pn debido a que los precios deben caer mucho porque las cantidades casi no se mueven y por lo tanto la producción de no trasables no cae tanto como lo haría en un contexto de mayor elasticidad de la oferta de trabajo. Nuevamente podemos observar que con una elasticidad de la oferta de trabajo inelástica, las cantidades se mueven muy poco y los precios hacen la mayor parte del ajuste.

Con

$\eta = 0.97$ (oferta de trabajo muy elástica)



Por otro lado, para una elasticidad de la oferta de trabajo alta, un shock a la tasa de interés hace que las cantidades se muevan mucho, es decir, de reasignen muchos trabajadores del sector no transable al exportable y por lo tanto, si bien tiene lugar la caída en el consumo de ambos bienes debido al mayor incentivo a ahorrar, pn casi no ajusta porque la producción de bienes no transables logra reducirse gracias a la gran elasticidad de la oferta de trabajo y por lo tanto no hace falta que se mueva pn frente a la caída en la demanda.

De este análisis se puede concluir que el modelo reproduce bien las regularidades empíricas y que el rol de la elasticidad de la oferta de trabajo en los RBCs no es despreciable sino que tal como afirman Lucas y Rapping en "Real Wages, Employment, and Inflation", la introducción de la oferta de trabajo dentro de los modelos de análisis macroeconómicos resulta relevante a la hora de reproducir los ciclos económicos.

5.2 Conclusiones

El presente trabajo pretende reproducir las regularidades empíricas de los ciclos de la economía australiana mediante un modelo de equilibrio general dinámico y estocástico a modo de evaluar cuán satisfactoria es su actuación. En primer lugar, se analizaron los ciclos que muestran los datos y se observó que, ante shocks a los términos de intercambio, una de las variables que afecta el movimiento en ciclos es el trabajo dado que frente a shocks externos la productividad no se ve afectada y el capital no ajusta en el corto plazo. Por lo tanto, para poder explicar los ciclos de una conomía en general es necesario analizar cómo se comporta el trabajo en equilibrio y, en consecuencia, resulta de suma importancia estimar la elasticidad de la oferta de trabajo para el país en cuestión.

En este caso, la elasticidad se ve afectada por el parámetro η; por lo tanto para estimar la elasticidad de la oferta de trabajo, se debió recurrir a un método de estimación conocido como "Golden Search" que realiza una serie de simulaciones teniendo en cuenta distintos rangos para el valor de η hasta encontrar el η que minimiza la distancia cuadrada entre el momento de los datos y el momento teórico del producto, del trabajo y del tipo de cambio real. Adicionalmente, tomamos como criterio de elección, aquel η que mejor recreaba el desvío de estas variables.

Posteriormente, se presentó el modelo utilizado en este trabajo. Se trata de un modelo para una pequeña economÌa abierta con un hogar y firma representativas con dos sectores de produccion(exportable y no transable) y tecnología de rendimientos constantes a escala. Además, hay libre movilidad de capitales, libre comercio y los hogares cuentan con bonos reales no contigentes de un período, $a(s^t)$.

La calibración permitió la resolución computacional del modelo y los diversos análisis de las funciones de impulso-respuesta ante shocks a la tecnologia, los términos de intercambio y la tasa de interés. Todos los parametros fueron calibrados satisfactoriamente de acuerdo a los procedimientos que se realizan en la literatura estándar de ciclos reales. En el caso de la tasa de interés, se eligió un valor arbitrario que reproduzca el ratio capital/producto observado.

Las funciones de impulso-respuesta dieron lugar a un análisis esperable. En particular, se observó que un shock a los términos de intercambio, aumenta la producción del sector transable ya los mayores precios relativos que presenta el sector hace que se vuelva más atractivo producir bienes que se comercializan a nivel mundial. De este modo, aumentan los salarios en el sector transable para atraer trabajadores a ese sector que son contratados hasta el punto en que los salarios se vuelven a igualar entre sectores. Los agentes perciben así una mejora en sus ingresos futuros y por ende aumenta el consumo de ambos bienes y pn debe aumentar para suavizar la mayor demanda frente a una oferta dada (se aprecia la moneda). Tanto la inversión como los insumos aumentan en el corto plazo en el sector transable.

Además, se pudo observar que con preferencias Greenwood–Hercowitz–Huffman la magnitud de los shocks es mayor que bajo utilidad Cobb Douglas. Esto se explica por la particularidad de las preferencias GHH que no tienen efecto riqueza en la oferta de trabajo, todo es efecto sustitución (en términos relativos de ocio-consumo). De esta manera, un shock a los términos de intercambio aumenta tanto los salarios como el consumo y la oferta de trabajo (siempre y cuando no sea inelástica). Bajo preferencias Cobb-Douglas, el efecto sustitución hace que los individuos aumenten las horas trabajadas pero el efecto riqueza genera el efecto contrario, suavizando el efecto final. Por lo tanto, bajo preferencias Cobb- Douglas el desvió del trabajo es más volatil, y en consecuencia, el desvío del producto también lo es. Esta caracaterística hace que los desvíos de dichas preferencias se aproximen más a los desvíos observados en los datos. De hecho, tal como afirman. Alexandre Dmitriev e Ivan Roberts en "Wealth Effects and Countercyclical Net Exports", la incorporación de preferencias GHH en los modelos de ciclos reales, dado que eliminan el efecto ingreso en la oferta de trabajo, ayudan a reproducir los ciclos de las economías con mayor exactitud.

Finalmente, en cuanto a la estimación de la elasticidad de la oferta de trabajo el valor obtenido bajo preferencias Cobb Douglas fue de -1.8 mientras que con GHH fue aproximadamente de -1.5. Se puede observar, que ambas estimaciones se encuentran en los rangos aceptados por la corriente macroeconómica. En particular, comenzando por Lucas y Rapping (1969), muchos macroeconomistas han argumentado que se requieren elasticidades de Frisch relativamente grandes para poder explicar las fluctuaciones del mercado laboral en los ciclos económicos. Asímismo, Rebelo (2005) afirma que la mayoría de los modelos de ciclos requieren una alta elasticidad de la oferta de trabajo a modo de generar fluctuaciones en las variables agregadas, de tal magnitud que sean observables en los datos. En los modelos RBC, estas altas elasticidades son necesarias para recrear la gran volatilidad presentada por las horas trabajadas, junto a la baja volatilidad del salario real y la productividad laboral. De esta manera, Prescott (2004) sostiene que las diferencias en las horas agregadas de trabajo entre individuos, implican una elasticidad de la oferta de trabajo de Frisch 3 en los modelos de ciclos reales.

Las preferencias GHH aumentan la volatilidad del consumo debido a que eliminan el efecto riqueza de la decisión ocio-consumo y por lo tanto logran reproducir mejor los ciclos. Por lo tanto, frente a un shock a los TOT que aumenta el consumo en ambos bienes así como los salarios. Por otro lado, bajo preferencias Cobb-Douglas el efecto ingreso y el efecto sustitución van en direcciones contrarias, y si bien en el presente trabajo nos concentramos en la elasticidad de Frisch, lo hicimos suponiendo que la economía se comporta como con mercados completos y si bien es desvío de la utilidad marginal de la riqueza es pequeño, no es cero y esto puede contribuir a que el modelo con GHH logre replicar mejor los momentos de los datos. Bajo GHH el número de horas trabajadas es más volátil al igual que mayor volatilidad en el consumo.La introducción de preferencias que eliminan el efecto riqueza sobre la oferta de trabajo ayuda a reconciliar el modelo con las predicciones de los datos.

En conclusión, se puede notar que el modelo logra estimar una elasticidad de la oferta de trabajo que reproduce los ciclos de la economía australiana y que, a su vez, se encuentra aceptada en la literatura. Sin embargo, pueden observarse algunas dificultades del modelo que posiblemente se puedan solucionar recurriendo a otros factores para mejorar su actuación. A modo de ejemplo, podrían evaluarse qué otras variables afectán a la elasticidad de la oferta de trabajo y calibrarlas de manera tal de que replique, con mayor exactitud, las regularidades empíricas de la economía australiana. Asimismo, se podría estimar la elasticidad de la oferta de trabajo de una forma más sofisticada, controlando por sexo, edad, estado civil, formalidad del trabajo, entre otros o incoroporar al modelo otras variables de interés como lo son la política monetaria y fiscal.

6 Referencias

[1] Aguiar, Mark, y Gopinath, Gita. 2007."Emerging market business cycles: the cycle is the trend", *Journal of Political Economy.*

[2] Aguiar, Mark, y Gita Gopinath. 2006. “Emerging Market Fluctuations: The Role of Interest Rates and Productivity Shocks.” Tenth Annual Conference on the Central Bank of Chile, "Current Account and External Financing." Santiago, Chile: Central Bank of Chile.

[3] Atkeson Andrew and Christopher Phelan. 1994. "Reconsidering the Costs of Business Cycles with Incomplete Markets", MIT Press.

[4] Blundell, Richard, Antoine Bozio, y Guy Laroque. 2011. Labour Supply and the Extensive Margin Forthcoming, *American Economic Review Papers and Proceedings.*

[5] Bingham, Frank; 2016. " Australia's trade since Federation", *Department of Foreign Affairs and Trade, Australian Government.*

[6]Céspedes, Nikita y Rendón , Silvio. 2012. "La elasticidad de oferta laboral de Frisch en economías con alta movilidad laboral", Banco Central de Reserva del Perú.

[7] Chetty, Raj, Adam Guren, Day Manoli, y Andrea Weber. 2011. "Are Micro and Macro Labor Supply Elasticities Consistent? A Review of Evidence on the Intensive and Extensive Margins", *American Economic Review 101*(3): 471–475

[8] Chetty, Raj, Guren, Adam, et al.; 2011. "Does indivisible labor explain the difference between micro and macro elasticities? A meta-analysis of extensive margin elasticities", *NBER.*

[9] Cho, Jang-Ok, y Cooley, Thomas F. 1993. "Employment and hours over the business cycle" , *Journal of Economic Dynamics and Control* 18 (1994) 411-432. North-Hollad.

[10] Connolly, Ellis, y Lewis, Christine. 2010. "Structural Change in the Australian Economy", *Reserve Bank of Australia.*

[11] Dandie, Sandra, y Mercante, Joseph. 2007. "Australian Labour Supply Elasticities: Comparison and Critical Review", *The Treasury, Australian Government.*

[12] Dotsey, Michael, Duarta, Margarida. 2006. "Nontraded Goods, Market Segmentation, and Exchnage Rates", *Federal Reserve Bank of Richmond.*

[13] Guajardo, Jaime. 2008. "Business Cycles in Small Developed Economies: The Role of Terms of Trade and Foreign Interest rate Shocks", *International Monetary Fund.*

[14] Hall, Robert E. 2006 "The Labor Market and Macro Volatility: A Nonstationary General-Equilibrium Analysis", Standford University

[15]Heathcote, Jonathan. 2009 "Quantitative Macroeconomics with Heterogenous Households", Federal Reserve of Minneapolis and CEPR.

[16]Heathcote, Jonathan. 2016 "Wealth and Volatility", Federal Reserve of Minneapolis and CEPR.

[17] Keane, Michael P., y Rogerson, Richard. 2011. "Reconciling micro and macro labor supply elasticities: A structural perspective", *National Bureau of Economic Research .*

[18] Kneip, Alois, Merz, Monika, Storjohann; 2013. "Aggregation and Labor Supply Elasticities", *Institute for the Study of Labor*

[19] Krusell, Per, Mukoyama, Toshihiko, et al. 2012. "Is Labor Supply Important for Business Cycles?" *National Bureau of Economic Research.*

[20] Laurie, Kirsty, McDonald, Jason. 2008. "A perspective on trends in Australian Government spending", *The Treasury, Australian Government.*

[21] McFadden, Daniel. 1989. "A method of simulated moments for estimation of discrete response models without numerical integration", *Econometrica.*

[22] Neumeyer, P.A. y F. Perri. 2005. "Business Cycles in Emerging Markets: The Role of Interest Rates." *Journal of Monetary Economics* 52(2): 345–80.

[23]Otrok, Christopher. 1999. "On Measuring The Welfare Cost of Business Cycles". University of Virginia

[24]Raj Chetty. 2013."Does Indivisible Labor explain the differences between Micro and Macro Elasticities? University of Standford

[25] Rebelo, Sergio. 2005. "Real Business Cycle Models: Past, present and future", *National Bureau of Economic Research .*

[26] Robert, Lucas."Understanding Business Cycles", University of Chicago

[27] Robertson, Paul L. 2008. "Resource Based or Resource Cursed? A Brief (And Selective) History of the Australian Economy Since 1901", *Australian Innovation Research Centre, University of Tasmania.*

[28]Sargent, Thomas. 2006. "A Labour Suppy Elasticity Accord?", University of Standford.

[29]Shimer, Robert. 2009. "Labor Markets and Business Cycles", University of Chicago

[30] Uhlig, Harald. 1997. "A toolkit of Analysing non-linear dynamic stochastic models easily", CEN , University of Tilburg, and CEPR

7 Anexo

7.1 Log-linealizaciones

Ecuaciones sin expectativas

Restricciones de recursos

$$(1+r)a(s^t) = a(s^{t-1})(1+\hat{r}(s^{t-1}))+p_x(s^t)y_x(s^t)-(\hat{p}_x(s^t)\hat{c}_x(s^t)+c_m(s^t)i_m^n(s^t)-m_x(s^t)-m_n(s^t))$$

$$
\begin{aligned}
(1+r)\bar{a}(1+\hat{a}(s^t)) &= \bar{a}(1+\hat{a}(s^{t-1}))(1+\bar{r}(1+\hat{r}(s^{t-1}))+\bar{p}_x\bar{y}_x(1+\hat{p}_x(s^t)+\hat{y}_x(s^t))- \\
&\quad -(\bar{p}_x\bar{c}_x(1+\hat{p}_x(s^t)+\hat{c}_x(s^t))+\bar{c}_m(1+\hat{c}_m(s^t))++\bar{i}_m^n(s^t)(1+\hat{i}_m^n(s^t))+\bar{i}_m^x(s^t) \\
&\quad (1+\hat{i}_m^x(s^t))-\bar{m}^x(1+\hat{m}_x(s^t))-\bar{m}_n(1+\hat{m}_n(s^t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1+r)\bar{a}(1+\hat{a}(s^t)) &= \bar{a}\hat{a}(s^{t-1})+\bar{a}\bar{r}(\hat{a}(s^{t-1})+\hat{r}^*(s^t))+\bar{p}_x\bar{y}_x(\hat{p}_x(s^t)+\hat{y}_x(s^t))-(\bar{p}_x\bar{c}_x\hat{p}_x(s^t)\hat{c}_x(s^t)+ \\
&\quad +\bar{c}_m\hat{c}_m(s^t)+\bar{i}_m^n(s^t)\hat{i}_m^n(s^t)++\bar{i}_m^x(s^t)\hat{i}_m^x(s^t)-\bar{m}^x\hat{m}_x(s^t)-\bar{m}_n\hat{m}_n(s^t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1+r)\hat{a}(s^t)) &= \hat{a}(s^{t-1})+\bar{r}^*(\hat{a}(s^{t-1})+\hat{r}^*(s^t))+\frac{\bar{p}_x\bar{y}_x}{\bar{a}}\left(\hat{p}_x(s^t)+\hat{y}_x(s^t)\right)- \\
&\quad -\left[\frac{\bar{p}_x\bar{c}_x}{\bar{a}}\left(\hat{p}_x(s^t)+\hat{c}_x(s^t)\right)+\frac{\bar{c}_m}{\bar{a}}\hat{c}_m(s^t)+\frac{\bar{i}_m^n}{\bar{a}}\hat{i}_m^n(s^t)-\frac{\bar{i}_m^x}{\bar{a}}\hat{i}_m^x(s^t)-\frac{\bar{m}^x}{\bar{a}}\hat{m}_x(s^t)-\frac{\bar{m}_n}{\bar{a}}\hat{m}_n(s^t)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\hat{a}(s^t)(1+\gamma)+\hat{a}(s^{t-1})+\bar{r}^*(\hat{a}(s^{t-1})+\hat{r}^*(s^t))+\frac{\bar{p}_x\bar{y}_x}{\bar{a}}\left(\hat{p}_x(s^t)+\hat{y}_x(s^t)\right)- \\
&\quad -\left[\frac{\bar{p}_x\bar{c}_x}{\bar{a}}\left(\hat{p}_x(s^t)+\hat{c}_x(s^t)\right)+\frac{\bar{c}_m}{\bar{a}}\hat{c}_m(s^t)+\frac{\bar{i}_m^n}{\bar{a}}\hat{i}_m^n(s^t)\right]-\frac{\bar{i}_m^x}{\bar{a}}\hat{i}_m^x(s^t)-\frac{\bar{m}^x}{\bar{a}}\hat{m}_x(s^t)-\frac{\bar{m}_n}{\bar{a}}\hat{m}_n(s^t)
\end{aligned}
\tag{60}
$$

$$y_n = c_N + i_n^n + \hat{i}_n^x$$

$$\bar{y}_n(1+\hat{y}_n(s^t)) = \bar{c}_N(1+\hat{c}_N(s^t))+\bar{i}_n^n(1+\hat{i}_n^n(s^t))+\bar{i}_n^x(1+\hat{i}_n^x(s^t))$$

$$\bar{y}_n+\bar{y}_n\hat{y}_n(s^t) = \bar{c}_N+\bar{c}_N\hat{c}_N(s^t)+\bar{i}_n^n+\bar{i}_n^n\hat{i}_n^n(s^t)+\bar{i}_n^x\hat{i}_n^x(s^t)$$

$$\hat{y}_n(s^t) = \frac{\bar{c}_N}{\bar{y}_n}\hat{c}_N(s^t)+\frac{\bar{i}_n^n}{\bar{y}_n}\hat{i}_n^n(s^t)+\frac{\bar{i}_n^x}{\bar{y}_n}\hat{i}_n^x(s^t)$$

$$0 = \frac{\bar{c}_N}{\bar{y}_n}\hat{c}_N(s^t)+\frac{\bar{i}_n^n}{\bar{y}_n}\hat{i}_n^n(s^t)+\frac{\bar{i}_n^x}{\bar{y}_n}\hat{i}_n^x(s^t)-\hat{y}_n(s^t) \tag{61}$$

$$l_x + l_N = l$$

$$\bar{l}(1+\hat{l}(s^t)) = \bar{l}_N(1+\hat{l}_N(s^t)) + \bar{l}_x(1+\hat{l}_x(s^t))$$

$$\bar{l} + \hat{l}(s^t)\bar{l} = \bar{l}_N + \bar{l}_N\hat{l}_N(s^t) + \bar{l}_x\hat{l}_x(s^t)$$

$$\hat{l}(s^t) = \frac{\bar{l}_N}{\bar{l}}\hat{l}_N(s^t) + \frac{\bar{l}_x}{\bar{l}}\hat{l}_x(s^t)$$

$$0 = \frac{\bar{l}_N}{\bar{l}}\hat{l}_N(s^t) + \frac{\bar{l}_x}{\bar{l}}\hat{l}_x(s^t) - \hat{l}(s^t) \tag{62}$$

Identidades y definiciones

Funciones de utilidad

$$u(s^t) = \frac{U_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$\ln(\frac{u_t}{u}) = (1-\sigma)\ln(U_t) - \ln(1-\sigma) - (1-\sigma)\ln(U) + \ln(1-\sigma)$$

$$\ln(\frac{u_t}{u}) = (1-\sigma)\ln(\frac{u_t}{u})$$

$$0 = -\hat{u}(s^t) + (1-\sigma)\hat{U}_t(s^t) \tag{63}$$

Cobb - Douglas

$$\hat{U}(s^t) = \ln(U(s^t)) - \ln(\overline{U}(s^t))$$

$$\hat{U}(s^t) = \ln\left[C(s^t)^\eta(1-l(s^t))^{1-\eta}\right] - \ln\left[\bar{C}(s^t)^\eta(\overline{1-l(s^t)})^{1-\eta}\right]$$

$$\hat{U}(s^t) = \eta C(s^t) + (1-\eta)(1-l) - \bar{C}\eta - \overline{(1-l(s^t))}(1-\eta)$$

$$\hat{U}(s^t) = \eta[C(s^t) - \bar{C}] + (1-\eta)[(1-l) - \overline{(1-l(s^t)}]$$

$$0 = \hat{U}(s^t) + \eta\hat{C}(s^t) - (1-\eta)\frac{\bar{l}}{1-\bar{l}}\hat{l}(s^t) \tag{64}$$

GHH:

$$\overline{U}\ (1+\hat{U}(s^t)) = \ \overline{C}^{1-\sigma} + (1-\sigma)\overline{C}\left(\frac{C_t-\overline{C}}{\overline{C}}\right)\overline{C} - A\bar{l}^\eta - A\eta\bar{l}^{\eta-1}\left(\frac{l_t-\bar{l}}{\bar{l}}\right)\bar{l}$$

$$\overline{U}\hat{U} = (1-\sigma)\overline{C}^{1-\sigma}\widehat{C} - A\eta\overline{l}^{\eta}\widehat{l}$$

$$\hat{U} = \frac{\overline{C}}{\overline{U}}\widehat{C} - A\eta\frac{\overline{l}^{\eta}}{\overline{U}}\widehat{l}$$

$$0 = -\hat{U} + (1-\sigma)\frac{\overline{C}^{1-\sigma}}{\overline{U}}\widehat{C} - A\eta\frac{\overline{l}^{\eta}}{\overline{U}}\widehat{l} \tag{65}$$

Para ambas preferencias:
$\{C_t\}$

$$(Cs^t) = \left[\mu^{\frac{1}{\theta}} c_T^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} (c_N)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

$$C(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}} = \left[\mu^{\frac{1}{\theta}} c_T^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} (c_N)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right]$$

$$\begin{aligned}\bar{C}(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}}(1+\hat{C}(s^t))^{\frac{\theta-1}{\theta}} \quad &= \quad \mu^{\frac{1}{\theta}} (\bar{c}_T)^{\frac{\theta-1}{\theta}} (1+\hat{C}_T(s^t))^{\frac{\theta-1}{\theta}} + \\ &+(1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} (\bar{c}_N)^{\frac{\theta-1}{\theta}} (1+\hat{C}_N(s^t))^{\frac{\theta-1}{\theta}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}} + \bar{C}(s^t)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\hat{C}(s^t) \quad &= \quad \mu^{\frac{1}{\theta}} (c_T)^{\frac{\theta-1}{\theta}} + \mu^{\frac{1}{\theta}} (\bar{c}_T)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \hat{C}_T(s^t) + \\ &+(1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} (\bar{c}_N)^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} (\bar{c}_N)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \hat{C}_m(s^t)\end{aligned}$$

$$0 = -\hat{C}(s^t) + \mu^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{\bar{c}_T}{\bar{c}}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \hat{C}_T(s^t) + (1-\mu)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{\bar{c}_N}{\bar{c}}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \hat{C}_N(s^t) \tag{66}$$

$\{c_T\}$

$$c_T = \hat{C}_x^{\xi}(s^t) C_m^{1-\xi}(s^t)$$

$$\hat{c}_T = \ln c_T(s^t) - \ln \bar{c}_T(s^t)$$

$$\hat{c}_T = \xi\hat{C}_x(s^t) + C_m(s^t)(1-\xi) - \xi\bar{C}_x(s^t) - (1-\xi)\bar{C}_m(s^t)$$

$$\hat{c}_T = \xi(C_x(s^t) - \bar{C}_x(s^t)) + (1-\xi)(C_m(s^t) - \bar{C}_m(s^t))$$

$$0 = -\hat{c}_T(s^t) + \xi \hat{C}_x(s^t) + (1-\xi)\hat{C}_m(s^t) \tag{67}$$

Funciones de producción

$\{y_x\}$

$$y_x(s^t) = z_x(s^t)(k_m^x(s^{t-1}))^w((k_m^x(s^{t-1}))^{1-w})^{\alpha_k^x} m_x^{\alpha_m^x}(s^t) l_x^{\alpha_l^x}(s^t)$$

$$\hat{y}_x(s^t) = \ln y_x(s^t) - \ln \bar{y}_x(s^t)$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_x(s^t) \quad = \quad & \ln z_x(s^t) + \alpha_k^x w(\ln k_n^x(s^{t-1})) + \alpha_k^x(1-w)\ln k_m^x(s^{t-1}) + \alpha_m^x \ln m_x + \alpha_l^x \ln l_x(s^t) - \\ & - \ln \bar{z}_x(s^t) - \alpha_k^x w \ln \bar{k}_n^x - \alpha_k^x(1-w)\ln \bar{k}_m^x - \alpha_m^x \ln \bar{m}_x - \alpha_l^x \ln \bar{l}_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_x(s^t) \quad = \quad & (\ln z_x(s^t) - \ln \bar{z}_x(s^t)) + \alpha_k^x w(\ln k_n^x(s^{t-1}) - \ln \bar{k}_n^x) + \alpha_k^x(1-w)(\ln k_m^x(s^{t-1}) - \ln \bar{k}_m^x) + \\ & + \alpha_m^x(\ln m_x - \ln \bar{m}_x) + \alpha_l^x(\ln l_x(s^t) - \ln \bar{l}_x)\end{aligned}$$

$$\hat{y}_x(s^t) = \hat{z}_x(s^t) + \alpha_k^x(w(\hat{k}_n^x(s^{t-1}) + (1-w)\hat{k}_m^x(s^{t-1})) + \alpha_m^x \hat{m}_x(s^t) + \alpha_l^x \hat{l}_x(s^t) \tag{68}$$

$$0 = -\hat{y}_x(s^t) + \hat{z}_x(s^t) + \alpha_k^x\left(w\hat{k}_n^x(s^{t-1}) + (1-w)\hat{k}_m^x(s^{t-1})\right) + \alpha_l^x \hat{l}_x(s^t) + \alpha_m^x m_x(s^t)$$

$\{y_n\}$

$$y_n(s^t) = z_n(s^t)(k_n^n(s^{t-1}))^w((k_n^n(s^{t-1}))^{1-w})^{\alpha_k^n} m_n^{\alpha_m^n}(s^t) l_n^{\alpha_l^n}(s^t)$$

$$\hat{y}_n(s^t) = \ln y_n(s^t) - \ln \bar{y}_n(s^t)$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_n(s^t) \quad = \quad & \ln z_n(s^t) + \alpha_k^n w(\ln k_n^n(s^{t-1})) + \alpha_k^n(1-w)\ln k_m^n(s^{t-1}) + \alpha_m^n \ln m_x + \alpha_l^n \ln l_x(s^t) - \ln \bar{z}_n(s^t) - \\ & - \alpha_k^n w \ln \bar{k}_n^n - \alpha_k^n(1-w)\ln \bar{k}_m^n - \alpha_m^n \ln \bar{m}_n - \alpha_l^n \ln \bar{l}_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_n(s^t) \quad = \quad & (\ln z_n(s^t) - \ln \bar{z}_n(s^t)) + \alpha_k^n w(\ln k_n^n(s^{t-1}) - \ln \bar{k}_n^n) + \alpha_k^n(1-w)(\ln k_m^n(s^{t-1}) - \ln \bar{k}_m^n) + \\ & + \alpha_m^n(\ln m_n - \ln \bar{m}_n) + \alpha_l^n(\ln l_n(s^t) - \ln \bar{l}_n)\end{aligned}$$

$$\hat{y}_n(s^t) = \hat{z}_n(s^t)+\alpha_k^n(w(\hat{k}_n^n(s^{t-1})+(1-w)\hat{k}_m^n(s^{t-1}))+\alpha_m^n\hat{m}_x(s^t)+\alpha_l^n\hat{l}_x(s^t) \quad (69)$$

$$0 = -\hat{y}_n(s^t)+\hat{z}_n(s^t)+\alpha_k^n(w\hat{k}_n^n(s^{t-1})+(1-w)\hat{k}_m^n(s^{t-1}))+\alpha_l^n\hat{l}_x(s^t)+\alpha_m^n m_n(s^t)$$

Inversión

$\{i_m^n\}$

$$i_m^n(s^t) = (1+\gamma)k_m^n(s^t) - (1-\delta_m^n)k_m^n(s^{t-1}) + k_m^n(s^{t-1})\Phi(s^t)$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_m^n(1+\hat{\imath}_m^n) &= (1+\gamma)\bar{k}_m^n(s^t)(1+\hat{k}_m^n(s^t)) - (1-\delta_m^n)\bar{k}_m^n(s^{t-1})(1+\hat{k}_m^n(s^{t-1}) + \\ &+\Phi\bar{k}_m^n(s^{t-1})(1+\hat{k}_m^n(s^{t-1}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_m^n+\bar{\imath}_m^n\hat{\imath}_m^n &= (1+\gamma)(\bar{k}_m^n(s^t)+\bar{k}_m^n(s^t)\hat{k}_m^n(s^t)) - (1-\delta_m^n)(\hat{k}_m^n(s^{t-1})+\bar{k}_m^n(s^{t-1})\hat{k}_m^n(s^{t-1}) + \\ &+\left(\bar{k}_m^n(s^{t-1})+\bar{k}_m^n(s^{t-1})\hat{k}_m^n(s^{t-1})\right)\left[\frac{\bar{k}_m^n(s^t)+\bar{k}_m^n(s^{t+1})\hat{k}_m^n(s^{t+1})-\bar{k}_m^n(s^t)-\bar{k}_m^n\hat{k}_m^n(s^t)}{\bar{k}_m^n(s^t)+\bar{k}_m^n(s^{t+1})\hat{k}_m^n(s^{t+1})}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_m^n+\bar{\imath}_m^n\hat{\imath}_m^n &= \bar{k}_m^n(s^t)+\bar{k}_m^n(s^t)\hat{k}_m^n(s^t)+\bar{k}_m^n\gamma+\gamma\hat{k}_m^n(s^t)\bar{k}_m^n-\hat{k}_m^n(s^{t-1})-\bar{k}_m^n(s^{t-1})\hat{k}_m^n(s^{t-1}) + \\ &+\delta_m^n(\hat{k}_m^n(s^{t-1})+\delta_m^n\bar{k}_m^n(s^{t-1})\hat{k}_m^n(s^{t-1})\end{aligned}$$

$$0 = \hat{\imath}_m^n(s^t)+\frac{\bar{k}_m^n}{\bar{\imath}_m^n}(s^t)\left[(1+\gamma)\hat{k}_m^n(s^t)-(1-\delta_m^n)\hat{k}_m^n(s^{t-1})\right] \quad (70)$$

$\{i_n^n\}$

$$i_n^n(s^t) = (1+\gamma)k_n^n(s^t) - (1-\delta_n^n)k_n^n(s^{t-1}) + k_n^n(s^{t-1})\Phi(s^t)$$

$$\bar{\imath}_n^n(1+\hat{\imath}_n^n) = (1+\gamma)\bar{k}_n^n(s^t)(1+\hat{k}_n^n(s^t))-(1-\delta_n^n)(1+\hat{k}_n^n(s^{t-1})\bar{k}_n^n(s^{t-1})+\Phi\bar{k}_n^n(s^{t-1})(1+\bar{k}_n^n(s^{t-1}))$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_n^n+\bar{\imath}_n^n\hat{\imath}_n^n &= (1+\gamma)(\bar{k}_n^n(s^t)+\bar{k}_n^n(s^t)\hat{k}_n^n(s^t)) - (1-\delta_n^n)(\hat{k}_n^n(s^{t-1})+\bar{k}_n^n(s^{t-1})\hat{k}_n^n(s^{t-1}) + \\ &+\left(\bar{k}_n^n(s^{t-1})+\bar{k}_n^n(s^{t-1})\hat{k}_n^n(s^{t-1})\right)\left[\frac{\bar{k}_n^n(s^t)+\bar{k}_n^n(s^{t+1})\hat{k}_n^n(s^{t+1})-\bar{k}_n^n(s^t)-\bar{k}_n^n\hat{k}_n^n(s^t)}{\bar{k}_n^n(s^t)+\bar{k}_n^n(s^{t+1})\hat{k}_n^n(s^{t+1})}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_n^n + \bar{\imath}_n^n \hat{\imath}_n^n \quad = \quad & \bar{k}_n^n(s^t) + \bar{k}_n^n(s^t)\hat{k}_n^n(s^t) + \bar{k}_n^n\gamma + \gamma\hat{k}_n^n(s^t)\bar{k}_n^n - \hat{k}_n^n(s^{t-1}) - \bar{k}_n^n(s^{t-1})\hat{k}_n^n(s^{t-1}) + \\ & +\delta_n^n(\hat{k}_n^n(s^{t-1}) + \delta_n^n\bar{k}_n^n(s^{t-1})\hat{k}_n^n(s^{t-1})\end{aligned}$$

$$0 = \hat{\imath}_n^n(s^t) + \frac{\bar{k}_n^n}{\bar{\imath}_n^n}(s^t)\left[(1+\gamma)\hat{k}_n^n(s^t) - (1-\delta_n^n)\hat{k}_n^n(s^{t-1})\right] \tag{71}$$

$\{i_m^x\}$

$$i_m^x(s^t) = (1+\gamma)k_m^x(s^t) - (1-\delta_m^x)k_m^x(s^{t-1}) + k_m^x(s^{t-1})\Phi(s^t)$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_m^x(1+\hat{\imath}_m^x) \quad = \quad & (1+\gamma)\bar{k}_m^x(s^t)(1+\hat{k}_m^x(s^t)) - (1-\delta_m^x)(1+\hat{k}_m^x(s^{t-1})\bar{k}_m^x(s^{t-1}) + \\ & +\Phi\bar{k}_m^x(s^{t-1})(1+\bar{k}_m^x(s^{t-1}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_m^x + \bar{\imath}_m^x\hat{\imath}_m^x \quad = \quad & (1+\gamma)(\bar{k}_m^x(s^t) + \bar{k}_m^x(s^t)\hat{k}_m^x(s^t)) - (1-\delta_m^x)(\hat{k}_m^x(s^{t-1}) + \bar{k}_m^x(s^{t-1})\hat{k}_m^x(s^{t-1}) + \\ & + \left(\bar{k}_m^x(s^{t-1}) + \bar{k}_m^x(s^{t-1})\hat{k}_m^x(s^{t-1})\right)\left[\frac{\bar{k}_m^x(s^t) + \bar{k}_m^x(s^{t+1})\hat{k}_m^x(s^{t+1}) - \bar{k}_m^x(s^t) - \bar{k}_m^x\hat{k}_m^x(s^t)}{\bar{k}_m^x(s^t) + \bar{k}_m^x(s^{t+1})\hat{k}_m^x(s^{t+1})}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_m^x + \bar{\imath}_m^x\hat{\imath}_m^x \quad = \quad & \bar{k}_m^x(s^t) + \bar{k}_m^x(s^t)\hat{k}_m^x(s^t) + \bar{k}_m^x\gamma + \gamma\hat{k}_m^x(s^t)\bar{k}_m^x - \hat{k}_m^x(s^{t-1}) - \bar{k}_m^x(s^{t-1})\hat{k}_m^x(s^{t-1}) + \\ & +\delta_m^x(\hat{k}_m^x(s^{t-1}) + \delta_m^x\bar{k}_m^x(s^{t-1})\hat{k}_m^x(s^{t-1})\end{aligned}$$

$$0 = \hat{\imath}_m^x(s^t) + \frac{\bar{k}_m^x}{\bar{\imath}_m^x}(s^t)\left[(1+\gamma)\hat{k}_m^x(s^t) - (1-\delta_m^n)\hat{k}_m^x(s^{t-1})\right] \tag{72}$$

$\{i_n^x\}$

$$i_n^x(s^t) = (1+\gamma)k_n^x(s^t) - (1-\delta_n^x)k_n^x(s^{t-1}) + k_n^x(s^{t-1})\Phi(s^t)$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_n^x(1+\hat{\imath}_n^x) \quad = \quad & (1+\gamma)\bar{k}_n^x(s^t)(1+\hat{k}_n^x(s^t)) - (1-\delta_n^x)(1+\hat{k}_n^x(s^{t-1})\bar{k}_n^x(s^{t-1}) + \\ & +\Phi\bar{k}_n^x(s^{t-1})(1+\bar{k}_n^x(s^{t-1}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\imath}_n^x + \bar{\imath}_n^x\hat{\imath}_n^x \quad = \quad & (1+\gamma)(\bar{k}_n^x(s^t) + \bar{k}_n^x(s^t)\hat{k}_n^x(s^t)) - (1-\delta_n^x)(\hat{k}_n^x(s^{t-1}) + \bar{k}_n^x(s^{t-1})\hat{k}_n^x(s^{t-1}) + \\ & + \left(\bar{k}_n^x(s^{t-1}) + \bar{k}_n^x(s^{t-1})\hat{k}_n^x(s^{t-1})\right)\left[\frac{\bar{k}_n^x(s^t) + \bar{k}_n^x(s^{t+1})\hat{k}_n^x(s^{t+1}) - \bar{k}_n^x(s^t) - \bar{k}_n^x\hat{k}_n^x(s^t)}{\bar{k}_n^x(s^t) + \bar{k}_n^x(s^{t+1})\hat{k}_n^x(s^{t+1})}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\imath}_n^x + \bar{\imath}_n^x \hat{\imath}_n^x \quad &= \quad \bar{k}_n^x(s^t) + \bar{k}_n^x(s^t)\hat{k}_n^x(s^t) + \bar{k}_n^x\gamma + \gamma\hat{k}_n^x(s^t)\bar{k}_n^x - \hat{k}_n^x(s^{t-1}) - \bar{k}_n^x(s^{t-1})\hat{k}_n^x(s^{t-1}) + \\
&\quad + \delta_n^x(\hat{k}_n^x(s^{t-1}) + \delta_n^x\bar{k}_n^x(s^{t-1})\hat{k}_n^x(s^{t-1})
\end{aligned}
$$

$$
0 = \hat{\imath}_n^x(s^t) + \frac{\bar{k}_n^x}{\bar{\imath}_n^x}(s^t)\left[(1+\gamma)\hat{k}_n^x(s^t) - (1-\delta_n^x)\hat{k}_n^x(s^{t-1})\right] \tag{73}
$$

Condiciones de primer orden: control

Consumo

$$
c_m \frac{\xi}{1-\xi} = p_x c_x
$$

$$
c_m = p_x c_x \frac{1-\xi}{\xi}
$$

$$
\hat{c}_m(s^t) = \ln c_m(s^t) - \ln \bar{c}_m(s^t)
$$

$$
\hat{c}_m(s^t) = \ln \frac{1-\xi}{\xi} + \ln p_x(s^t) + \ln c_x(s^t) - \ln \bar{p}_{xt} - \ln \bar{c}_x
$$

$$
\hat{c}_m(s^t) = (\ln p_x(s^t) - \ln \bar{p}_x(s^t)) + (\ln c_x(s^t) - \ln \bar{c}_x(s^t))
$$

$$
\hat{c}_m = \hat{p}_x(s^t) + \hat{c}_x(s^t)
$$

$$
0 = -\hat{c}_m + \hat{c}_x + \hat{p}_{xt} \tag{74}
$$

$$
c_m^{\xi(\theta-1)+1} = \frac{u}{1-u} c_n (1-\xi)^\theta {c_x}^{\xi(\theta-1)} p_{nt}^\theta
$$

$$
c_m^{\xi(\theta-1)+1} = \frac{u}{1-u} c_n (1-\xi)^\theta \left(\frac{c_m}{p_{xt}}\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{\xi(\theta-1)} p_{nt}^\theta
$$

$$
c_m = \left[\frac{u}{1-u} c_n (1-\xi)^{\theta+\xi(\theta-1)} \left(\frac{c_m}{p_{xt}}\right)^{\xi(\theta-1)} p_{nt}^\theta\right]
$$

$$
\hat{c}_m = \ln(c_m) - \ln(\bar{c}_m)
$$

$$\hat{c}_m = \ln(\frac{u}{1-u}) + \ln c_n + (\theta + \xi(\theta-1))\ln(1-\xi) - \xi(\theta-1)\ln(p_{xt}) + \theta \ln p_{nt} - \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) - \\ - \ln \bar{c}_n - (\theta + \xi(\theta-1))\ln(1-\xi) + \xi(\theta-1)\ln(\bar{p}_{xt}) - \theta \ln \bar{p}_{nt}$$

$$\hat{c}_m = \hat{c}_n - \xi(\theta-1)\hat{p}_{xt} + \theta\hat{p}_{nt}$$

$$0 = -\hat{c}_n + \hat{c}_m + (\xi(\theta-1)\hat{p}_{xt} - \theta\hat{p}_{nt} \quad (75)$$

Indices de precios
$\{p_T\}$

$$p_T = \frac{p_x^{\xi}}{\xi^{\xi}} \frac{p_m^{1-\xi}}{1-\xi^{1-\xi}}$$

$$\hat{p}_T = \ln p_T - \ln \bar{p}_T$$

$$\hat{p}_T = \xi \ln p_x - \xi \ln \xi - (1-\xi)\ln(1-\xi) - \xi \ln(\bar{p}_x) + \xi \ln \xi + (1-\xi)\ln(1-\xi)$$

$$\hat{p}_T(s^t) = \xi(\ln(p_x) - \ln(\bar{p}_x))$$

$$\hat{p}_T(s^t) = \xi \hat{p}_x$$

$$0 = -\hat{p}_T(s^t) + \xi\hat{p}_{xt}(s^t) \quad (76)$$

$\{P\}$

$$P = \left[\mu p_T^{(1-\theta)} + (1-\mu)p_n^{(1-\theta)}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}$$

$$\bar{P}^{1-\theta}(1 + \hat{P}(s^t)) = \left[\mu \bar{p}_T^{(1-\theta)}(1 + \hat{p}_T(s^t)) + (1-\mu)\bar{p}_n^{(1-\theta)}(1 + \hat{p}_n)\right]$$

$$\bar{P}^{1-\theta} + \bar{P}^{1-\theta}\hat{P}(s^t) = \mu\bar{p}_T^{(1-\theta)} + (1-\mu)\bar{p}_n^{(1-\theta)} + \mu\bar{p}_T^{(1-\theta)}\hat{p}_T(s^t) + (1-\mu)\bar{p}_n^{(1-\theta)}\hat{p}_n(s^t)$$

$$\hat{P}(s^t) = \mu\left(\frac{\bar{p}_T}{\bar{P}}\right)^{1-\theta}\hat{p}_T(s^t) + (1-\mu)\left(\frac{\bar{p}_N}{\bar{P}}\right)^{1-\theta} p_N(s^t)$$

$$0 = -\hat{P}(s^t) + \mu\left(\frac{\bar{p}_T}{\bar{P}}\right)^{1-\theta}\hat{p}_T(s^t) + (1-\mu)\left(\frac{\bar{p}_N}{\bar{P}}\right)^{1-\theta} p_N(s^t) \quad (77)$$

Trabajo

Oferta de trabajo Cobb - Douglas:

$$l(s^t) = 1 - \frac{1-\eta}{\eta}\hat{C}(s^t)\frac{P(s^t)}{w(s^t)}$$

$$\bar{l} + \bar{l}\hat{l}(s^t) = 1 - \frac{1-\eta}{\eta}\bar{C}(s^t)\frac{\bar{P}(s^t)}{\bar{w}(s^t)}e^{\hat{C}(s^t)+\hat{P}(s^t)-\hat{w}(s^t)}$$

$$\bar{l} + \bar{l}\hat{l}(s^t) = 1 - \frac{1-\eta}{\eta}\bar{C}(s^t)\frac{\bar{P}(s^t)}{\bar{w}(s^t)}(1+\hat{C}(s^t)+\hat{P}(s^t)-\hat{w}(s^t))$$

$$\bar{l} + \bar{l}\hat{l}(s^t) = 1 - \frac{1-\eta}{\eta}\bar{C}(s^t)\frac{\bar{P}(s^t)}{\bar{w}(s^t)} - \frac{1-\eta}{\eta}\bar{C}(s^t)\frac{\bar{P}(s^t)}{\bar{w}(s^t)}(\hat{C}(s^t)+\hat{P}(s^t)-\hat{w}(s^t))$$

$$\left(\frac{\bar{l}}{1-\bar{l}}\right)\hat{l}(s^t) = \hat{C}(s^t)+\hat{P}(s^t)-\hat{w}(s^t)$$

$$0 = \left(\frac{\bar{l}}{1-\bar{l}}\right)\hat{l}(s^t) + \hat{C}(s^t)+\hat{P}(s^t)-\hat{w}(s^t) \tag{78}$$

Oferta de trabajo GHH:

$$l(s^t) = \left(\frac{w(s^t)}{P(s^t)}\frac{1}{A\eta}\right)^{\frac{1}{\eta-1}}$$

$$\hat{l}(s^t) = \ln l(s^t) - \ln \bar{l}(s^t)$$

$$\hat{l}(s^t) = \frac{1}{\eta-1}\left[\ln w(s^t) - \ln P(s^t) + \ln\frac{1}{A\eta}\right] - \frac{1}{\eta-1}\left[\ln\bar{w} - \ln\bar{P} + \ln\frac{1}{A\eta}\right]$$

$$\hat{l}(s^t) = \frac{1}{\eta-1}\left[\ln w(s^t) - \ln\bar{w} - (\ln P(s^t) - \ln\bar{P})\right]$$

$$\hat{l}(s^t) = \frac{1}{\eta-1}\left[\ln\hat{w}(s^t) - \ln\hat{P}_t)\right]$$

$$0 = \hat{l}(s^t) + \left(\frac{1}{\eta-1}\right)\hat{P}(s^t) - \left(\frac{1}{\eta-1}\right)\hat{w}(s^t) \tag{79}$$

Demanda de trabajo

$$w(s^t) = \frac{\alpha_l^x p_x(s^t)y_x(s^t)}{l_x(s^t)}$$

$$\hat{w}(s^t) = \ln w(s^t) - \ln \bar{w}(s^t)$$

$$\hat{w}(s^t) = \ln \alpha_l^x + \ln p_x(s^t) + \ln y_x(s^t) - \ln l_x(s^t) - \ln \alpha_l^x - \ln \bar{p}_x(s^t) - \ln \bar{y}_x(s^t) + \ln \bar{l}_x(s^t)$$

$$\hat{w}(s^t) = (\ln p_x(s^t) - \ln \bar{p}_x(s^t)) + (\ln y_x(s^t) - \ln \bar{y}_x(s^t)) + (\ln l_x(s^t) - \ln \bar{l}_x(s^t))$$

$$\hat{w}(s^t) = \hat{p}_{xt}(s^t) + \hat{y}_x(s^t) - \hat{l}_x(s^t)$$

$$0 = -\hat{w}(s^t) + \hat{p}_{xt}(s^t) + \hat{y}_x(s^t) - \hat{l}_x(s^t) \tag{80}$$

$$w(s^t) = \frac{\alpha_l^n p_n(s^t) y_n(s^t)}{l_x(s^t)}$$

$$\hat{w}(s^t) = \ln w(s^t) - \ln \bar{w}(s^t)$$

$$\hat{w}(s^t) = \ln \alpha_l^n + \ln p_n(s^t) + \ln y_n(s^t) - \ln l_n(s^t) - \ln \alpha_l^n - \ln \bar{p}_n(s^t) - \ln \bar{y}_n(s^t) + \ln \bar{l}_n(s^t)$$

$$\hat{w}(s^t) = (\ln p_n(s^t) - \ln \bar{p}_n(s^t)) + (\ln y_n(s^t) - \ln \bar{y}_n(s^t)) + (\ln l_n(s^t) - \ln \bar{l}_n(s^t))$$

$$\hat{w}(s^t) = \hat{p}_{nt}(s^t) + \hat{y}_n(s^t) - \hat{l}_n(s^t)$$

$$0 = -\hat{w}(s^t) + \hat{p}_n(s^t) + \hat{y}_n(s^t) - \hat{l}_n(s^t) \tag{81}$$

Inputs intermedios
$\{m_x\}$

$$m_x(s^t) = \alpha_m^x p_x(s^t) y_x(s^t)$$

$$\hat{m}_x(s^t) = \ln m_x(s^t) - \ln \bar{m}_x(s^t)$$

$$\hat{m}_x(s^t) = \ln \alpha_m^x + \ln p_x(s^t) + \ln y_x(s^t) - \ln \alpha_m^x - \ln \bar{p}_x(s^t) - \ln \bar{y}_x(s^t)$$

$$\hat{m}_x(s^t) = (\ln p_x(s^t) - \ln \bar{p}_x(s^t)) + (\ln y_x(s^t) - \ln \bar{y}_x(s^t))$$

$$\hat{m}_x(s^t) = \hat{p}_x(s^t) + \hat{y}_x(s^t)$$

$$0 = \hat{p}_x(s^t) + \hat{y}_x(s^t) - \hat{m}_x(s^t) \tag{82}$$

$\{m_n\}$

$$m_n(s^t) = \alpha_m^n p_x(s^t) y_n(s^t)$$

$$\hat{m}_n(s^t) = \ln m_n(s^t) - \ln \bar{m}_n(s^t)$$

$$\hat{m}_n(s^t) = \ln \alpha_m^n + \ln p_n(s^t) + \ln y_n(s^t) - \ln \alpha_m^n - \ln \bar{p}_n(s^t) - \ln \bar{y}_n(s^t)$$

$$\hat{m}_n(s^t) = (\ln p_n(s^t) - \ln \bar{p}_n(s^t)) + (\ln y_n(s^t) - \ln \bar{y}_n(s^t))$$

$$\hat{m}_n(s^t) = \hat{p}_n(s^t) + \hat{y}_n(s^t)$$

$$0 = \hat{p}_n(s^t) + \hat{y}_n(s^t) - \hat{m}_n(s^t) \tag{83}$$

Otras identidades
$\{R_t\}$

$$R(s^t) = 1 + r(s^t) - \frac{a(s^t)}{y}(S(s^t) + \phi_r)$$

$$R(s^t) = 1 + r^*(s^t) + \phi_r(e^{\frac{\bar{a}-\hat{a}(s^t)}{\bar{a}}} - 1) - \frac{a(s^t)}{y}\phi_r(e^{\frac{\bar{a}-\hat{a}(s^t)}{\bar{a}}} - 1 + 1)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(s^t)(1+\hat{R}(s^t)) &= 1 + r^*(s^t) + \phi_r(\frac{-1}{y})e^{\frac{\bar{a}-\bar{a}(s^t)}{\bar{a}}}(\frac{a_t - \bar{a}(s^t)}{\bar{a}})\bar{a} + \\ &+ \frac{\bar{a}(s^t)}{y}\phi_r[\frac{1}{y}(S(\bar{a}) + \phi_r\frac{-1}{y}]\frac{a_t - \bar{a}(s^t)}{\bar{a}}\bar{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{R}s^t)(1+\hat{R}(s^t)) &= 1 + r^*(s^t)(1+\hat{r}(s^t)) - \phi_r\hat{a}(s^t)\frac{\bar{a}(s^t)}{y} - \\ &- \hat{a}(s^t)\frac{\bar{a}(s^t)}{y}\phi_r(1 - \frac{\bar{a}(s^t)}{y}) \end{aligned}$$

$$\bar{R}(s^t) + \bar{R}(s^t)\hat{R}(s^t) = 1 + r^*(s^t) + \bar{r}^*(s^t)\hat{r}^*(s^t) - \phi_r\frac{\bar{a}(s^t)}{y} - \frac{\bar{a}(s^t)}{y}\phi_r\left(2 - \frac{\bar{a}(s^t)}{y}\right)$$

$$\hat{R}(s^t) = \frac{\bar{r}^*}{\bar{R}}\hat{r}^*(s^t) - \frac{1}{\bar{R}}\phi_r\frac{\bar{a}}{\bar{y}}(2 - \frac{\bar{a}}{\bar{y}})$$

$$0 = -\hat{R}(s^t) + \frac{\bar{r}^*}{\bar{R}}\hat{r}^*(s^t) - \frac{1}{\bar{R}}\phi_r\frac{\bar{a}}{\bar{y}}(2 - \frac{\bar{a}}{\bar{y}})\hat{a}(s^t) \tag{84}$$

Agregados económicos:

$$GDP = p_n(s^t)y_n(s^t) - m_n(s^t) - m_x$$

$$\overline{GDP}(1+\widehat{GDP}) = \bar{p}_x\bar{y}_x(1+\hat{p}_n(s^t)+\hat{y}_n(s^t))+\bar{p}_x\bar{y}_x((\hat{p}_x(s^t)+\hat{y}_x(s^t))-\bar{m}_n\hat{m}_n(s^t)-\bar{m}_x\hat{m}_x(s^t)$$

$$\overline{GDP}\widehat{GDP} = \bar{p}_n\bar{y}_n(\hat{p}_n(s^t)+\hat{y}_n(s^t))+\bar{p}_x\bar{y}_x(\hat{p}_x(s^t)+\hat{y}_x(s^t))-\bar{m}_n\hat{m}_n(s^t)-\bar{m}_x\hat{m}_x(s^t)$$

$$\widehat{GDP} = \frac{\bar{p}_n\bar{y}_n}{\overline{GDP}}(\hat{p}_n(s^t)+\hat{y}_n(s^t))+\frac{\bar{p}_x\bar{y}_x}{\overline{GDP}}(\hat{p}_x(s^t)+\hat{y}_x(s^t))-\frac{\bar{m}_n}{\overline{GDP}}\hat{m}_n(s^t)-\frac{\bar{m}_x}{\overline{GDP}}\hat{m}_x(s^t)$$

$$0 = \frac{\bar{p}_n\bar{y}_n}{\overline{GDP}}(\hat{p}_n(s^t)+\hat{y}_n(s^t))+\frac{\bar{p}_x\bar{y}_x}{\overline{GDP}}(\hat{p}_x(s^t)+\hat{y}_x(s^t))-\frac{\bar{m}_n}{\overline{GDP}}\hat{m}_n(s^t)-\frac{\bar{m}_x}{\overline{GDP}}\hat{m}_x(s^t)-\widehat{GDP} \tag{85}$$

$$i = p_n(i_n^n(s^t) + i_n^x(s^t)) + i_n^n(s^t) + i_m^x(s^t)$$

$$\bar{i}(1 + \bar{i}(s^t)) = \bar{p}_n(1 + \hat{p}_n)(\bar{i}_n^n(1 + \hat{i}_n^n) + \bar{i}_n^x(1 + \hat{i}_n^x)) + \bar{i}_m^n(1 + \hat{i}_m^n) + \bar{i}_m^x(1 + \bar{i}_m^x)$$

$$\bar{i} + \bar{i}\hat{i}(s^t) = \bar{p}_n(\bar{i}_n^n + \bar{i}_n^x) + \bar{p}_n\hat{p}_n(\bar{i}_n^n + \bar{i}_n^x) + \bar{p}_n\bar{i}_n^n\hat{i}_n^n + \bar{p}_n\bar{i}_n^x\hat{i}_n^x + \hat{i}_m^n\bar{i}_m^n + \bar{i}_m^x + \bar{i}_m^x\bar{i}_m^x$$

$$\hat{\bar{i}}(s^t) = \bar{p}_n\frac{\bar{i}_n^n + \bar{i}_n^x}{\bar{i}}\hat{p}_n(s^t) + \frac{\bar{p}_n\bar{i}_n^n}{\bar{i}}\hat{i}_n^n(s^t) + \frac{(\bar{p}_n\bar{i}_n^x)}{\bar{i}}\hat{i}_n^x(s^t) + \frac{\bar{i}_m^n}{\bar{i}}\hat{i}_m^n(s^t) + \frac{\bar{i}_m^x}{\bar{i}}\hat{i}_m^x(s^t)$$

$$0 = \bar{p}_n\frac{(\bar{i}_n^n + \bar{i}_n^x)}{\bar{i}}\hat{p}_n(s^t)+\frac{(\bar{p}_n\bar{i}_n^n)}{\bar{i}}\hat{i}_n^n(s^t)+\frac{(\bar{p}_n\bar{i}_n^x)}{\bar{i}}\hat{i}_n^x(s^t)+\frac{\bar{i}_m^n}{\bar{i}}\hat{i}_m^n(s^t)+\frac{\bar{i}_m^x}{\bar{i}}\hat{i}_m^x(s^t)-\hat{i}(s^t) \tag{86}$$

Ecuaciones con expectativas

$0 = E_t[FFx(t+1)+GGx(t)+HHx(t-1)+JJy(t+1)+KKy(t)+LLz(t+1)+MMz(t)]$

Bonos

$$0 = E[\hat{M}(s^{t+1}) + \hat{R}(s^t)] \tag{87}$$

Stock de capital

$$0 = E\left\{\begin{array}{c} (1-\delta_m^x + \alpha_k^x(1-w)\frac{(\bar{p}_x\bar{y}_x)}{\bar{k}_m^x})\bar{M}\hat{M}(s^{t+1}) + \alpha_k^x(1-w)\bar{M}\frac{(\bar{p}_x\bar{y}_x)}{\bar{k}_m^x}(\hat{p}_x(s^{t+1}) + \hat{y}_x(s^{t+1}) - \\ -\hat{k}_m^x(s^t)) + 2\bar{M}\phi_m^x(\hat{k}_m^x(s^{t+1}) - \hat{k}_m^x(s^t)) - 2\phi_m^x(\hat{k}_m^x(s^t) - \hat{k}_m^x(s^{t-1}) \end{array}\right\} \tag{88}$$

$$0 = E\left\{\begin{array}{c} (1-\delta_m^n + \alpha_k^n(1-w)\frac{(\bar{p}_n\bar{y}_n)}{\bar{k}_m^n})\bar{M}\hat{M}(s^{t+1}) + \alpha_k^n(1-w)\bar{M}\frac{(\bar{p}_n\bar{y}_n)}{\bar{k}_m^n}(\hat{p}_n(s^{t+1}) + \hat{y}_n(s^{t+1}) - \\ -\hat{k}_m^n(s^t)) + 2\bar{M}\phi_m^n(\hat{k}_m^n(s^{t+1}) - \hat{k}_m^n(s^t)) - 2\phi_m^n(\hat{k}_m^n(s^t) - \hat{k}_m^n(s^{t-1}) \end{array}\right\} \tag{89}$$

$$0 = E\left\{\begin{array}{c} (1-\delta_n^x + \alpha_k^x w\frac{(\bar{p}_x\bar{y}_x)}{\bar{p}_n\bar{k}_n^x})\bar{M}(\hat{M}(s^{t+1}) + \hat{p}_n(s^{t+1}) - \hat{p}_n(s^t)) + \alpha_k^x w\bar{M}\frac{(\bar{p}_x\bar{y}_x)}{\bar{p}_n\bar{k}_n^x}(\hat{p}_x(s^{t+1}) + \hat{y}_x(s^{t+1}) - \\ -\hat{p}_n(s^{t+1}) - \hat{k}_n^x(s^t)) + 2\bar{M}\phi_n^x(\hat{k}_n^x(s^{t+1}) - \hat{k}_n^x(s^t)) - 2\phi_n^x(\hat{k}_n^x(s^t) - \hat{k}_n^x(s^{t-1}) \end{array}\right\} \tag{90}$$

$$0 = E\left\{\begin{array}{c} (1-\delta_n^n + \alpha_k^n w\frac{\bar{y}_n}{\bar{k}_n^n})\bar{M}\hat{M}(s^{t+1}) + \alpha_k^n w\bar{M}\frac{\bar{y}_n}{\bar{k}_n^n}(\hat{y}_n(s^{t+1}) - \hat{k}_n^n(s^t)) + \\ +2\bar{M}\phi_n^n(\hat{k}_m^n(s^{t+1}) - \hat{k}_n^n(s^{t+1})) - 2\phi_n^n(\hat{k}_n^n(s^t) - \hat{k}_n^n(s^{t-1}) \end{array}\right\} \tag{91}$$

Pricing kernel

$$0 = E\left[-\hat{M}(s^{t+1}) + \hat{u}(s^{t+1}) - \hat{u}(s^t) + \hat{C}(s^t) - \hat{C}(s^{t+1}) + \hat{P}(s^t) - \hat{P}(s^{t-1})\right]$$

Variables de estado exógenos

$$z(t+1) = NNz(t) + \varepsilon(t+1) \; con \; E_t \left[\varepsilon(t+1)\right] = 0$$

$$\hat{p}_x(s^{t+1}) = \rho_p \hat{p}_x(s^t) + \varepsilon_p(s^{t+1}) \tag{92}$$

$$\hat{r}^*(s^{t+1}) = \rho_r r^*(s^t) + \varepsilon_r(s^{t+1}) \tag{93}$$

$$\hat{z}_x(s^{t+1}) = \rho_{zx} \;\; \hat{z}_x(s^t) + \varepsilon_{zx}(s^{t+1}) \tag{94}$$

$$\hat{z}_x(s^{t+1}) = \rho_{zn} \;\; \hat{z}_n(s^t) + \varepsilon_{zn}(s^{t+1}) \tag{95}$$