

**Tipo de documento:** Tesis de Grado



**Departamento de Economía.** Licenciatura en Economía

# El momento óptimo para invertir en un jugador de fútbol: opciones reales vs selección adversa

**Autoría:** Rodríguez Bugada, Facundo; Castarés, Lautaro; Romero, Candelaria; Skutnik, Leandro; Yunes, Ailén

**Año:** 2024

## ¿Cómo citar este trabajo?

Rodríguez Bugada, F., et al. (2024). "El momento óptimo para invertir en un jugador de fútbol: opciones reales vs selección adversa". [Tesis de grado. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella.

<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/13125>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la Universidad Torcuato Di Tella bajo una licencia Creative Commons Atribución/Reconocimiento - No comercial - Compartir igual 4.0 internacional

**Dirección:** <https://repositorio.utdt.edu>

# EL MOMENTO ÓPTIMO PARA INVERTIR EN UN JUGADOR DE FÚTBOL: OPCIONES REALES VS SELECCIÓN ADVERSA

Facundo Rodríguez Bugada    Lautaro Castarés    Candelaria Romero  
Leandro Szkutnik    Ailén Yunes

**Universidad Torcuato Di Tella**

Licenciatura en Economía - Departamento de Economía

Tutora: Marzia Raybaudi

9 de Agosto de 2024

## **Resumen**

Este estudio se centra en la determinación del contrato óptimo para un jugador de fútbol, integrando la investigación sobre inversión bajo incertidumbre con la literatura existente sobre selección adversa. Cuando el club diseña el contrato, determinando salario y duración del mismo, no conoce la naturaleza (buena o mala) del jugador en cuestión, y el desafío principal radica en establecer estas variables del contrato de manera que sea adecuado para cada tipo de jugador, antes de que se manifieste su calidad efectiva y los beneficios económicos que aportará al club.

# 1. Introducción

Una de las decisiones estratégicas más importantes que enfrentan los clubes de fútbol profesional es la contratación de jugadores. Dada la elevada incertidumbre sobre el futuro rendimiento de los futbolistas, especialmente en el caso de promesas juveniles, y la asimetría informativa entre jugadores y clubes, los equipos se enfrentan a un problema de selección adversa. Los clubes deben invertir grandes sumas de dinero en el fichaje de estos jóvenes talentos, sin tener la certeza de que desarrollarán todo su potencial. Una mala contratación puede tener graves consecuencias financieras y deportivas para la entidad deportiva.

La presente tesis se propone estudiar esta problemática, generada por la existencia de beneficios que son variables aleatorias y de costos fijos para la adquisición de jugadores, analizando en profundidad el problema que enfrentan los clubes al intentar identificar el verdadero potencial de los jugadores de fútbol. Aplicando un enfoque teórico que incluye inversión bajo incertidumbre y selección adversa, se buscan entender los factores que afectan a los clubes a la hora de seleccionar talento joven. Luego de plantear este problema, el presente trabajo desarrolla un modelo teórico para abordarlo. En la sección 2, se describe el modelo y los supuestos, estableciendo los tipos de jugadores y analizando sus costos de esfuerzo y la evolución de sus salarios. Posteriormente, se examinan tres escenarios diferentes: un modelo con simetría informativa, uno con asimetría informativa y contrato separador, y otro con asimetría informativa sin contrato separador. En cada caso, se analizan los contratos ofrecidos por el club y los equilibrios resultantes. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos en estos escenarios y se presentan conclusiones basadas en el análisis realizado.

## 2. Descripción del Modelo y Supuestos

El presente trabajo se centra en resolver el problema de un club de fútbol interesado en adquirir a un jugador que se encuentra en condición de "libre", es decir, que no está afiliado a ninguna otra institución deportiva, en el contexto de un mercado de competencia perfecta.

Con el propósito de simplificar el análisis, establecemos dos tipos de jugadores: Bueno y Malo. Suponemos que con una probabilidad  $\psi$ , el jugador es Bueno, y con una probabilidad  $(1 - \psi)$ , el jugador es Malo. La diferencia entre estos dos perfiles de deportistas se puede ver tanto en el costo por el esfuerzo que enfrenta cada jugador, como en la evolución de sus salarios respectivos.

En primer lugar, el costo por esforzarse, el cual es denotado con un  $\bar{\alpha}$  para el tipo de jugador Malo y  $\underline{\alpha}$  para el tipo de jugador Bueno, será tal que  $\bar{\alpha} > \underline{\alpha}$ . Por otro lado, definimos a los salarios como un proceso estocástico. En particular, suponemos que estos siguen una Brownian Motion Geométrica cuyos parámetros difieren según el tipo de jugador. Conjeturamos que los salarios para cada clase de futbolista varían de la siguiente manera:

$$dw_i = \phi_i w_i dt + \eta_i w_i dz_i \quad \text{con } i = M, B \quad (1)$$

La diferencia entre ambos procesos estocásticos viene dada por el drift. Para el jugador Bueno, el drift será  $\bar{\phi}$ ; mientras que, para el jugador Malo, el drift será  $\underline{\phi}$ , con  $\bar{\phi} > \underline{\phi}$ . Más adelante veremos cómo estas dos variables ( $\phi$  y  $\alpha$ ) inciden sobre los resultados del problema.

Por el lado del club, denotamos al beneficio cómo  $\pi$ , y este es una función de  $w$ . Es decir,  $\pi = g(w)$ , donde  $g$  tiene inversa:  $w = g^{-1}(\pi)$ . Como  $\pi$  depende positivamente de  $w$ , y  $w$  sigue una brownian motion,  $\pi$  también sigue una brownian motion y el drift

también será positivo ( $\pi = g(\bar{w}^+)$ ), por lo que  $\pi$  crece con el tiempo. Por lo tanto, los beneficios del club varían de la siguiente manera:

$$d\pi = \mu\pi dt + \sigma\pi dz \quad (2)$$

Para simplificar el análisis, nos enfocamos en el estudio de 3 casos/juegos. En el primero, el club conoce el tipo del jugador, mientras que en los otros dos no conoce la naturaleza de este. Basándose en la información disponible en cada una de estas partes, el club ofrecerá distintos contratos, y obtendremos diferentes equilibrios y resultados.

En particular, se desarrollarán tres entornos:

- Un modelo con simetría informativa.
- Un modelo con asimetría informativa y contrato separador.
- Un modelo con asimetría informativa y sin contrato separador.

Para cada caso, la evolución del juego será la misma. En primer lugar, la naturaleza elige qué tipo de jugador será el futbolista en cuestión y el jugador se entera. Luego, el club (contando o no con esta información) diseña un contrato que le ofrecerá al jugador. Se establecen los umbrales: los beneficios esperados tales que se compra ( $\bar{\pi}$ ) y se vende al jugador ( $\underline{\pi}$ ). Estos umbrales además implican una duración esperada del contrato, es decir, el período esperado durante el cual el club tendrá al jugador en su posesión, durante el cual le pagará un salario  $w$ . Además, el club incurre en un costo fijo  $P_1(e)$ , que representa el precio de compra del jugador, pagado íntegramente al jugador en el momento de la compra, y análogamente, recibirá una suma  $P_2$  al momento de su venta. Finalmente, el contrato es presentado al jugador, y este decide si acepta o no la oferta del club, además de elegir cuanto se esfuerza. Además, su esfuerzo impactará directamente en su utilidad y en los beneficios del club, a través de  $P_1(e)$  (más adelante

veremos de qué manera).

Tras resolver todos los casos, se compararán los resultados obtenidos y se presentará una sección de estática comparativa para analizar las implicaciones de los diferentes escenarios considerados.

### 3. Problema del Jugador

El problema del jugador es decidir si acepta el contrato ofrecido o lo rechaza. Para esto, maximiza su utilidad esperada desde el momento de compra hasta el momento de venta (el tiempo durante el cual se le pagará un salario) eligiendo un nivel de esfuerzo, denotado por  $e$ , dadas las variables  $\underline{w}$  y  $\bar{w}$  (elegidos previamente por el club). Notar que el club determina el valor umbral del salario para la entrada y salida del jugador, y luego con la BMG se encuentra el valor esperado del momento de entrada y salida ( $t_1$  y  $t_2$ )

El esfuerzo tiene dos efectos contrapuestos: por un lado, influye positivamente en el salario que el jugador recibe durante el contrato; por el otro, impacta negativamente en la utilidad esperada del jugador debido al costo asociado con el esfuerzo, representado por  $\alpha$ . Si el jugador es Bueno, el costo del esfuerzo será bajo; si el jugador es Malo, el costo será alto.

El problema del jugador luce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \max_e \int_{t_1}^{t_2} [\mathbb{E}(u(w_i(t), e_i) - \alpha_i e_i) e^{-\rho t}] dt + P_1(e) e^{-\rho t_1} \\ & \text{sujeto a} \\ & \begin{cases} dw_i = \phi_i w_i dt + \eta_i w_i dz \\ U(\cdot) \geq \bar{U}_i \quad (\text{Asumimos que } e^* \text{ cumple la restricci3n y luego verificamos}) \\ w_i(t) = w_0 e^{[(\phi_i - \frac{\sigma^2}{2})t + \eta_i z(t)]} \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Donde:

- $\mathbb{E}$  es el operador de esperanza.
- $u(\cdot)$  es la funci3n de utilidad.
- $\alpha_i$  es el costo del esfuerzo.
- $\rho$  es la tasa de descuento.
- $\phi_i$  y  $\eta_i$  son par3metros del proceso estoc3stico que describe la evoluci3n del salario.
- $dz$  es el t3rmino de variaci3n del movimiento browniano.

Partiendo de la Brownian Motion Geometrica de nuestro modelo, obtenemos el resultado de la 3ltima forma de  $w_i(t)$  en el ap3ndice.

Asumiremos ahora que  $u(x, y) = xy$ , por lo que tendremos que  $u(w_i(t), e_i) = w_i(t)e_i$ . La definimos as3 ya que impactar3 positivamente en nuestra utilidad la realizaci3n del salario y un salario mas alto, y a su vez un mayor esfuerzo que en un futuro sea observable, traer3 mas recompensa personal.

Reemplazamos con la forma de  $w_i$ , y asumimos que  $P_1(e) = ce_i$ . Esto es porque a mayor esfuerzo, mayor va a ser el precio de compra inicial:

$$\max_e \int_{t_1}^{t_2} \left[ \mathbb{E} \left( w_0 e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2})t + \eta_i z(t)} - \alpha_i e_i \right) e^{-\rho t} \right] dt + ce_i e^{-\rho t_1} \quad (4)$$

Para la condición de primer orden del problema, usamos la Regla de Leibniz, y recordamos que los  $t_1$  y  $t_2$  son tomados como dados en este problema:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} \mathbb{E}(w_0 e_i e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2})t + \eta_i z(t)} - \alpha_i) dt + ce^{-\rho t_1} = 0 \quad (5)$$

Con operación de esperanza, y con  $\mathbb{E}(z(t)) = 0, \forall t$ , obtenemos la siguiente relación:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} [w_0 e_i e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2})t} - \alpha_i] dt + ce^{-\rho t_1} = 0 \quad (6)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} \alpha_i dt = \int_{t_1}^{t_2} w_0 e_i e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2} - \rho)t} dt + ce^{-\rho t_1} \quad (7)$$

Con operación de integrales se tiene lo siguiente:

$$\alpha_i \frac{1}{\rho} [e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}] = w_0 e_i \frac{1}{\frac{\eta_i^2}{2} - \phi_i + \rho} [e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2} - \rho)t_1} - e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2} - \rho)t_2}] + ce^{-\rho t_1} \quad (8)$$

Definimos la siguiente equivalencia por notación  $\xi_i \equiv \frac{1}{\frac{\eta_i^2}{2} - \phi_i + \rho} [e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2} - \rho)t_1} - e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2} - \rho)t_2}] + ce^{-\rho t_1}$ , con  $\xi_i(\phi_i, \eta_i, \rho, t_1, t_2)$ .

$$e_i^*(\phi_i, \eta_i, \rho, t_1, t_2, \alpha_i) = \frac{\alpha_i}{w_0 \xi_i \rho} [e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}] \quad (9)$$

Notar lo siguiente:

- Cuanto mayor sea el costo asociado a esforzarse, menor va a ser el esfuerzo empleado. Esto se debe a que  $\xi_i$  es negativo ya que se asume que  $\frac{\eta_i^2}{2} - \phi_i + \rho < 0$ , y a su vez la resta de esperanzas es siempre positiva dado que  $t_1 < t_2$ .
- La diferencia entre el salario de salida y el de entrada, es decir, la duración esperada del contrato, va a tener dos efectos contrapuestos en el esfuerzo. Esto es porque si aumenta la diferencia, va a ser mayor el tiempo que va a estar incurriendo en los costos del esfuerzo, pero por otro lado mayor las veces que recibirá beneficios esperados.

En nuestro modelo, las variables  $\phi_i, \eta_i, \rho, \alpha_i$  son exógenas, y las variables de tiempo  $t_1, t_2$  son tomadas como dadas por el jugador, pero son una decisión del club. Estas son variables esperadas para el agente, ya que el contrato tiene un umbral de beneficios, que una vez dada la realización de la Brownian Motion de los beneficios, obtendríamos el  $t_1, t_2$  real.

Lo que haremos a continuación es pos de la solución de nuestro modelo es dejar al esfuerzo óptimo dependiendo de los umbrales de beneficios y variables exógenas, en vez de las variables de tiempo, ya que el club va a decidir sobre los umbrales y va a internalizar la decisión del jugador (agente).

Tal como se muestra en el apéndice, tenemos que  $\mathbb{E}(T) = \ln\left(\frac{\bar{w}}{w_0}\right) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}$ . por ende, nuestro  $\mathbb{E}(t_1) = \ln\left(\frac{w}{w_0}\right) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}$ , y  $\mathbb{E}(t_2) = \ln\left(\frac{\bar{w}}{w_0}\right) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}$ .

Lo último que falta para que el esfuerzo dependa de los umbrales de beneficios, es usar la relación de la función de salarios con la de beneficios. Tenemos que  $g(w) = \pi$ , y como  $g$  tiene inversa,  $g^{-1}(\pi) = w$ . Asumimos esa forma para los beneficios ya que asumimos que por un lado los beneficios generan un costo para el club, pero a su vez generan un beneficio, ya que el rendimiento del jugador depende intrínsecamente del

salario. A mayor valoración del mercado por el jugador ( $w$ ), mayor será su rendimiento y los beneficios que le genere al club. La simplificación en nuestro modelo hace que los beneficios dependan positivamente con una forma funcional de  $\pi = g(w)$ . Lo usamos en nuestro problema:

$$\xi_i \equiv \frac{1}{\frac{\eta_i^2}{2} - \phi_i + \rho} \left[ e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2} - \rho) \ln(\frac{g^{-1}(\pi)}{g^{-1}(\pi_0)}) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}} - e^{(\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2} - \rho) \ln(\frac{g^{-1}(\bar{\pi})}{g^{-1}(\pi_0)}) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}} \right] + c e^{-\rho \ln(\frac{g^{-1}(\pi)}{g^{-1}(\pi_0)}) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}} \quad (10)$$

$$e_i^*(\phi_i, \eta_i, \rho, \bar{\pi}, \underline{\pi}, \alpha_i) = \frac{\alpha_i}{w_0 \xi_i \rho} \left[ e^{-\rho \ln(\frac{g^{-1}(\pi)}{g^{-1}(\pi_0)}) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}} - e^{-\rho \ln(\frac{g^{-1}(\bar{\pi})}{g^{-1}(\pi_0)}) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}} \right] \quad (11)$$

Ahora, queremos darle una forma a  $g(x)$  y a nuestro  $\pi_0$  inicial. Suponemos que  $g(x) = ax + b$  lineal se mueve de esa manera, y además que  $b = 0$  ( $a \neq 0$ , y  $w_0$  es exógeno).

$$g(w) = aw = \pi$$

$$w = \frac{\pi}{a}$$

Para las condiciones iniciales, tenemos lo siguiente:

$$w_0 = \frac{\pi_0}{a}$$

En el apéndice, además, se muestra que bajo estos supuestos los drifts de los beneficios y salarios se igualan, por lo que  $\mu = \phi$ , y que  $\sigma = \eta$ .

Para los umbrales, tenemos que:

$$\bar{w} = \frac{\bar{\pi}}{a}, \underline{w} = \frac{\underline{\pi}}{a}$$

Finalmente, con estas igualdades, obtenemos el esfuerzo óptimo:

$$\xi_i \equiv \frac{1}{\frac{\sigma_i^2}{2} - \mu_i + \rho} \left[ e^{(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} - \rho) \ln(\frac{\pi}{\pi_0}) \frac{1}{\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}}} - e^{(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} - \rho) \ln(\frac{\bar{\pi}}{\pi_0}) \frac{1}{\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}}} \right] + c e^{-\rho \ln(\frac{\pi}{\pi_0}) \frac{1}{\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}}} \quad (12)$$

$$e_i^*(\phi_i, \eta_i, \rho, \bar{\pi}, \underline{\pi}, \alpha_i) = \frac{\alpha_i}{2\xi_i\rho} \left[ e^{-\rho \ln(\frac{\pi}{\pi_0}) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}} - e^{-\rho \ln(\frac{\bar{\pi}}{\pi_0}) \frac{1}{\phi_i - \frac{\eta_i^2}{2}}} \right] \quad (13)$$

Finalmente, el esfuerzo depende de variables exógenas  $(\phi_i, \eta_i, \rho, \alpha_i)$ , y de variables endógenas al problema del club, que va a estar eligiendo  $(\bar{\pi}, \underline{\pi})$ .

## 4. Problema del Club bajo Simetría Informativa

En esta sección consideramos que el club conoce las variables  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $e$  para cada jugador en cada momento del tiempo. El primer problema que deberá resolver el agente principal (el club), es determinar si es óptimo, o no, comprar al jugador  $i$ , conociendo su costo de compra  $P_1(e)$  y el precio que obtendría por su venta  $P_2$ .

Con esta información y los supuestos del paper, definimos  $\bar{w}$  y  $\underline{w}$ . El primero representa el salario por el que el club está dispuesto a comprar al jugador, mientras que el segundo indica el salario por el cual decide venderlo. Una vez hallados los  $w$ , podremos determinar a partir de estos los flujos de beneficios  $\underline{\pi}$  y  $\bar{\pi}$ .

Siguiendo Dixit y Pindyck, definimos  $F(\pi)$  como el valor de la opción de esperar, una función del valor presente de los flujos de beneficios. Aplicando los resultados que derivaron en su investigación a nuestro problema, buscamos  $V^*$ , el valor en el cual se decide comprar al jugador en cuestión.

## 4.1. Entrada

Dado el proceso estocástico de los beneficios, en cada momento del tiempo el club se pregunta si comprar o no al jugador de futbol a un precio  $P_1(e)$ , sabiendo que luego posee la opción de venderlo a un precio  $P_2$ . Decimos entonces que en cada momento del tiempo, el club posee el valor de la opción de esperar.

$$F_{\text{ent}}(\pi) = \max\{\pi - P_1(e), \frac{1}{1 + \rho\Delta t} \mathbb{E}(F(\pi + \Delta\pi))\} \quad (14)$$

Matemáticamente, el valor de la opción se computa como el máximo entre el beneficio "neto" de poseer al jugador en el club hoy y el valor de la opción de esperar de mañana, traído a valor presente. Sabemos que existe un momento  $t_1$  para el cual  $\pi$  cruza el umbral  $\bar{\pi}$  y se ejecuta la compra. Antes de cruzar el umbral, se dice que la opción está en la región de continuación. En otras palabras, el club continua esperando. Para dicha región vale lo siguiente:

$$F_{\text{ent}} = \frac{1}{1 + \rho\Delta t} \mathbb{E}(F_{\text{ent}}(\pi + \Delta\pi)) \quad (15)$$

Despejando obtenemos la ecuación de Bellman o condición de no arbitraje para el valor de la opción de entrar:

$$(1 + \rho\Delta t)F_{\text{ent}} = \mathbb{E}(F_{\text{ent}}(\pi + \Delta\pi))$$

$$\rho F_{\text{ent}} \Delta t = \mathbb{E}(F_{\text{ent}}(\pi + \Delta\pi)) - F_{\text{ent}}$$

$$\rho F_{\text{ent}} \Delta t = \mathbb{E}(F_{\text{ent}}(\Delta\pi)) \quad (16)$$

$$\rho F_{\text{ent}} dt = \mathbb{E}(F_{\text{ent}}(d\pi)) \quad (17)$$

$$\rho F_{\text{ent}} dt = \mathbb{E}(dF_{\text{ent}}) \quad (18)$$

Aplicamos el Lema de Ito a la condición obtenida

$$dF = F'(\pi)d\pi + \frac{1}{2}F''(\pi)(d\pi)^2 \quad (19)$$

Utilizando que los beneficios del club se mueven conforme a una brownian motion geométrica  $d\pi = \pi_i\mu_i dt + \sigma\pi_i dz$ , podemos concluir que  $(d\pi)^2 = (\sigma\pi_i)^2 dt$ . Incorporamos esto en la ecuación previa para obtener:

$$dF = F'(\pi) (\mu_i\pi_i dt + \sigma\pi_i dz) + \frac{1}{2}F''(\pi) (\sigma\pi_i)^2 dt \quad (20)$$

Tomamos esperanza y despejamos para  $F_{\text{ent}}$ :

$$\mathbb{E}(dF) = F_\pi \mu \pi dz + \frac{1}{2}F_{\pi\pi} \sigma^2 \pi^2 dt \quad (21)$$

$$\rho F^{\text{ent}}(\pi) dt = F_\pi \mu \pi dz + \frac{1}{2}F_{\pi\pi} \sigma^2 \pi^2 dt$$

$$\rho F^{\text{ent}}(\pi) = F_\pi \mu \pi + \frac{1}{2}F_{\pi\pi} \sigma^2 \pi^2 \quad (22)$$

Notar que se describe una ecuación diferencial homogénea de segundo grado. Proponemos entonces una solución a la ecuación en diferencias y resolvemos:

$$F^{\text{ent}}(\pi) = A\pi^\theta \quad (23)$$

$$\rho A\pi^\theta = A\theta\pi^{\theta-1}\mu\pi + \frac{1}{2}A\theta\pi^{\theta-2}(\theta-1)\sigma^2\pi^2$$

$$\rho A\pi^\theta = A\theta\pi^\theta\mu + \frac{1}{2}A\theta\pi^\theta(\theta-1)\sigma^2$$

$$\rho = \theta\mu + \frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2$$

$$\theta_{1,2} = -\frac{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \pm \sqrt{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 - 4\rho\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (24)$$

Por lo tanto, obtuvimos los parámetros necesarios para definir a  $F^{ent}(\pi)$ :

$$F^{ent}(\pi) = A_1\pi^{\theta_1} + A_2\pi^{\theta_2} \quad / \quad \theta_1 < 0, \theta_2 > 0 \quad \wedge \quad F_{ent}(0) = 0 \quad \wedge \quad A_1 = 0 \quad (25)$$

## 4.2. Salida

Habiendo resuelto el problema de compra, nos enfocamos en resolver el problema de la venta. En particular, buscamos el valor de la opción de salir, a través de la función del valor del proyecto.

$$V_t = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i \pi_{t+i}\right\} V_t = \pi_t + \frac{1}{1+\rho} \mathbb{E}(V_{t+1}) \quad (26)$$

Llevandolo a tiempo continuo y usando que  $(dt)^j \rightarrow 0$  con  $j > 1$ , conseguimos una nueva condición de no arbitraje para la venta.

$$\begin{aligned} V_t &= \pi_t dt + \frac{1}{1+\rho dt} \mathbb{E}(V_{t+dt}) \\ V_t(1+\rho dt) &= \frac{1}{1+\rho dt} \pi_t dt + \mathbb{E}(V_{t+dt}) \\ V_t + \rho V_t dt &= (1+\rho dt) \pi_t dt + \mathbb{E}(V_{t+dt}) \\ \rho V_t dt &= \pi_t dt + \rho \pi_t (dt)^2 + \mathbb{E}(V_{t+dt} - V_t) \\ \rho V_t dt &= \pi_t dt + \mathbb{E}(dV) \end{aligned} \quad (27)$$

Obtenemos  $\mathbb{E}(dV)$ , utilizando Lema de Ito

$$\begin{aligned}
dV &= V_\pi d\pi + \frac{1}{2}V_{\pi\pi}(d\pi)^2 \\
dV &= V_\pi(\pi_i\mu_i dt + \sigma\pi_i dz) + \frac{1}{2}V_{\pi\pi}(\pi_i\mu_i dt + \sigma\pi_i dz)^2 \\
dV &= V_\pi\pi_i\mu_i dt + V_\pi\sigma\pi_i dz + \frac{1}{2}V_{\pi\pi}(\sigma\pi_i)^2 dt \\
\mathbb{E}(dV) &= V_\pi\pi_i\mu_i dt + \frac{1}{2}V_{\pi\pi}(\sigma\pi_i)^2 dt
\end{aligned} \tag{28}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned}
\rho V_t dt &= \pi_t dt + V_\pi\pi_i\mu_i dt + \frac{1}{2}V_{\pi\pi}(\sigma\pi_i)^2 dt \\
\rho V_t &= \pi_t + V_\pi\pi_i\mu_i + \frac{1}{2}V_{\pi\pi}(\sigma\pi_i)^2
\end{aligned} \tag{29}$$

Obtenemos una ecuación no homogénea de 2do grado. Proponemos una solución particular  $K\pi$  para la parte no homogénea.

$$\begin{aligned}
\rho K\pi &= \pi + K\pi\mu \\
(\rho - \mu)K\pi &= \pi \\
K &= \frac{1}{\rho - \mu}
\end{aligned} \tag{30}$$

Proponemos la solución particular  $B\pi^\beta$  para la parte no homogénea.

$$\begin{aligned}
\rho B\pi^\beta &= B\beta\pi^{\beta-1}\mu\pi + \frac{1}{2}B\beta\pi^{\beta-2}(\beta-1)\sigma^2\pi^2 \\
\rho B\pi^\beta &= B\beta\pi^\beta\mu + \frac{1}{2}B\beta\pi^\beta(\beta-1)\sigma^2 \\
\rho &= \beta\mu + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\sigma^2
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\beta_{1,2} = -\frac{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \pm \sqrt{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 - 4\rho\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sigma^2} \tag{32}$$

Entonces el valor del proyecto tiene la siguiente forma funcional:

$$V(\pi) = \frac{\pi}{\rho - \mu} + B_1\pi^{\beta_1} + B_2\pi^{\beta_2} \quad (33)$$

Notar que la primera parte (la solución de la parte no homogénea) es el valor presente descontado del flujo de beneficios. Mientras que la segunda parte de la solución es el valor de la opción de salir.

Sabemos que vale:

$$\lim_{\pi \rightarrow +\infty} F_{exit}(\pi) = 0 \quad (34)$$

Por lo cual,  $B_1 = 0$  ( $\beta_1 > 0$ ). Finalmente, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para resolver:

$$\begin{aligned} V(\bar{\pi}) - P_1(e) &= F_{ent}(\bar{\pi}) \\ V_{\pi}(\bar{\pi}) &= F_{ent, \pi}(\bar{\pi}) \\ V(\underline{\pi}) - P_2^B &= F^{ent}(\underline{\pi}) \\ V_{\pi}(\underline{\pi}) &= F_{\pi}^{ent}(\underline{\pi}) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\pi}}{\rho - \mu} + B_2\bar{\pi}^{\beta_2} - P_1(e) &= A_2\bar{\pi}^{\theta_2} \\ \frac{1}{\rho - \mu} + \beta_2 B_2\bar{\pi}^{\beta_2-1} &= \theta_2 A_2\bar{\pi}^{\theta_2-1} \\ \frac{\pi}{\rho - \mu} + B_2\underline{\pi}^{\beta_2} - P_2 &= A_2\underline{\pi}^{\theta_2} \\ \frac{1}{\rho - \mu} + \beta_2 B_2\underline{\pi}^{\beta_2-1} &= \theta_2 A_2\underline{\pi}^{\theta_2-1} \end{aligned} \quad (36)$$

Con las ecuaciones anteriores quedan caracterizadas las soluciones  $A_2, B_2, \underline{\pi}, \bar{\pi}$

## 5. Problema del Club con Asimetría Informativa (I)

A partir de esto, comenzamos por el caso sin simetría informativa. Esto implica que el club no sabe que tipo de jugador está contratando, pero el jugador sí conoce si es Bueno o Malo.

Cabe aclarar que, al igual que antes, se diferencia a los jugadores Buenos de los Malos mediante su drift y su costo de esforzarse ( $\underline{\alpha}$  para jugadores de tipo Bueno, y  $\bar{\alpha}$  para tipo Malo).

También perciben un salario  $w_i$  durante su paso por el club ( $t_2^i - t_1^i$ ) que, como antes, sigue un proceso browniano:

$$dw_i = \phi_i w_i dt + \eta w_i dz$$

Para sortear el obstáculo que presenta la falta de información, el club arma dos contratos, con el objetivo de que los jugadores se filtren por sí solos, creando así un equilibrio separador. Para hacer esto, entran en juego dos restricciones adicionales:

$$\text{Compatibilidad de Incentivos} \quad \begin{cases} U_B(t_2^B, t_1^B, w_B, e_B) \geq U_B(t_2^M, t_1^M, w_B, e_B) \\ U_M(t_2^M, t_1^M, w_M, e_M) \geq U_M(t_2^B, t_1^B, w_M, e_M) \end{cases}$$

Estas restricciones buscan evitar que haya incentivos a copiarse entre distintos tipos de jugadores. Podemos ver que cada tipo de jugador tendrá un nivel de utilidad mayor siempre que elija el contrato que fue diseñado para él.

Como los procesos de los jugadores son independientes, podemos tomar el nuevo valor de la opción de esperar como una ponderación de los valores de la opción de esperar para cada uno. Vamos a seguir igualando la opción de esperar con el beneficio

que nos generaría el jugador para cada período por separado (lo mismo para salida). Pero ahora vamos a incluir las restricciones de incentivos para que, dado que ahora coexisten los dos tipos de contrato, ningún potencial jugador Bueno o Malo quiera elegir el contrato no diseñado para él.

$$V = \alpha V_B + (1 - \alpha) V_M$$

Con todo esto en mente, buscamos

$$\{\underline{\pi}_B, \underline{\pi}_M, \bar{\pi}^B, \bar{\pi}^M\}$$

Sabiendo que:

$$d\pi_B = \mu_B \pi_B dt + \sigma \pi_B dZ$$

Y

$$d\pi_M = \mu_M \pi_M dt + \sigma \pi_M dZ$$

Y que es necesario que  $P_{2,M}^S < P_{2,B}^S$ , es decir, no solo el precio del jugador Bueno es mayor, si no que hay incentivo a vender después al jugador Malo (debido a su  $P_2$  bajo).

El club resuelve igual que en el caso anterior. Para decidir si comprar, sabemos que el club compara en cada momento el valor de la opción de poder comprar el jugador contra el beneficio que este le daría en ese mismo período. Esta decisión también depende del factor de descuento del club, ya que tiene un trade-off entre esperar y no incurrir en los costos, o incurrir en los costos pero recibir los beneficios en el período corriente. Para venderlo, se compara la opción de salir y dejar de obtener sus rendimientos contra el ingreso  $P_2^i$ , en el punto en que estos sean iguales, el jugador es vendido.

Por lo tanto, utilizando:

$$\text{Compatibilidad de Incentivos} \quad \left\{ \begin{array}{l} U_B (\bar{\pi}_2^B, \bar{\pi}_1^B, \underline{\pi}_2^B, \underline{\pi}_1^B, w_B, e_B) \geq U_B (t_2^M, t_1^M, w_B, e_B) \\ U_M (\bar{\pi}_2^M, \bar{\pi}_1^M, \underline{\pi}_2^M, \underline{\pi}_1^M, w_M, e_M) \geq U_M (t_2^B, t_1^B, w_M, e_M) \end{array} \right.$$

Y

$$\rho F^{ent}(\pi) = F_\pi \mu \pi + \frac{1}{2} F_{\pi\pi} \sigma^2 \pi^2 \quad (37)$$

Las condiciones terminales que van a determinar los umbrales de entrada y salida para el problema  $(B_2, A_2, \bar{\pi}^B, \underline{\pi}^M)$  son:

- (1)  $V(\bar{\pi}) - P_1(e) = F_{ent}(\bar{\pi})$
- (2)  $V_\pi(\bar{\pi}) = F_{ent, \pi}(\bar{\pi})$
- (3)  $V(\underline{\pi}) - P_2^B = F^{ent}(\underline{\pi})$
- (4)  $V_\pi(\underline{\pi}) = F_\pi^{ent}(\underline{\pi})$

$$(B_2, A_2, \bar{\pi}^M, \underline{\pi}^M)$$

- (1)  $V(\bar{\pi}) - P_1(e) = F_{ent}(\bar{\pi})$
- (2)  $V_\pi(\bar{\pi}) = F_{ent, \pi}(\bar{\pi})$
- (3)  $V(\underline{\pi}) - P_2^M = F^{ent}(\underline{\pi})$
- (4)  $V_\pi(\underline{\pi}) = F_\pi^{ent}(\underline{\pi})$

Aquí obtenemos una solución abierta, que será usada para llevar a cabo estática comparativa de forma numérica (ver sección Estática Comparativa).

## 6. Problema del Club con Asimetría Informativa

### (II)

En este contexto, tenemos que el club no conoce la realización de la naturaleza, por lo que no conoce la forma funcional de la Brownian Motion del jugador. Además, en este problema, el club no busca ofrecer un contrato distinto para cada tipo posible de jugador. En cambio, va a ofrecer un único contrato, que va a aceptar cualquiera de los dos jugadores. La idea es comparar este resultado, con los de los otros contextos, y hacer estática comparativa. Igual al problema original, buscamos

$$(\bar{\pi}^*, \underline{\pi}^*)$$

Ademas, el club va a percibir una Brownian Motion Geométrica que va a ser una ponderación de la de los jugadores, ya que elige no distinguirlos y ofrecer un mismo contrato:

$$d\tilde{\pi} = (\alpha\bar{\mu} + (1 - \alpha)\underline{\mu})\omega dt + \sigma\omega dz$$

Como última aclaracion, el club tampoco va a poder determinar el Precio final al que va a vender al jugador, dado que no conoce si sera Bueno o Malo. A priori, y dado que no busca separarlos e inducir al cada tipo a elegir el contrato diseñado para ellos, puede encontrar su mejor estimación para el precio de venta que será:

$$\tilde{P}_2 = \alpha P_2^A + (1 - \alpha) P_2^B$$

Como primeras intuiciones, entendemos que por un lado, el jugador Bueno va a estar peor que en el caso con simetría, y que el jugador Malo, en cambio, mejor. Además, buscaremos comparar este caso con el caso en el que se busca una separación y una

oferta para cada tipo de jugador. Tal vez incluir restricciones extras para poder hacer que el Bueno elija el contrato diseñado para él, hace que se incurra en un costo mayor al de simplemente ofrecer un contrato único y esperar a que toque el jugador Bueno, con mayores beneficios esperados para el club.

Finalmente, podemos buscar las soluciones para los umbrales de los beneficios en este contexto. Será igual que para el problema con simetría informativa, pero con las nuevas variables de  $\tilde{P}_2(e)$  y  $\tilde{\pi}$ .

Primero, encontramos la nueva función de valor de esperar, la función de entrada, y en cada período el club se pregunta si es mejor comprarlo, o seguir esperando.

En el óptimo, se cumple la ecuación de Bellman o de no arbitraje:

$$\rho F_{\text{ent}} \Delta t = \mathbb{E} (F_{\text{ent}} (\Delta V)) \quad (38)$$

Luego, aplicamos el Lema de Ito para encontrar el cambio de de función de salida:

$$\rho F^{\text{ent}}(\tilde{\pi}) = F_{\tilde{\pi}} \mu \tilde{\pi} + \frac{1}{2} F_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}} \sigma^2 \tilde{\pi}^2 \quad (39)$$

Las condiciones terminales que van a determinar los umbrales de entrada y salida para el problema sin simetría informativa, y sin separación de contrato, son las siguientes:

- (1)  $V(\tilde{\pi}) - P_1(e) = F_{\text{ent}}(\tilde{\pi})$
- (2)  $V_{\tilde{\pi}}(\tilde{\pi}) = F_{\text{ent}, \tilde{\pi}}(\tilde{\pi})$
- (3)  $V(\tilde{\pi}) - \tilde{P}_2 = F^{\text{ent}}(\tilde{\pi})$
- (4)  $V_{\tilde{\pi}}(\tilde{\pi}) = F_{\tilde{\pi}}^{\text{ent}}(\tilde{\pi})$

Notar:  $\tilde{P}_1 = c(\psi e_i^A(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}) + (1 - \psi) e_i^B(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}))$

## 7. Resultados

### 7.1. Caso de simetría informativa

Empezamos con el caso más simple, donde el principal puede distinguir el jugador Bueno del Malo. Para este caso, la intuición viendo el problema del agente nos dice que si el costo por esforzarte aumenta marginalmente, entonces el esfuerzo del jugador bajará. Lo mismo podemos pensar para el caso donde aumenta marginalmente el drift de la brownian motion: al tener un salario que crece más rápido que antes, el agente preferirá reducir su nivel de esfuerzo. Además, como es esperable por la literatura escrita sobre el tema, los beneficios del club bajo simetría informativa son mayores al caso asimétrico.

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>
$\mu_a$	0.5
$\mu_b$	0.4
$p2_a$	1.5
$p2_b$	1.5
$\alpha_a$	0.25
$\alpha_b$	0.3
Umbral de entrada para A	1.9706
Umbral de salida para A	1.0311
Umbral de entrada para B	1.8238
Umbral de salida para B	1.0253
Esfuerzo óptimo para A	0.1202
Esfuerzo óptimo para B	0.2607
Momentos de cruce para A (entrada)	1597
Momentos de cruce para A (salida)	5848
Momentos de cruce para B (entrada)	1851
Momentos de cruce para B (salida)	4815
Utilidad de A	198.29
Utilidad de B	85.829
Beneficios con A	4387.2823
Beneficios con B	1352.88
Beneficios esperados	2263.2006
Excedente total	2382.7679

Cuadro 1: Resultados bajo Simetría Informativa

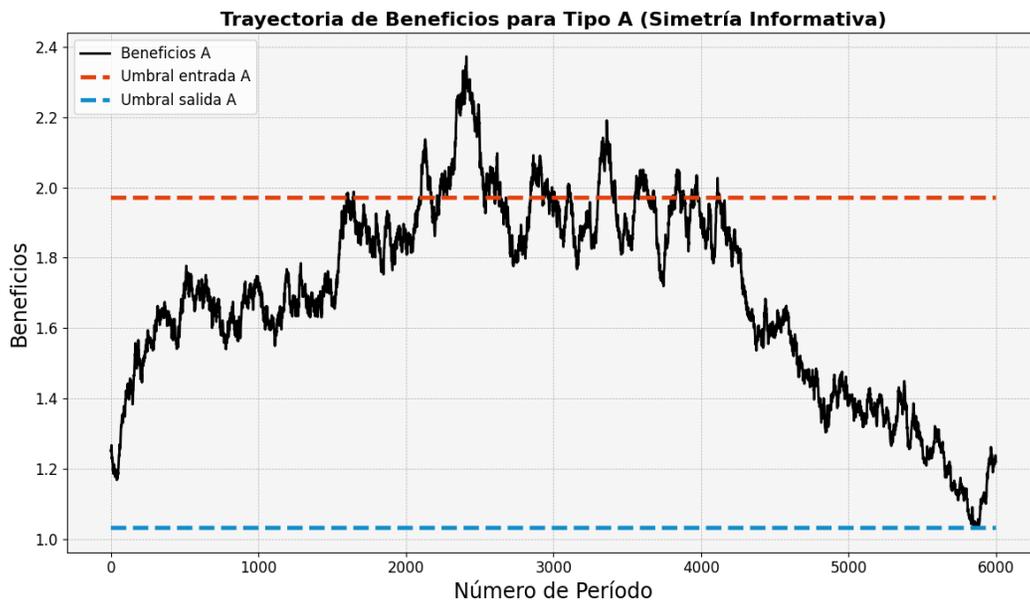


Figura 1: Realización de  $\pi$  con el jugador **Bueno** en simetría informativa

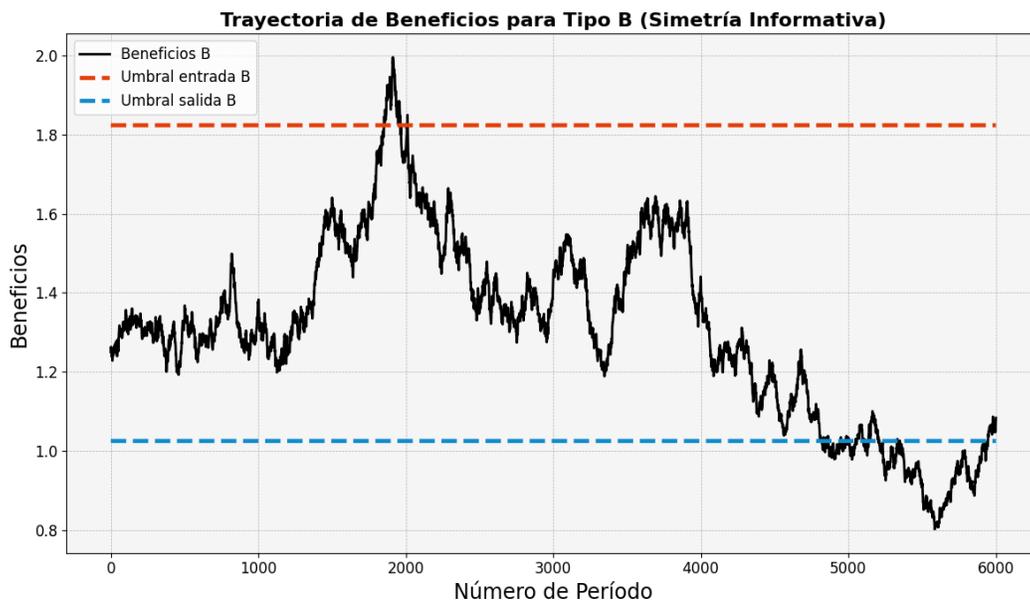


Figura 2: Realización de  $\pi$  con el jugador **Malo** en simetría informativa

## 7.2. Caso de asimetría informativa con contrato separador

Parámetro	Valor
$\mu_a$	0.5
$\mu_b$	0.4
$p2_a$	1.5
$p2_b$	1.4
$\alpha_a$	0.25
$\alpha_b$	0.3
Umbral de entrada para A	1.9706
Umbral de salida para A	1.0311
Umbral de entrada para B	1.8610
Umbral de salida para B	0.9933
Esfuerzo óptimo para A	0.1202
Esfuerzo óptimo para B	0.2741
Momentos de cruce para A (entrada)	587
Momentos de cruce para A (salida)	5127
Momentos de cruce para B (entrada)	990
Momentos de cruce para B (salida)	5778
Utilidad del Bueno	108.3948
Utilidad del Malo	183.7284
Beneficios con el Bueno	3927.3291
Beneficios con el Malo	1328.2839
Beneficios esperados	2107.9974
Excedente total	2269.1257

Cuadro 2: Resultados bajo Asimetría Informativa con Separador

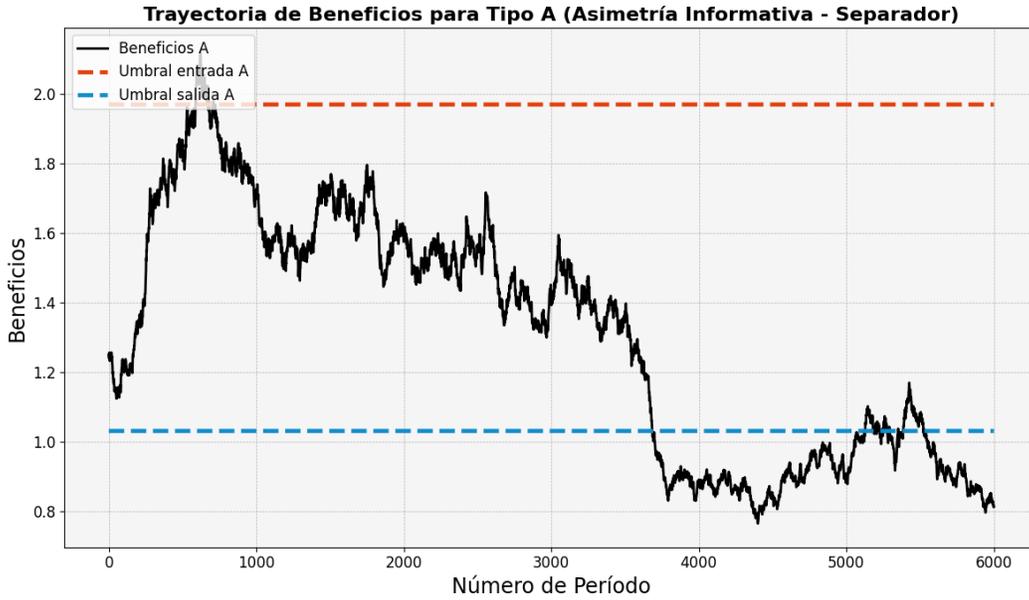


Figura 3: Realización de  $\pi$  con el jugador **Bueno** en asimetría informativa **con** separación

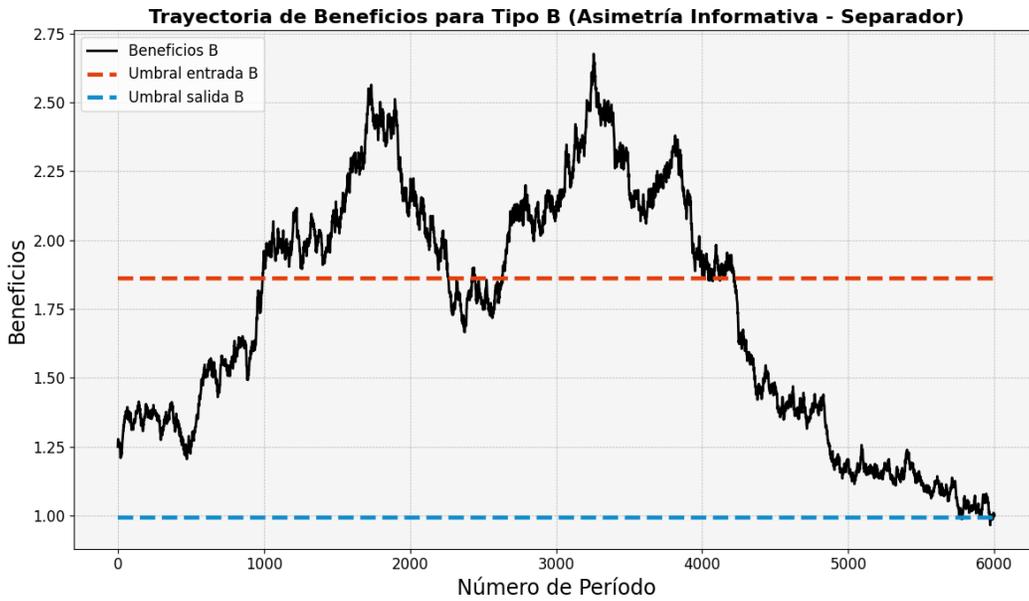


Figura 4: Realización de  $\pi$  con el jugador **Malo** en simetría informativa **con** separación

### 7.3. Caso de asimetría informativa sin contrato separador

Parámetro	Valor
prob_de_ser_Bueno	0.3
$\mu_a$	0.5
$\mu_b$	0.4
$\mu_p$	0.43
$p^2_a$	1.5
$p^2_b$	1.4
$p^2_p$	1.43
$\alpha_a$	0.25
$\alpha_b$	0.3
$\alpha_p$	0.285
Umbral de entrada para ambos	1.9706
Umbral de salida para ambos	1.0311
Esfuerzo óptimo para A	0.1292
Esfuerzo óptimo para B	0.2458
Momentos de cruce para A (entrada)	424
Momentos de cruce para A (salida)	4958
Momentos de cruce para B (entrada)	1996
Momentos de cruce para B (salida)	4674
Utilidad del Bueno	105.3942
Utilidad del Malo	129.3812
Beneficios con el Bueno	2341.1283
Beneficios con el Malo	2190.1392
Beneficios esperados	2235.4359
Excedente total	26 2357.6210

Cuadro 3: Resultados bajo Asimetría Informativa sin Separador

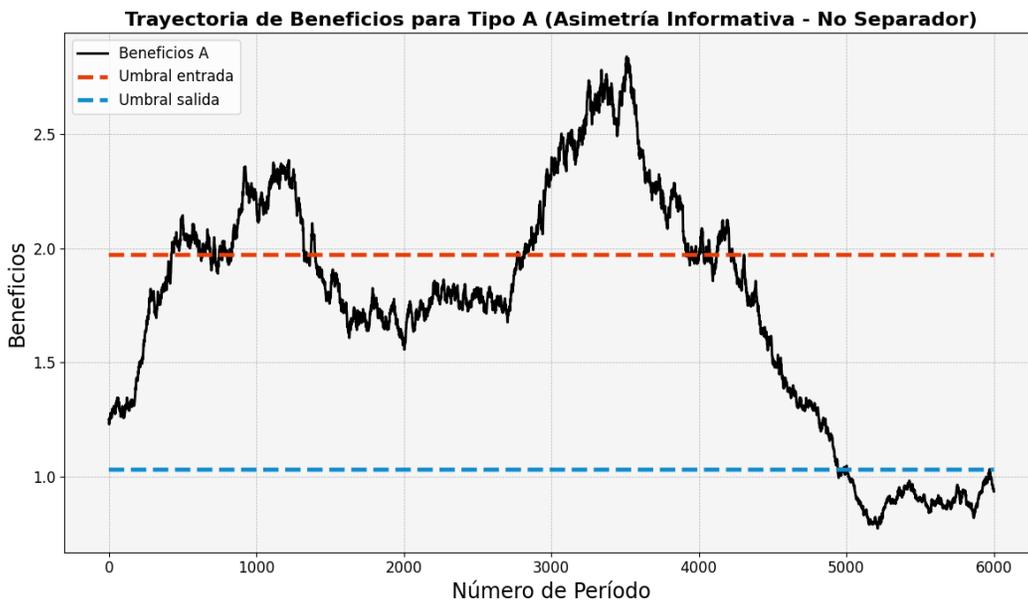


Figura 5: Realización de  $\pi$  con el jugador **Bueno** en asimetría informativa **sin** separación

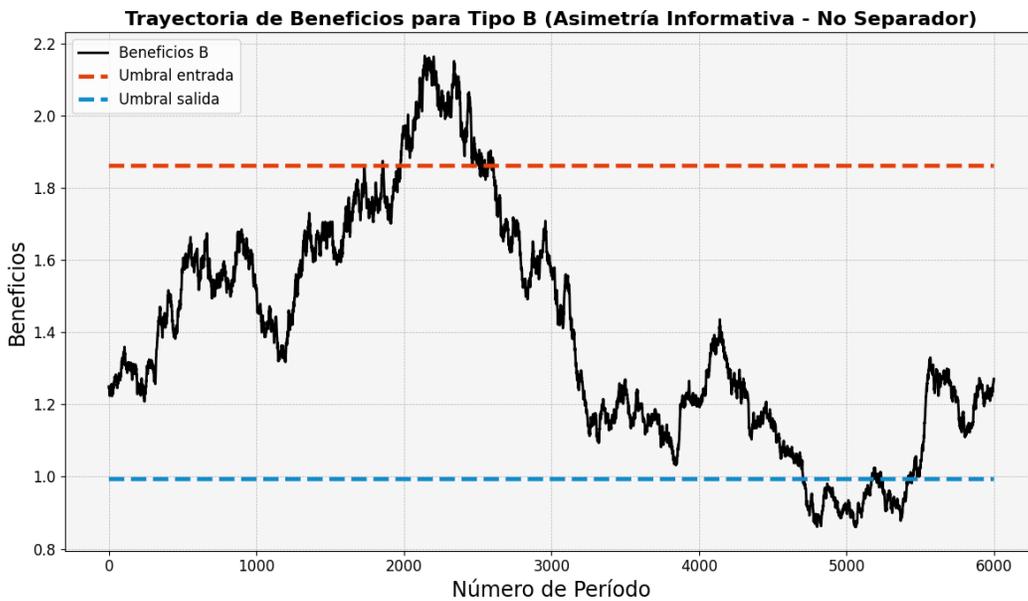


Figura 6: Realización de  $\pi$  con el jugador **Malo** en simetría informativa **sin** separación

## 8. Simulación

Simulamos 500 realizaciones estocásticas para cada tipo de jugador y para cada tipo de escenario para evaluar la veracidad de nuestras hipótesis iniciales. Para modelar el problema elegimos los parámetros exógenos de la siguiente manera:

- $\sigma = 0,5$
- $\rho = 0,9$
- $a = 2$
- $N = 5000$
- $periodos = 6000$
- $c = 0,02$
- $\pi_0 = 1,25$
- $\psi = 0,3$

Al jugador Bueno lo denotamos como el tipo A y al jugador Malo, tipo B. En todos los escenarios y casos elegimos los parámetros de manera tal que  $\mu_A > \mu_B$  y  $\alpha_A < \alpha_B$ . Para los escenarios con simetría, tomamos un valor de  $P_2$  con tal que sea igual para ambos jugadores.

En todos los casos de información asimétrica con contrato agrupador observaremos que los umbrales de entrada y salida para cada jugador son iguales. Al diseñarlo, el club incorpora a  $\mu_p$  en su problema de determinación del momento óptimo para invertir, donde  $\mu_p$  es  $\psi\mu_a + (1 - \psi)\mu_b$ .

Presentamos la tabla (4) con los resultados obtenidos:

Parámetro	SI	AI separador	AI agrupador
$\mu_a$	0.50	0.50	0.50
$\mu_b$	0.40	0.40	0.40
$\mu_p$	-	-	0.33
$p2_a$	1.50	1.50	1.50
$p2_b$	1.50	1.40	1.40
$p2_p$	-	-	1.43
$\alpha_a$	0.25	0.25	0.25
$\alpha_b$	0.30	0.30	0.30
$\alpha_p$	-	-	0.28
Umbral de entrada para A	1.97	1.97	1.97
Umbral de salida para A	1.03	1.03	1.03
Umbral de entrada para B	1.82	1.86	1.97
Umbral de salida para B	1.02	0.99	1.03
Esfuerzo óptimo para A	0.12	0.12	0.11
Esfuerzo óptimo para B	0.26	0.27	0.21
<b>Promedios Tipo A</b>			
$t1$	663.00	1443.00	1810.00
$t2$	4979.00	4387.00	4678.00
<i>duración</i>	4316.00	2944.00	2868.00
$U$	178.94	108.40	103.95
$\Pi$	4308.48	3907.23	2249.13
<b>Promedios Tipo B</b>			
$t1$	3058.00	425.00	644.00
$t2$	4793.00	4918.00	5155.00
<i>duración</i>	1735.00	4493.00	4511.00
$U$	95.67	186.76	123.49
$\Pi$	1249.89	1309.30	2100.42
Beneficios esperados	2167.47	2088.68	2145.04
Excedente total	2288.12	2251.93	2262.67

Cuadro 4: Simulación inicial con  $\psi = 0.3$

Llamamos beneficios esperados a:  $\psi\Pi_A+(1-\psi)\Pi_B$ . Llamamos beneficios acumulados a  $\Pi_j$  donde

$$\Pi_j = \int_{t_1}^{t_2} \pi_j * e^{-\rho t} dt + P_2 * e^{-\rho t_2} - P_1(e_j) * e^{-\rho t_1} \text{ para } j \in \{A, B\}$$

Llamamos excedente total a:  $\psi(U_A + \Pi_A) + (1 - \psi)(U_B + \Pi_B)$ .

A primera vista podemos notar que el excedente total del caso con información simétrica supera cualquiera de los dos casos con información asimétrica. Lo mismo ocurre con los beneficios esperados del club. Dicho resultado resulta intuitivo de la siguiente manera. Cuando el tipo de jugador es información pública, el club puede diseñar contratos (por ende umbrales de entrada y salida) específicos para cada jugador y sus respectivas distribuciones BM. Dados los costos fijos, en cada momento del tiempo, se pregunta si es óptimo ejecutar la opción de entrada, comprando al jugador; o la opción de salida, vendiéndolo. En cambio, en el caso asimétrico separador, sabemos que diferenciamos  $P_2$  para cada jugador, con tal que se cumpla la restricción de compatibilidad de incentivos para el jugador de tipo  $B$ . Esta nueva restricción, implica cambiar la solución óptima que encontramos en simetría. Necesariamente, al incorporar una nueva restricción al problema, el club se encuentra peor.

En segundo lugar, se observa en la tabla (4) que la utilidad del jugador de tipo A es mayor con simetría. En otras palabras, al jugador Bueno le conviene la transparencia de información. Lo opuesto le sucede al jugador de tipo B. En simetría se encuentra con una utilidad inferior en comparación a lo que podría obtener en cualquiera de los dos casos con asimetría. Además, es relevante notar que el jugador Malo siempre se esfuerza más que el jugador Bueno.

Por último, bajo simetría, observamos que la duración promedio del contrato del Bueno es mayor a la duración promedio del jugador Malo. Con asimetría, se invierte la relación,

el Malo tiene un promedio de duración del contrato mayor. Esto era exactamente lo que esperábamos que sucediera cuando disminuimos a  $P_2$ . Dado una menor ganancia fija con la venta, aumentan los incentivos a mantener contratos de mayor duración con el jugador B.

Dada esta configuración particular de parámetros, de esta simulación podemos concluir que el club elegirá un contrato agrupador.

## 9. Estática Comparativa

En esta sección, llevaremos a cabo un análisis de estática comparativa enfocado en la variación de dos parámetros clave:  $\psi$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ . Este análisis se aplicará a los tres escenarios planteados previamente, permitiéndonos observar cómo los cambios en estos parámetros afectan el comportamiento y los resultados de cada juego. En particular, queremos ver cómo es afectada la duración del contrato ( $t_2 - t_1$ ) cuando movemos estas variables, para cada escenario y para cada tipo de jugador (Bueno o Malo). Al final del análisis, realizaremos una comparación exhaustiva para identificar en qué casos se maximiza el excedente total de los agentes. A través de este enfoque, buscaremos ofrecer insights valiosos sobre la interacción entre estos parámetros en el problema planteado. Siempre que comparemos será contra el caso *benchmark* reportado en la tabla 4.

### 9.1. Caso 1: $\psi$

Manteniendo todo lo demás constante, modificamos el parámetro  $\psi$ , la probabilidad de que el jugador sea de tipo Bueno, a 0,7 y repetimos la simulación:

<b>Parámetro</b>	<b>SI</b>	<b>AI separador</b>	<b>AI agrupador</b>
$\mu_a$	0.40	0.40	0.40
$\mu_b$	0.30	0.30	0.30
$\mu_p$	-	-	0.37
$p2_a$	1.50	1.50	1.50
$p2_b$	1.50	1.40	1.40
$p2_p$	-	-	1.47
$\alpha_a$	0.25	0.25	0.25
$\alpha_b$	0.30	0.30	0.30
$\alpha_p$	-	-	0.26
Umbral de entrada A	1.96	1.86	1.86
Umbral de salida A	1.03	0.99	0.91
Umbral de entrada B	1.81	1.75	1.86
Umbral de salida B	1.04	0.95	0.91
Esfuerzo óptimo A	0.13	0.13	0.46
Esfuerzo óptimo B	0.25	0.28	2.44
<b>Promedios Tipo A</b>			
$t1$	665.00	1473.00	1608.00
$t2$	4818.00	4282.00	4200.00
<i>duración</i>	2654.00	2609.00	2592.00
$U$	174.94	109.39	122.49
$\Pi$	4301.58	3898.39	2839.38
<b>Promedios Tipo B</b>			
$t1$	3045.00	431.00	1524.00
$t2$	4769.00	4818.00	4148.00
<i>duración</i>	4316.00	4043.00	26.00
$U$	94.98	182.85	203.11
$\Pi$	1239.12	1311.28	2783.94
<b>Beneficios esperados</b>	3382.84	3122.25	2822.75
<b>Excedente total</b>	3533.79	3253.68	2969.43

Cuadro 5: Simulación con  $\psi = 0,7$

En primera instancia, notamos que para este conjunto particular de parámetros, los beneficios esperados del caso asimétrico separador superan a los beneficios esperados del caso no separador, por lo tanto el club elegirá ofrecer dos contratos distintos. Además, se mantiene la regla de que el club y el jugador Bueno se encuentran con su utilidad máxima bajo simetría.

Cuando comparamos el cuadro (5) contra el caso base con  $\psi = 0,3$  (4), los valores que principalmente cambian son los resultados del escenario agrupador, ya que la probabilidad de obtener un jugador Bueno define los umbrales de entrada y salida que afectarán a ambos jugadores.

Cuando aumenta la probabilidad de que el jugador sea de tipo Bueno, por consecuencia inmediata, se reduce la probabilidad de que el jugador sea Malo. En el escenario separador, esto implica que los beneficios relativamente más altos de tener al jugador Bueno son ponderados por un parámetro  $\psi$  mayor; mientras que los beneficios relativamente menores de tener un jugador Malo pierden peso. En otras palabras, el aumento en  $\psi$  genera incentivos a la separación, ya que la pérdida en beneficios del club (cuando le toca el jugador Malo) no tiene tanta relevancia ni peso por ser un escenario poco probable.

## 9.2. Caso 2: Varianza alta y drifts bajos

Parámetro	SI	AI Separador	AI agrupador
$\mu_a$	0.36	0.36	0.36
$\mu_b$	0.27	0.27	0.27
$\mu_p$	-	-	0.29
$p^2_a$	1.50	1.50	1.50
$p^2_b$	1.50	1.40	1.30
$p^2_p$	-	-	1.36
$\alpha_a$	0.25	0.25	0.25
$\alpha_b$	0.30	0.30	0.30
$\alpha_p$	-	-	0.28
Umbral de entrada A	1.94	1.94	1.94
Umbral de salida A	1.08	1.08	1.08
Umbral de entrada B	1.80	1.76	1.94
Umbral de salida B	1.30	1.19	1.08
Esfuerzo óptimo A	0.20	0.20	0.17
Esfuerzo óptimo B	0.20	0.32	0.33
<b>Promedios Tipo A</b>			
$t_1$	662.00	1239.00	1813.00
$t_2$	5001.00	4392.00	4877.00
<i>duración</i>	4339.00	3153.00	3044.00
$U$	178.12	108.26	103.89
$\Pi$	4308.32	3906.76	2248.72
<b>Promedios Tipo B</b>			
$t_1$	3045.00	387.00	634.00
$t_2$	4829.00	4917.00	5183.00
<i>duración</i>	1784.00	4530.00	4549.00
$U$	94.77	186.02	122.61
$\Pi$	1249.15	1308.41	2100.29
<b>Beneficios esperados</b>	2166.90	2087.91	2144.82
<b>Excedente total</b>	2286.68	2250.61	2261.81

Cuadro 6: Caso no Pink

Para la simulación expuesta en (6), dado todo lo demás constante, se tomo a  $\sigma = 0,7$  y los *drifts* de ambos jugadores disminuyeron un 10 %.

En primer lugar, observamos que el excedente total en simetría es mayor que con asimetría, una característica que comparten todos los resultados vistos hasta el momento. También podemos notar que el club, dada esta configuración de parámetros, elige un contrato agrupador bajo asimetría.

Luego de disminuir la tasa de crecimiento de los beneficios para ambos estados de la naturaleza, obtenemos que el club sigue eligiendo diseñar un contrato agrupador tal como el caso base (4).

Por otro lado, nuestros agentes son neutrales al riesgo por lo que un aumento en la varianza los debería dejar indiferentes frente al caso original con  $\sigma = 0,5$ , aunque este cambio impacta directamente en el cálculo de los umbrales.

Cuando comparamos los excedentes y beneficios esperados, notamos que los valores disminuyen levemente, en comparación al caso original. Además la duración es esperada para la mayoría de los casos aumenta. Intuitivamente podríamos decir que la disminución de los drifts de cada proceso estocástico generan que en promedio se tarde más en cruzar el umbral de salida alargando la permanencia del jugador en el club.

### 9.3. Caso 3: Varianza baja y drifts altos

Parámetro	SI	AI separador	AI agrupador
$\mu_a$	0.44	0.44	0.44
$\mu_b$	0.33	0.33	0.33
$\mu_p$	-	-	0.36
$p2_a$	1.50	1.50	1.50
$p2_b$	1.50	1.40	1.30
$p2_p$	-	-	1.36
$\alpha_a$	0.25	0.25	0.25
$\alpha_b$	0.30	0.30	0.30
$\alpha_p$	-	-	0.28
Umbral de entrada A	2.51	2.51	2.51
Umbral de salida A	1.16	1.16	1.16
Umbral de entrada B	2.03	2.06	2.51
Umbral de salida B	0.95	0.91	1.16
Esfuerzo óptimo A	0.09	0.09	0.34
Esfuerzo óptimo B	0.72	0.87	1.24
<b>Promedios Tipo A</b>			
$t1$	2691.00	1723.00	1826.00
$t2$	5008.00	4429.00	4237.00
<i>duración</i>	2317.00	2706.00	2411.00
$U$	181.86	119.19	97.01
$\Pi$	4310.46	3920.98	2248.73
<b>Promedios Tipo B</b>			
$t1$	1750.00	1103.00	2045.00
$t2$	4510.00	4728.00	4768.00
<i>duración</i>	2760.00	3625.00	2723.00
$U$	97.96	209.15	109.47
$\Pi$	1257.32	1326.66	2092.10
<b>Beneficios esperados</b>	3394.52	2104.95	2139.09
<b>Excedente total</b>	2296.40	2287.12	2244.83

Cuadro 7: Caso Pink

Para la simulación expuesta en (7), dado todo lo demás constante, se tomo a  $\sigma = 0,7$  y los *drifts* de ambos jugadores aumentaron un 10 %.

A primera vista, se observa que el club, dada esta configuración de parámetros, elige un contrato separador bajo asimetría. Dado que aumentan las tasas de ambos jugadores, el club prefiere (4).

## 10. Conclusión

Este trabajo estudia la relación entre un principal (club) y un agente (potencial jugador de fútbol del club), a fin de determinar el contrato óptimo diseñado por el principal en condiciones de incertidumbre y asimetría informativa.

El primer resultado es acorde a lo que se encuentra en toda la literatura sobre asimetría informativa: la utilidad del club es mayor cuando el contrato es diseñado en condiciones de simetría informativa.

Por otro lado, en un contexto de información asimétrica la elección del contrato del club con respecto a separación o agrupación depende de los valores de los parámetros. Cuanto más alta es la probabilidad de que el jugador sea Bueno, mayor es la posibilidad de que el contrato óptimo sea separador. Esto es resultado de los menores costos asociados al diseño de un contrato que incentive al jugador Malo a elegir el esquema que fue diseñado para él, ya que es menos probable que el club incida en estos costos.

Por otro lado, como era de esperarse, observamos que cuando aumenta la tendencia de la variable aleatoria que impulsa los beneficios y, al mismo tiempo, disminuye la varianza, los beneficios del club aumentan. En estos casos de alta tendencia y baja varianza, la decisión sobre el contrato óptimo tiende a ser separadora. Este resultado se debe a que un incremento proporcional en la tendencia para ambos tipos de jugadores incrementa más los beneficios asociados a un jugador de alto rendimiento que a uno de bajo rendimiento. Por lo tanto, el club se beneficia más del aumento en el rendimiento del jugador Bueno que del jugador Malo, lo que incrementa la diferencia entre ambos tipos de jugadores y lleva al club a optar por una estrategia de separación. Mientras que, en casos de tendencias bajas (y varianzas altas), el contrato óptimo es agrupador.

En todos los casos, los umbrales elegidos para la contratación de cualquier tipo de jugador difieren de los obtenidos bajo información simétrica. En particular, cuando el

club elige contrato separador se adelanta la contratación del jugador Malo con respecto al caso de información simétrica, mientras que se retrasa la compra de un jugador Bueno. Esto se debe al diseño de un contrato que sea ‘incentive compatible’.

## 11. Anexo

### Evolución de los salarios a partir de la Brownian Motion:

Partimos del siguiente proceso estocástico para el salario  $w$ :

$$dw = \phi w dt + \eta w dz$$

Donde:

- $\phi$  es la tasa de crecimiento del salario.
- $\eta$  es la volatilidad del salario.
- $dz$  es un incremento del movimiento browniano.

El logaritmo del salario  $u(w) = \ln w$ :

Aplicando el Lema de Itô al logaritmo del salario:

$$u(w) = \ln w$$
$$du = \frac{du}{dw} \cdot dw + \frac{d^2u}{dw^2} (dw)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

Calculamos las derivadas necesarias:

$$\frac{du}{dw} = \frac{1}{w}$$
$$\frac{d^2u}{dw^2} = -\frac{1}{w^2}$$

Sustituyendo en el lema de Itô:

$$du = \frac{1}{w} (\phi w dt + \eta w dz) - \frac{1}{2w^2} \eta^2 w^2 dt$$

$$du = \phi dt + \eta dz - \frac{\eta^2}{2} dt$$

$$du = \left( \phi - \frac{\eta^2}{2} \right) dt + \eta dz$$

Integramos ambos lados desde 0 hasta  $T$ :

$$\int_0^T du = \int_0^T \left( \phi - \frac{\eta^2}{2} \right) dt + \int_0^T \eta dz$$

$$\ln w(T) - \ln w(0) = \left( \phi - \frac{\eta^2}{2} \right) T + \eta z(T)$$

Despejamos  $\ln w(T)$ :

$$\ln w(T) = \ln w(0) + \left( \phi - \frac{\eta^2}{2} \right) T + \eta z(T)$$

Finalmente, obtenemos la expresión para  $w(T)$ :

$$w(T) = w_0 \cdot e^{\left( \left( \phi - \frac{\eta^2}{2} \right) T + \eta z(T) \right)}$$

Donde  $z(T) \sim N(0, 1)$  es una variable aleatoria normalmente distribuida con media 0 y varianza 1, independiente e idénticamente distribuida en cada  $T$ .

**Relación entre la Brownian Motion de los salarios y la de los beneficios:**

$$d\pi = \mu\pi dt + \sigma\pi dz$$

Partimos del siguiente proceso estocástico para el salario  $w$ :

$$dw = \phi w dt + \eta w dz$$

Las funciones inversas para los salarios son:

$$\bar{w} = g^{-1}(\bar{\pi}); \quad \underline{w} = g^{-1}(\underline{\pi})$$

La relación entre salarios y beneficios es:

$$g(w) = aw + b = \pi \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi - b}{a} = w$$

Derivamos  $\pi$  respecto a  $w$ :

$$d\pi = a dw$$

Sustituimos el proceso estocástico del salario en la derivada:

$$d\pi = a(\phi w dt + \eta w dz)$$

Reemplazamos  $w$  en términos de  $\pi$ :

$$d\pi = a\phi \left( \frac{\pi - b}{a} \right) dt + a\eta \left( \frac{\pi - b}{a} \right) dz$$

Simplificamos las expresiones:

$$d\pi = \phi(\pi - b) dt + \eta(\pi - b) dz$$

Consideramos el caso donde  $b = 0$ :

$$d\pi = \phi\pi dt + \eta\pi dz$$

Comparando con la ecuación inicial:

$$d\pi = \mu\pi dt + \sigma\pi dz$$

Se concluye que:

$$\mu = \phi; \quad \eta = \sigma$$

### Regla de Leibniz:

Si  $f(x, y)$  es continua y  $g(x)$  y  $h(x)$  son derivables

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, t) dt \quad \text{es derivable, y:}$$

$$F'(x) = f(x, g(x))g'(x) - f(x, h(x))h'(x) + \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

### Generalización de la Regla de Leibniz:

Si  $f(x, y)$  es continua y derivable respecto a  $z$  y, además, sean  $g(x)$  y  $h(y)$  derivables:

$\Rightarrow I(x, y, z) = \int_{h(y)}^{g(x)} f(z, t) dt$  es derivable respecto a  $x$  e  $y$  y si  $F(z, t)$  cumple que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(z, t) = f(z, t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial t}(z, g(x))g'(x) = f(z, g(x))g'(x) \\ \frac{\partial I}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{\partial F}{\partial t}(z, h(y))h'(y) = -f(z, h(y))h'(y) \\ \frac{\partial I}{\partial z}(x, y, z) = \int_{h(y)}^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt \end{cases}$$

### Esperanza de $T$ en función de umbrales:

A continuación, mostraremos cómo obtener la esperanza de  $T$  en función del umbral  $\bar{w}$ . Partimos de la ecuación para los salarios:

$$w(T) = w_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \eta z(T)}$$

Aplicamos logaritmos naturales:

$$\ln(w(T)) = \ln(w_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \eta z(T)$$

Imponemos el umbral deseado para  $w$ , denotado como  $\bar{w}$ . Esto nos da:

$$\ln(\bar{w}) = \ln(w_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}(T) + \mathbb{E}[\eta z(T)]$$

Donde hemos tomado la esperanza condicional sobre  $T$ . Dado que  $\eta$  es una constante y  $z(T)$  es una variable aleatoria con esperanza cero ( $\mathbb{E}[z(T)] = 0$ ), podemos simplificar la expresión:

$$\ln(\bar{w}) = \ln(w_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}(T)$$

Resolviendo para  $\mathbb{E}(T)$ :

$$\ln\left(\frac{\bar{w}}{w_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}(T)$$

Finalmente, despejamos  $\mathbb{E}(T)$ :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\ln\left(\frac{\bar{w}}{w_0}\right)}{\mu - \frac{\sigma^2}{2}}$$

## 12. Referencias

1. Avinash K. Dixit y Robert S. Pindyck. Investment Under Uncertainty. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994. 44
2. Varian, Hal, Intermediate Microeconomics, cuarta edición, Norton, 1996
3. Gibbons, Robert: Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press, 1992.