Departamento de Economía. Licenciatura en Economía

El impacto de cambios demográficos en el ahorro agregado

Autoría: Baumgarten, María Renate; Clutterbuck, Mateo; Clutterbuck, Santiago; Fecchino, Micaela; López Olaciregui, Martina

Año: 2024

Universidad Torcuato Di tella

El impacto de cambios demográficos en el ahorro agregado

Departamento de Economía

Tesis de Grado

Licenciatura en Economía

Baumgarten	Clutterbuck	Clutterbuck	Fecchino	Lopez Olaciregui
Maria Renate	Mateo	Santiago	Micaela	Martina

Tutor: Manuel Macera

Agosto 2024

ÍNDICE

1. Introducción

Observamos que el envejecimiento de las poblaciones en el mundo es un fenómeno cada vez más presente, reflejando un cambio demográfico de alcance global. A su vez, vemos cómo estos cambios demográficos son heterogéneos entre economías emergentes y economías desarrolladas. Por otro lado, también observamos desbalances globales persistentes, los cuales reflejan diferencias estructurales en el ahorro entre países. A raíz de estas observaciones surge el propósito general de este trabajo: estudiar la relación entre el ahorro agregado y las tendencias demográficas entre países. Estudiar la relación entre ambos puede ayudar a entender y anticipar qué va a pasar en un futuro con los desbalances globales, fenómeno vinculado a las diferencias en las tasas de ahorro entre los países con distintas estructuras demográficas. Por ejemplo, economías con una alta proporción de población en edad de trabajar tienden a tener mayores tasas de ahorro, mientras que aquellas con poblaciones más envejecidas pueden ver una disminución en su capacidad de ahorro.

Tras esta hipótesis, proponemos un modelo de Overlapping Generations con dotaciones, donde hay tres generaciones que enfrentan una probabilidad de supervivencia. Definimos al periodo 0 como la niñez, el periodo 1 como la adultez y el periodo 2 la vejez. La probabilidad de supervivencia puede variar entre un período y otro, de modo que los individuos no saben en qué momento van a morir. Enfrentan un precio internacional de ahorro ya que es una economía pequeña y abierta. A diferencia del modelo tradicional de dos generaciones, este nos permite considerar perfiles de ingreso más realistas y, de esta forma, capturar de manera más precisa las dinámicas demográficas y sus efectos sobre el ahorro agregado.

A través del modelo podremos observar y estudiar dos tipos de cambios demográficos: (1) el crecimiento poblacional, y (2) la esperanza de vida que está representada en la probabilidad de supervivencia. Por otro lado, con este modelo también podremos entender qué rol juega la probabilidad de supervivencia sobre el ahorro agregado.

Nuestro trabajo nos permite establecer una relación positiva entre crecimiento poblacional y el ahorro agregado. Sin embargo, respecto a la esperanza de vida el comportamiento es ambiguo. Notamos que depende tanto del perfil de ingreso del país, cómo de su posición financiera neta. Observando el comportamiento tanto del ahorro agregado cómo del ahorro en cada período de tiempo, concluimos que el comportamiento varía según si el país es emergente o desarrollado

2. Evidencia empírica

2.1 Tendencias demográficas

En esta sección se muestra evidencia sobre dos tendencias demográficas importantes: (1) las tasas de crecimiento poblacional y (2) la esperanza de vida, comparando la experiencia de economías desarrolladas contra economías emergentes. Se utilizan datos de las Naciones Unidas.

2.1.1 Tasas de crecimiento poblacional

Promedios móviles de 10 años 1960-2020 y Proyecciones.

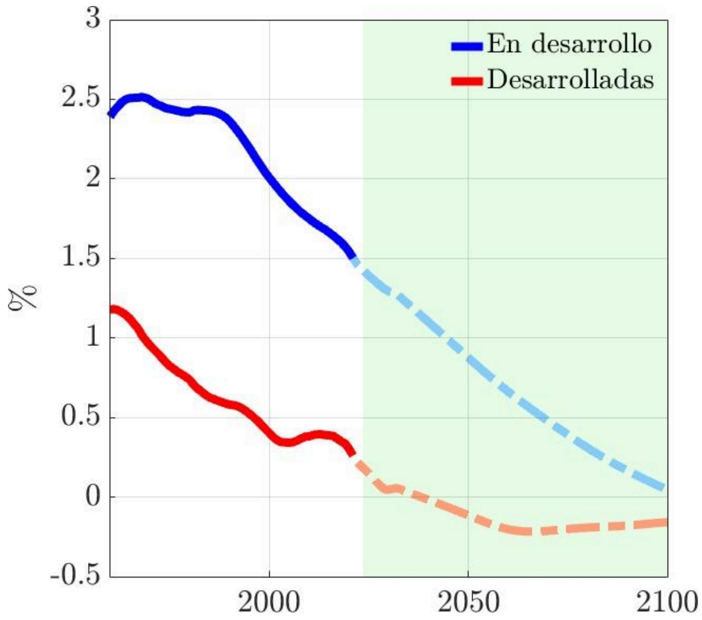


Figura 1

Fuente: UNITED NATIONS, D. O. E. AND P. D. SOCIAL AFFAIRS (2022). Elaboración propia.

La figura 1 compara las tasas de crecimiento poblacional de países desarrollados con países emergentes. Las tasas de crecimiento poblacional fueron calculadas con promedios móviles de 10 años desde 1960 hasta 2020, y se utilizaron las proyecciones de las Naciones Unidas para el periodo 2020-2100. El eje horizontal abarca los años, mientras que el eje vertical representa la tasa de crecimiento poblacional en porcentaje. Las líneas azules, correspondientes a países emergentes, muestran una tendencia inicial de altas tasas de crecimiento en la década de 1960 y disminuyen gradualmente con el tiempo, tendiendo al 0% en el futuro. Las líneas rojas, correspondientes a países desarrollados, indican tasas de crecimiento más bajas desde el inicio, con una tendencia más constante y pequeñas variaciones a lo largo del tiempo, también proyectándose hacia la estabilización en el 0%.

Las tasas de crecimiento de los países emergentes fueron significativamente más altas en la década de 1960 en comparación con los países desarrollados. Sin embargo, a partir de la tendencia decreciente en ambos grupos, las tasas de decrecimiento han ido convergiendo. Para fines de este siglo se proyectan tasas nulas de crecimiento indicando un estancamiento en la población mundial.

2.1.2 Esperanza de vida

Comparamos nuevamente economías en desarrollo o emergentes con economías desarrolladas. Nos enfocamos en dos momentos: esperanza de vida al nacer y esperanza de vida a los 25 años, que representa el comienzo de la vida laboral.

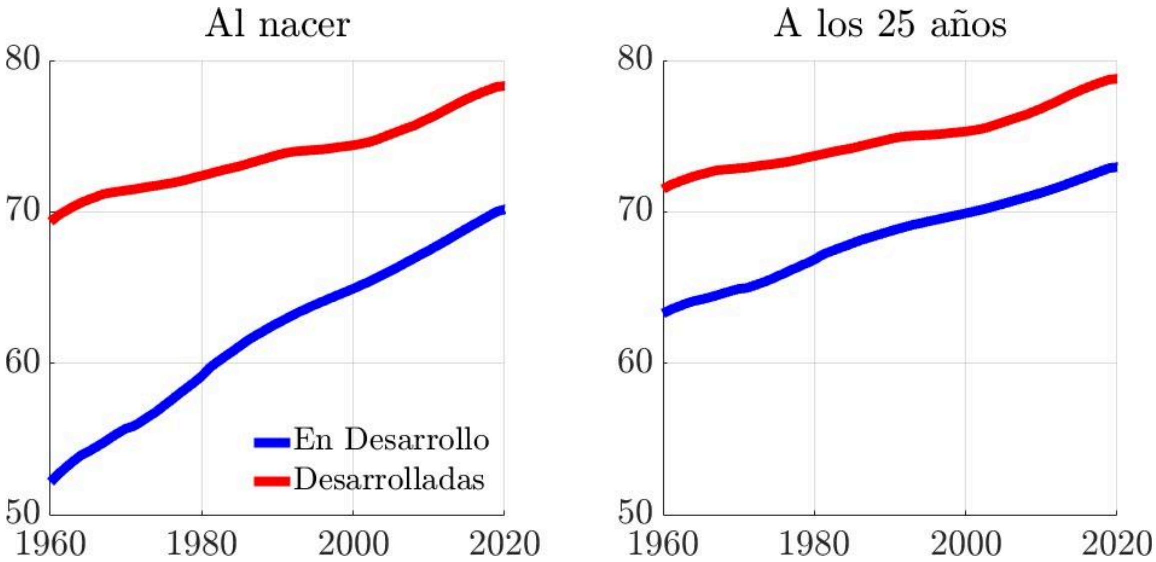


Figura 2

Fuente: UNITED NATIONS, D. O. E. AND P. D. SOCIAL AFFAIRS (2022). Elaboración propia.

Los gráficos muestran la esperanza de vida al momento de nacer y a los 25 años. El eje vertical representa la edad y el eje horizontal los años. La línea azul representa los países emergentes y la línea roja los países desarrollados. En ambos gráficos, la esperanza de vida de los países emergentes comienza significativamente más baja pero muestra una tendencia ascendente notable a lo largo del tiempo, reflejando mejoras en las condiciones de vida y acceso a atención médica. En contraste, los países desarrollados comienzan con una esperanza de vida más alta, y aunque también muestran incrementos, estos son más moderados. La brecha en la esperanza de vida entre ambos grupos se ha ido reduciendo, aunque los países desarrollados siguen liderando con una mayor esperanza de vida tanto al nacer como a los 25 años, indicando sus ventajas históricas y continuas en salud y bienestar.

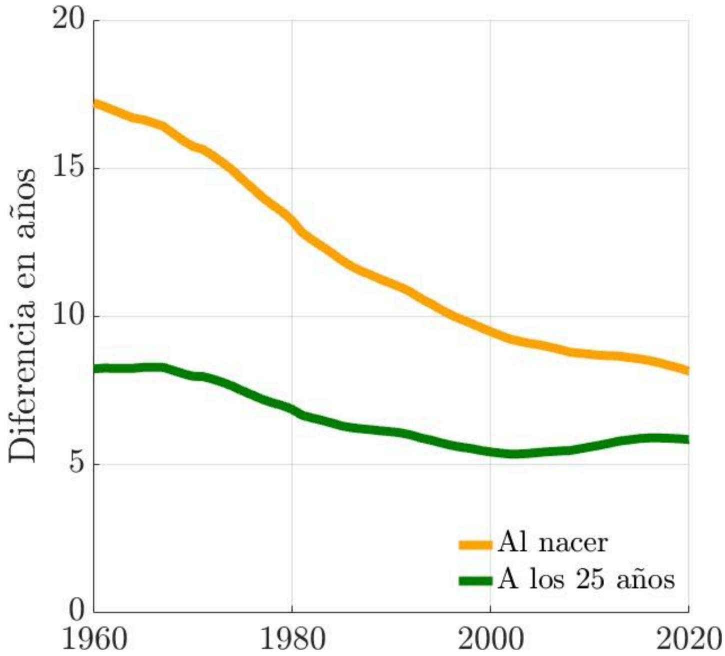


Figura 3

Fuente: UNITED NATIONS, D. O. E. AND P. D. SOCIAL AFFAIRS (2022). Elaboración propia.

Por último, para resaltar estas tendencias, en la figura 3 graficamos la diferencia en la esperanza de vida entre economías desarrolladas y economías emergentes. El eje vertical representa la diferencia de la esperanza de vida medida en años y el eje horizontal la evolución de años. La línea amarilla representa la diferencia en la esperanza de vida al nacer, mientras que la línea verde muestra la diferencia en la esperanza de vida a los 25 años. Inicialmente, ambas líneas indican una mayor brecha entre los dos grupos de economías, con diferencias significativas en la esperanza de vida. Sin embargo, a lo largo del tiempo, ambas líneas muestran una tendencia decreciente, lo que sugiere que la brecha en la esperanza de vida se ha ido reduciendo. Vemos que la diferencia en la esperanza de vida al nacer se reduce significativamente con el pasar de los años mientras que la diferencia en la esperanza de vida a los 25 años también se reduce pero de una manera más moderada.

En base a esta evidencia, buscamos desarrollar un modelo que vincule la tasa de crecimiento poblacional, esperanza de vida y ahorro agregado, dada una tasa de interés internacional.

3. Modelo - OLG

3.1 Descripción del modelo

Partimos de una economía pequeña y abierta, proponiendo un modelo de Generaciones superpuestas. La población se encuentra normalizada a 1, e incorporamos al modelo crecimiento poblacional. A diferencia del modelo tradicional, en este los individuos viven tres períodos. También suponemos que los agentes enfrentan una probabilidad de sobrevivir de un periodo a otro.

La probabilidad de sobrevivir del periodo 0 al periodo 1 es igual a s_0. Análogamente, la probabilidad de sobrevivir del periodo 1 al periodo 2 es igual a s_1. Esto implica que la esperanza de vida en nuestro modelo es:

$$Esperanza\ de\ vida \ = \ 1 + s_0 + s_0 \cdot s_1$$

Básicamente, los individuos no saben cuándo morirán y en los tres periodos enfrentan distintas probabilidades de sobrevivir. Hay incertidumbre respecto a la duración de la vida de los agentes.

Estas probabilidades se relacionan con lo comentado en la sección 2.1.2 Esperanza de vida, dado que podemos tomar s0 como la esperanza de vida al nacer y s1 con la esperanza de vida a los 25 años.

Por ser una economía pequeña y abierta, los individuos enfrentan un precio internacional del ahorro (q). Pensamos a q como la recíproca de $\frac{1}{1+r}$. Siguiendo el modelo de mercado de annuities a la Blanchard (1987) y Yaari (1965) , incorporamos la siguiente igualdad $Q_0 = s_0 q \equiv s_0 \frac{1}{1+r}$, donde Q_0 representa el precio de una annuity a la Blanchard y Yaari. Mecánicamente, la anualidad de Blanchard y Yaari es un activo financiero que asegura contra el riesgo de sobrevivir. En cuanto a la interpretación, sabemos que en cada periodo hay una probabilidad de morir. Suponemos que existe un intermediario financiero que nos vende un activo a precio Q que en el siguiente periodo nos da un retorno 1/Q. Como en cada periodo hay un individuo que muere, lo que este individuo había invertido se lo queda el intermediario. Si el intermediario diese el mismo beneficio que el mercado, generaría ganancia ya que se queda con el dinero de aquel individuo que murió. Por competencia, baja el precio hasta que la ganancia del intermediario sea nula. El activo que siempre está es el precio Q. La idea es que el intermediario reparta el dinero entre los que sobreviven, ofreciendo un poco más que el profit.

Volviendo a nuestro modelo, sabemos que por ser una economía pequeña, la tasa q está dada, y no depende de las decisiones de los agentes de consumo y ahorro.

Los agentes tienen dotaciones θ_i en los periodos $i \in \{0, 1, 2\}$. En el primer período maximizan su consumo c_0 y la dotación de activos a_1 que quieren comprar para el siguiente período, sujetos a su dotación de activos en ese período (θ_0). En el segundo período, maximizan su consumo c_1 y la elección de ahorro para el próximo período a_2, que está sujeto a los activos a_1 que ahorraron y a su dotación del segundo periodo θ_1 . En el último período el individuo maximiza su consumo c_2 sujeto a la dotación de activos θ_2 y a los activos a_2 que ahorraron en el segundo período. Consumen un solo bien en cada período.

3.2 El problema del agente

El agente maximiza consumo intertemporal sujeto a restricciones presupuestarias: consume, ahorra a través de bonos y tiene una dotación.

$$max\ ln\, c_0 \quad + \ \beta s_0 * ln\, c_1 \quad + \ \beta^2 s_0 s_1 * ln\, c_2$$

$$s.a. \qquad c_0 + Q_0 a_1 \leq \theta_0$$

$$c_1 + Q_1 a_2 \leq \theta_1 + a_1$$

$$c_2 \leq \theta_2 + a_2$$

3.2.1 Ahorro individual

De resolver este problema de maximización, caracterizamos el ahorro individual de los individuos. Vemos que depende de la probabilidad de supervivencia s_i, el precio internacional q, y el factor de descuento β. Se verá con detalle más adelante en el documento, en la sección de 3.3 Caracterización de la solución.

Denominamos a S_0 como el ahorro individual en el primer periodo de vida, S_1 en el segundo y S_2 para el tercer periodo. Como los individuos mueren luego de vivir el tercer periodo, el ahorro en el último periodo debe ser negativo y debe cumplir que $S_2 =- S_0 - S_1$ es decir, los individuos en el último periodo desahorran.

El ahorro individual de cada cohorte será:

$S_0 = \theta_0 - c_0$

$S_1 = \theta_1 + (1 - Q_0)a_1 - c_1$

$S_2 = \theta_2 + (1 - Q_1)a_2 - c_2$

Notamos que los individuos ahorran activos para utilizar por el segundo período, siendo descontados por Q, que representa la inversa a la tasa de interés ($\frac{1}{1+r}$).

3.2.2 Ahorro agregado

Por otro lado, vemos que el ahorro agregado depende del ahorro de los individuos en cada uno de los tres períodos, teniendo en cuenta que, a diferencia del modelo tradicional, sólo una proporción de la población sobrevive en cada período. El ahorro agregado es en realidad un ahorro promedio, ponderado por la población que vive cada periodo. Donde la proporción de individuos nacidos en un mismo momento, será menor periodo a periodo. Es decir, la fracción de individuos que vivan un solo periodo será mayor a aquellos que vivan dos periodos y mayor a aquellos que vivan tres periodos.

Para obtener una expresión para el ahorro agregado necesitamos conocer la distribución etárea en el modelo.

3.2.3 Distribución etárea

Comenzamos definiendo el número de individuos con distinta probabilidad de supervivencia en un periodo.

N_0^t: *número de individuos nacidos en t que viven un período.*

N_1^t : *número de individuos nacidos en t que viven dos períodos.*

N_2^t *: número de individuos nacidos en t que viven tres períodos.*

Denominamos a *n* como la tasa de crecimiento poblacional. Luego:

$N_0^t = (1+n)N_0^{t-1}$

$N_1^t = s_0 N_0^{t-1}$

$N_2^t = s_1 N_1^{t-1}$

Como la fracción de los que sobreviven en cada periodo es constante, *n* también va a ser constante, y representa la tasa de crecimiento de la población total y de la población en cada periodo.

La población total en t es: $N_t^0 + N_{t-1}^1 + N_{t-2}^2$

Luego la distribución etaria queda de la siguiente manera:

Proporción de los individuos que en t vivieron solo un periodo:

$$\omega_0^t = \frac{N_0^t}{N_0^t+N_1^t+N_2^t} = \frac{(1+n)^2}{(1+n)^2 + s_0(1+n) + s_1 s_0}$$

Proporción de los individuos que en t vivieron dos periodos:

$$\omega_1^t = \frac{N_1^t}{N_0^t+N_1^t+N_2^t} = \frac{s_0(1+n)}{(1+n)^2 + s_0(1+n) + s_1 s_0}$$

Proporción de los individuos que en t viven en el tercer periodo:

$$\omega_2^t = \frac{N_2^t}{N_0^t+N_1^t+N_2^t} = \frac{s_1 s_0}{(1+n)^2 + s_0(1+n) + s_1 s_0}$$

La población total está definida por: $(1+n)^2 + s_0(1+n) + s_1 s_0$.

Con las proporciones etarias establecidas, definimos el ahorro agregado para cada período:

$S_t^A = \omega_0^t S_t^0 + \omega_1^t S_t^1 + \omega_2^t S_t^2$

Vemos como la expresión refleja lo planteado anteriormente, siendo una expresión de promedio ponderado. Teniendo en cuenta que definimos S_2 como $S_2 =- S_0 - S_1$, podemos caracterizar al ahorro agregado como $S_t^A = (\omega_0^t - \omega_2^t)S_t^0 + (\omega_1^t - \omega_2^t)S_t^1$ donde w es una distribución, una fracción que muestra el porcentaje sobre la edad.

3.3 Caracterización de la solución (ahorro)

$$max\ lnC_0 \ + \ \beta s_0 lnC_1 + \beta^2 s_0 s_1 lnc_2 \quad \text{s.a.} \qquad c_0 + Q_0 a_1 \leq \theta_0$$

$$c_1 + Q_1 a_2 \leq \theta_1 + a_1$$

$$c_2 \leq \theta_0 + a_2$$

Armamos la RPI: $c_0 + Q_0 c_1 + Q_0 Q_1 c_2 = \ \theta_0 + Q_0 \theta_1 + Q_0 Q_1 \theta_2$

El consumidor representativo maximiza su consumo de cada período, descontando por el tiempo e incorporando las probabilidades de supervivencia. Maximizamos la función objetivo sujeta a la restricción intertemporal (RPI) y obtenemos las condiciones de primer orden (CPO), derivando contra el consumo en cada período (c_0,c_1,c_2) y luego contra λ.

$$max\ lnc_0 \ + \ \beta s_0 lnc_1 + \beta^2 s_0 s_1 lnc_2 - \ \lambda[\ c_0 + Q_0 c_1 + Q_0 Q_1 c_2 - \ \theta_0 - Q_0 \theta_1 - Q_0 Q_1 \theta_2]$$

CPO

$$\{c_0\} \ \frac{1}{c_0} = \ \lambda$$

$$\{c_1\} \ \frac{\beta s_0}{c_1} = \ \lambda Q_0$$

$\{c_2\}$ $\frac{\beta^2 s_0 s_1}{c_2} = \lambda Q_0 Q_1$

$\{\lambda\}$ $c_0 + Q_0 c_1 + Q_0 Q_1 c_2 = \theta_0 + Q_0 \theta_1 + Q_0 Q_1 \theta_2$

Obtuvimos las condiciones de primer orden, por ser una función convexa estas son necesarias y suficientes para obtener las decisiones de consumo y ahorro.

De c_0 y c_1 obtenemos $\frac{1}{C_0} = \frac{\beta s_0}{C_1 Q_0} \Rightarrow c_0 = \frac{c_1 Q_0}{\beta s_0} \Rightarrow c_1 = \frac{\beta s_0 c_0}{Q_0}$

De c_1 y c_2 $obtenemos$ $\frac{\beta s_0}{c_1 Q_0} = \frac{\beta^2 s_0 s_1}{c_2 Q_0 Q_1} \Rightarrow c_2 = \frac{\beta s_1 c_1}{Q_1}$

Estas son las expresiones de Euler, que representan la decisión óptima de consumo intertemporal para cada período. Notamos que tiene la misma estructura entre el período 0 y 1, y el 1 y 2. Estas expresiones revelan cómo el motivo de ahorro intertemporal entre los periodos 0 y 1, y 1 y 2, no dependen de la probabilidad de supervivencia. Esto ocurre por la estructura de mercado y la anualidad a la Blanchard y Yaari planteada al comienzo $Q_0 = s_0 q \equiv s_0 \frac{1}{1+r}$.

Despejamos $c_1 y\, c_2$ en función de c_o y reemplazamos en la restricción intertemporal. Obtenemos el consumo del período 0:

$$c_0 = \frac{\theta_0 + Q_0 \theta_1 + Q_0 Q_1 \theta_2}{1 + \beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1}$$

Notamos que el consumo del período cero depende de las dotaciones de cada período, descontadas por Q (1/(1+r)), y se pondera también por las probabilidades de supervivencia. Notamos que depende negativamente de su probabilidad de sobrevivir, ya que en ese caso disminuiría su consumo inicial para suavizar su sendero de consumo a lo largo del tiempo.

Ahora planteamos el ahorro del período cero. Caracterizamos la expresión como $S_0 = \theta_0 - c_0$. La definición es muy simple, todo lo que no consume de su dotación, el agente lo ahorra.

$$S_0 = \frac{\beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1}{1 + \beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1} [\theta_0 - \frac{Q_0}{\beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1}\theta_1 - \frac{Q_0 Q_1}{\beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1}\theta_2]$$

Buscamos el ahorro del primer período: $S_1 = \theta_1 + (1 - Q_0)a_1 - c_1$.

Operando, llegamos a:

$$S_1 = \frac{1 + \beta^2 s_0 s_1}{1 + \beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1} [\frac{(\beta^2 s_0 s_1 + Q_0)\theta_1}{1 + \beta^2 s_0 s_1} - \frac{\{Q_0 \beta s_0 - \beta^2 s_0 s_1 (1 - Q_0)\}}{1 + \beta^2 s_0 s_1}\frac{\theta_0}{Q_0} - \frac{Q_0(1 - Q_0 + \beta s_0)}{1 + \beta^2 s_0 s_1}\theta_2]$$

Por último, buscamos el ahorro del período 2, $S_2 = \theta_2 + (1 - Q_1)a_2 - c_2$. Como el agente sabe que el período 2 es su último período de vida, desahorra todo lo acumulado hasta el momento. Por lo tanto $S_2 = - S_0 - S_1$. Combinando con las expresiones que encontramos anteriormente, el desahorro del último periodo es:

$$S_2 = \frac{1 + \beta\ s_0}{1 + \beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1} Q_1 [\theta_2 - \frac{\beta^2 s_0 s_1}{1 + \beta S_0}\frac{\theta_0}{Q_0 Q_1} - \frac{\beta^2 s_0 s_1}{1 + \beta s_0}\frac{\theta_1}{Q_1}]$$

Definimos el ahorro agregado

$$S_A = \omega_0 S_0 + \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2$$

El ahorro agregado es en realidad un ahorro promedio, donde la fracción de jóvenes es mayor a la de viejos.

Definimos el **ahorro agregado como proporción del producto**

Cómo es una economía sin producción, tomamos al producto como la suma de las dotaciones ponderada por la proporción etaria de cada sector:

$$\frac{S_A}{\theta_A} = \frac{\omega_0 S_0 + \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2}{\omega_0 \theta_0 + \omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_2}$$

4. Predicciones del modelo

El objetivo de esta sección es analizar cómo se comportan las variables del modelo mediante estática comparativa y simulaciones en Matlab. Buscamos entender mejor las relaciones entre probabilidad de supervivencia, dotaciones, decisiones de ahorro y consumo y las diferencias entre distintos países. Para poder observar qué efectos podrían tener los fenómenos de cambios demográficos, buscamos ver cómo reacciona la solución que encontramos en función de las distintas variables de interés.

4.1 Estática comparativa: Distribución etárea

Como primer paso queremos ver cómo se modifica la distribución etárea frente a cambios en la probabilidad de supervivencia, tanto en s_0 como en s_1. Es decir, ver qué proporción etárea se fortalece en el total de la población antes modificaciones en dichos parámetros. A su vez, calculamos la reacción de w_i respecto a n, es decir, a la tasa de crecimiento de la población.

Antes cambios en s_0, aumenta la proporción de agentes que sobreviven, por lo que aumenta w_1 y w_2 por su mayor peso en la población total y cae w_0 por el mismo motivo. Ante cambios en en s_1, aumenta w_2 y caen w_0 y w_1 por menor proporción en el total.

Con respecto a la tasa de crecimiento poblacional, aumenta la proporción del período cero. Podemos pensar en que a mayor ritmo de nacimientos, mayor proporción encontramos en el cohorte cero.

4.2 Calibrando el modelo

A continuación planteamos dos países: desarrollados y emergentes. Estos tipos de país difieren respecto de dos variables: dotaciones y probabilidad de supervivencia. La evidencia provista por Attanasio, Kitao y Violante demuestra que los países desarrollados tienen perfil de ingreso más empinado y positivo al principio, y más plano y negativo al final. Esto implica que existe una diferencia positiva significativa en el ingreso entre la niñez y la adultez, y una diferencia negativa pero moderada en el ingreso entre la adultez y la vejez. En contraste, los países emergentes tienen un perfil de ingresos positivo pero más plano al principio, y negativo pero más empinado al final. Es decir, hay poca diferencia de ingresos entre la niñez y la adultez, y mucha diferencia entre la adultez y la vejez.

En cuanto a la segunda variable, como mostramos en la sección 2.1.2 Esperanza de vida, los países desarrollados tienen mayor probabilidad de supervivencia que los países emergentes ya que suelen tener mejor calidad de vida. Teniendo en cuenta que la probabilidad de supervivencia cae con el tiempo, los países desarrollados tienen una función más plana, mientras que los emergentes más empinada.

Definimos transición demográfica como un cambio en el perfil que define las probabilidades de supervivencia, volviendo menos empinada la función de los países emergentes. Es decir, se comienzan a asimilar las probabilidades de supervivencia. En ese marco, queremos ver cómo cambia la proporción de ahorro agregado sobre el producto.

4.2.1 Definimos perfiles de ingreso:

1. País desarollado: $\theta_1 - \theta_0 > 0$ y grande, $\theta_2 - \theta_1 < 0$ pero pequeño
2. País emergente: $\theta_1 - \theta_0 \geq 0$ pero pequeño, $\theta_2 - \theta_1 < 0$ grande

Dados estos perfiles de ingresos, deducimos que los países desarrollados son deudores netos, mientras que los emergentes son acreedores netos. A su vez, estos perfiles muestran como el ingreso de los países emergentes cae con fuerza en el último período, mientras que la caída no es tan abrupta en los países desarrollados.

Vemos estática comparativa del ahorro agregado, cambios en s_0(cómo afecta a S_A, S_0, S_1, S_2)

$$\partial S_A/\partial s_0 = \partial\omega_0/\partial s_0 \partial S_0/\partial s_0 + \partial\omega_1/\partial s_0 \partial S_1/\partial s_0 + \partial\omega_2/\partial s_0 \partial S_2/\partial s_0$$

Vemos estática comparativa del ahorro agregado, cambios en s1: (como afecta a S_A, S_0, S_1, S_2)

$$\partial S_A/\partial s1 = \partial w_0/\partial s1\, \partial S_0/\partial s1 + \partial w_1\, /\partial s1\, \partial S_1/\partial s1 + \partial w_2\, /\partial s1\, \partial S_2/\partial s1$$

Para calibrar el modelo, planteamos los parámetros en Matlab y buscamos ver cómo reacciona el ahorro agregado sobre el producto para diferentes valores de probabilidad de sobrevivir.

Vemos que las reacciones dependen tanto del perfil de dotaciones como el de la probabilidad de sobrevivir.

Al elegir los perfiles de dotaciones, incorporamos que estas solo representan una proporción del ingreso total de su vida. Es decir, suman 1. De esta manera, reflejan cómo crece o decrece el ingreso de cada sector en cada país, y en qué período de su vida acumulan más o menos riqueza.

Utilizamos una combinación de diferentes perfiles de ingreso, siempre respetando el principal rasgo que diferencia a los desarrollados de los emergentes: el ingreso cae fuertemente en el último período de vida del emergente.

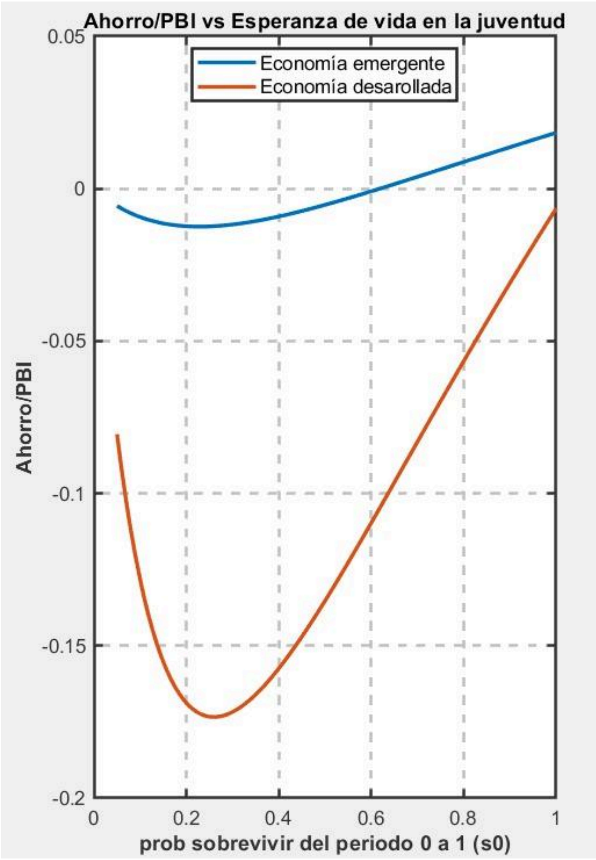
Buscamos la conducta del ahorro agregado sobre el producto con respecto a s_0 y s_1, para ver cómo cambia dicha variable para cada probabilidad de supervivencia definida.

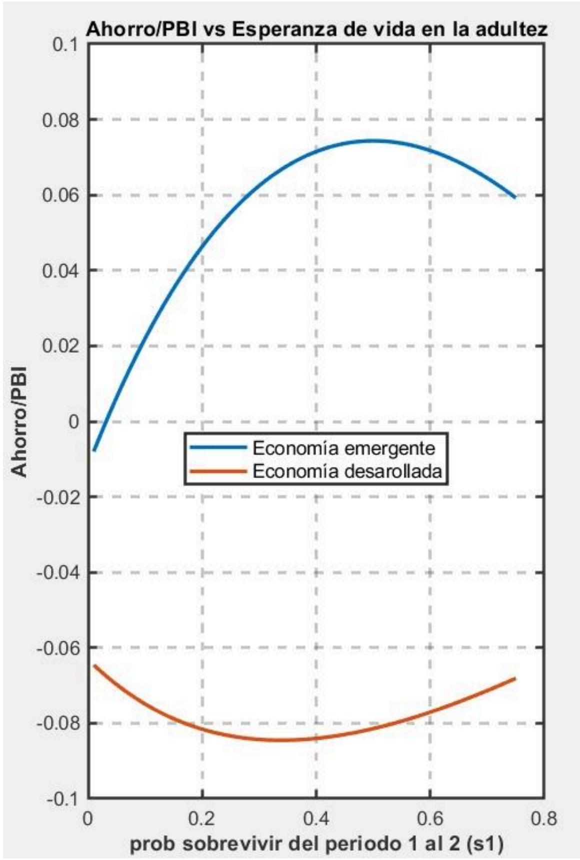
Obtenemos el siguiente gráfico donde graficamos el ahorro sobre el producto contra la esperanza de vida, en función de s_0 y s_1.

Perfiles de dotaciones:

Países emergentes: θ_0_em = .4; θ_1_em = .5; θ_2_em = .1;

Países desarrollados: θ_0_de = .15; θ_1_de = .45; θ_2_de = .40;





Vemos reflejado en ambos gráficos la posición acreedora del país emergente, y la posición deudora del desarrollado.

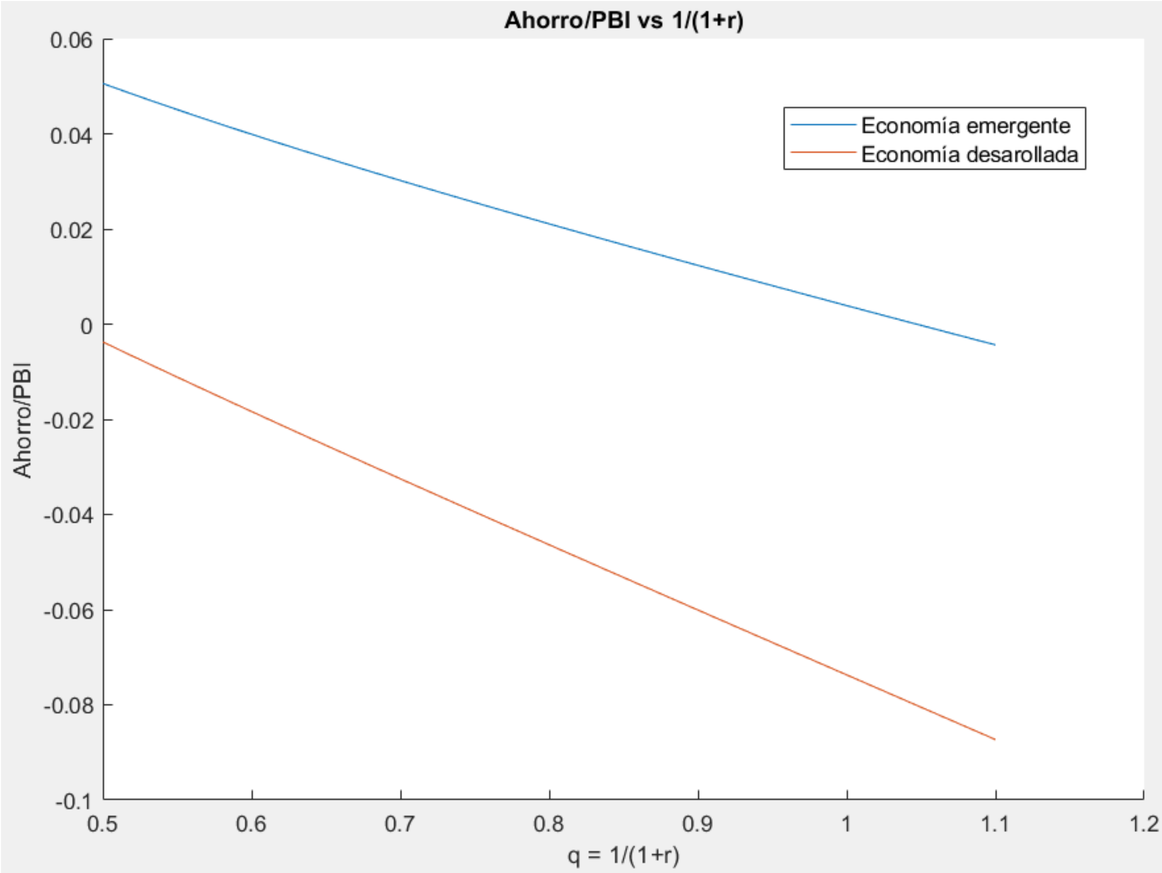
El primer gráfico representa el ahorro agregado sobre producto en función de s_0. En este gráfico se observa cómo los países desarrollados tienen un desahorro muy fuerte para pocas probabilidades de sobrevivir, y una tendencia que se revierte cuando comienza a aumentar la probabilidad de sobrevivir. Los países desarrollados pueden "permitirse" desahorrar tanto con poca probabilidad de sobrevivir, porque saben que en el próximo período su dotación aumentará mucho. Es decir, aunque no tengan ahorros significativos, se recuperarán con la dotación que reciban. No es el caso de los emergentes, donde el ahorro cae en menor proporción, dado que se incorpora el hecho de que el aumento de su dotación en el siguiente período es menor. Para $s_0 \geq 0.3$ vemos que el ahorro de los países emergentes también revierte su tendencia, aunque de forma más suave.

El segundo gráfico representa el ahorro agregado sobre el producto en función de s1. Vemos que para valores de s1 menores a 0.5, la pendiente del $S^A/producto$ es positiva para países emergentes, es decir, ante un aumento de la probabilidad de sobrevivir al período de la vejez, se aumenta mucho el ahorro. Esto se explica incorporando su perfil de ingresos, donde la dotación cae mucho en el último período. Vemos que la pendiente cambia de signo ante una probabilidad mayor, esto se puede explicar por un efecto composición: al aumentar mucho la probabilidad de sobrevivir, aumenta la proporción de viejos en la población total. Sabemos que los países emergentes des ahorran mucho en su último período, por lo que podemos deducir que el efecto negativo en S_2 hace caer al ahorro agregado.

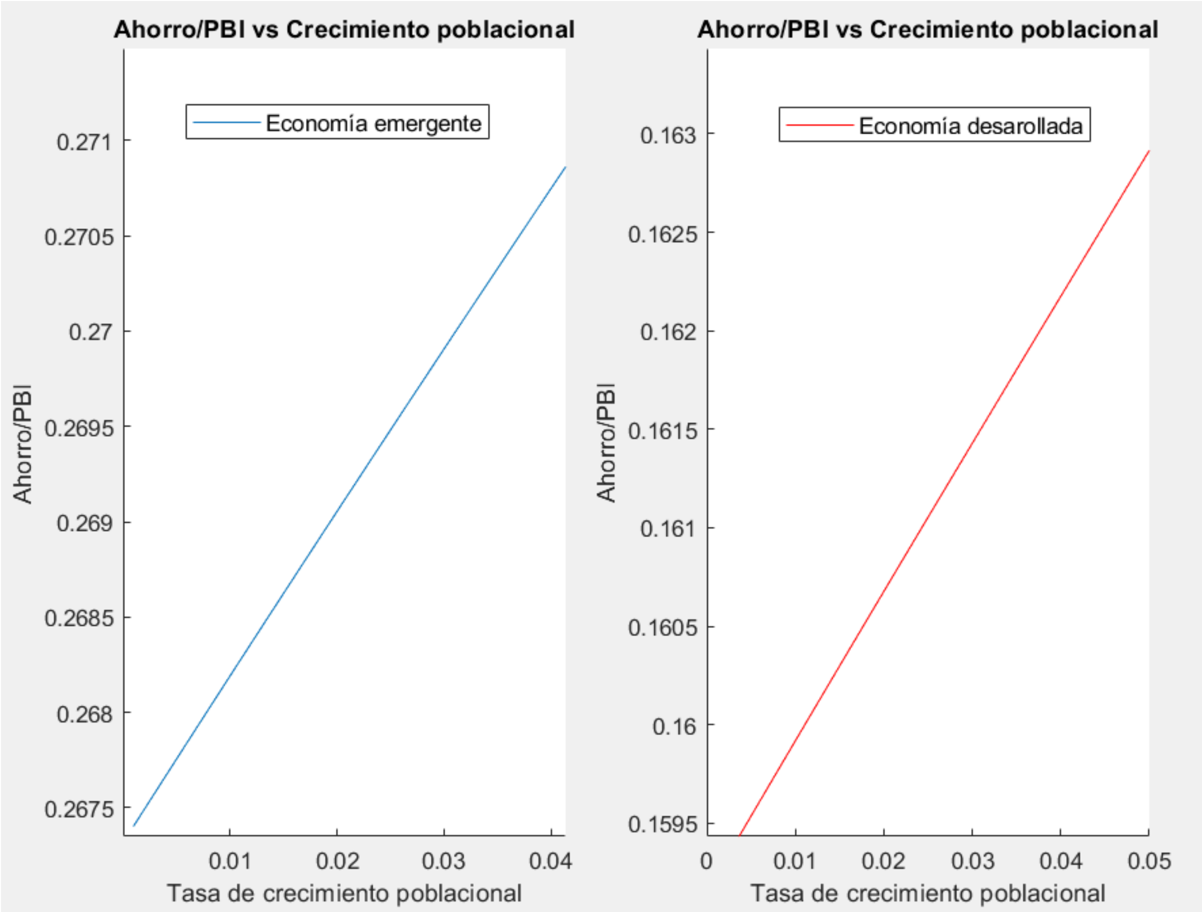
Por otro lado, los cambios en países desarrollados son mucho más suaves, esto corresponde con el hecho de que la caída en dotación en la vejez es de manera mucho más plana para países desarrollados.

Podríamos pensar que con una probabilidad de supervivencia muy baja, habría incentivos a endeudarse infinitamente. ¿Por qué no ocurre esto? Por la anualidad de Blanchar y Yaari, es costoso endeudarse para valores de s chicos, ya que sabemos que la probabilidad de supervivencia está incluida en el precio que los agentes perciben.

Graficamos el ahorro/PBI vs Q:



Definiendo Q como la inversa de la tasa de interés, vemos que el ahorro/PBI cae frente a aumentos de Q. Es decir, inversamente a lo que ocurre con la tasa de interés. Sabemos que aumentos en la tasa de interés hacen más barato consumir mañana que hoy, por lo que aumenta la decisión de ahorro. El nivel de ahorro total como proporción de las dotaciones es mayor para países emergentes que para desarrollados, lo confirmamos en el siguiente gráfico.



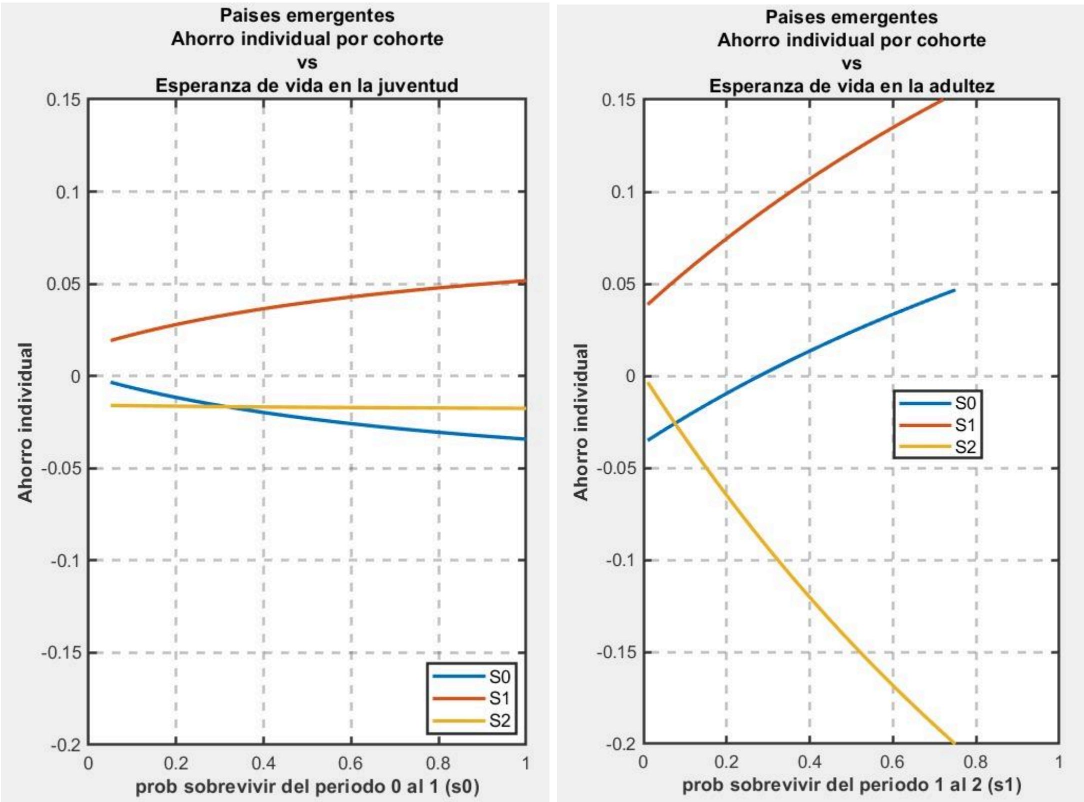
Podemos pensar que la caída más abrupta en la dotación del tercer período en los países emergentes explica su mayor nivel de ahorro.

Vemos, por otro lado, que la tendencia a largo plazo define como con crecimiento poblacional, aumenta la proporción de ahorro en el tiempo. Sin embargo, el crecimiento es muy pequeño, y no pareciera ser muy significativo.

4.2.2 Ahorro individual por cohorte vs esperanza de vida

Luego, graficamos el ahorro individual por cohorte vs la esperanza de vida. De esta forma, vemos los cambios intensivos que luego impactan en la conducta del ahorro agregado.

Para países emergentes:



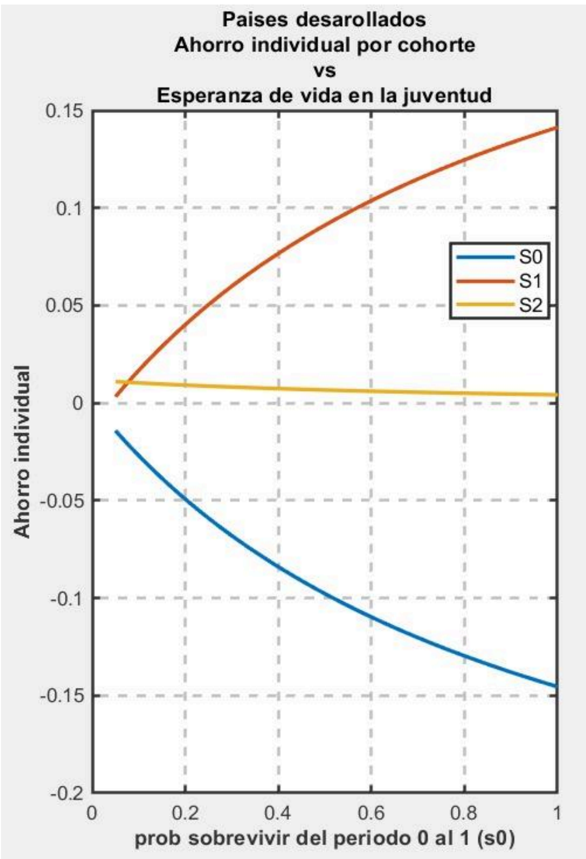
Utilizamos un solo perfil de ingresos, tanto para los países emergentes como para los desarrollados. El eje horizontal representa la probabilidad de sobrevivir del periodo 0 a 1 en el gráfico de la izquierda ya que queremos representar la esperanza de vida en la juventud y de 1 a 2 en el gráfico de la derecha donde mostramos la esperanza de vida en la adultez. En el eje vertical tenemos el ahorro individual por cohorte.

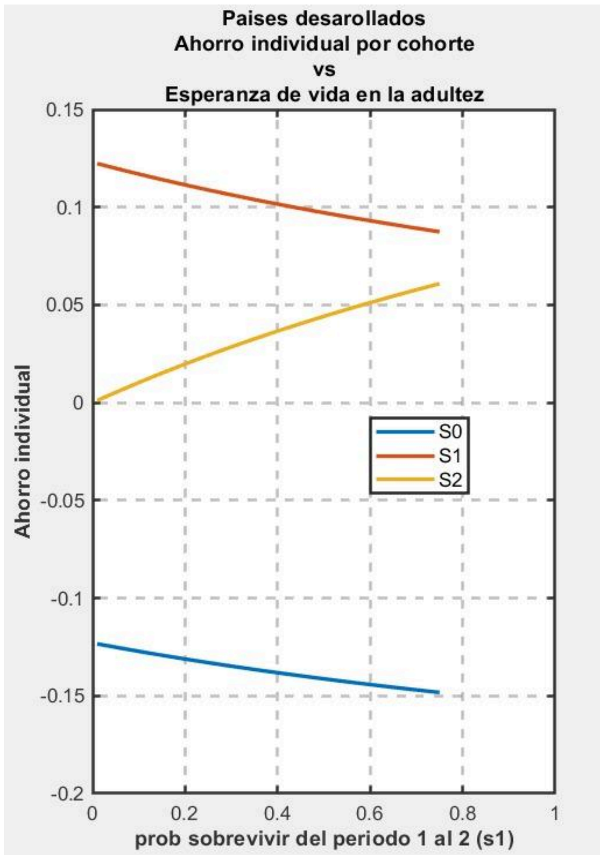
Observamos que el ahorro del primer cohorte (S_0) se reduce a medida que aumenta la probabilidad de sobrevivir de 0 a 1 y se mantiene negativo, pero luego aumenta cuando aumenta la probabilidad de sobrevivir del periodo 1 a 2.

En cuanto al segundo cohorte (S_1), vemos que a mayor probabilidad de sobrevivir, más alto será el ahorro.

Para el tercer cohorte (S_2) el ahorro se mantiene constante a medida que aumenta la probabilidad de sobrevivir del periodo 0 a 1. Vemos que la decisión de ahorro en la vejez no varía frente a distintos valores de s_0. Por otro lado, cae a mayor probabilidad de sobrevivir del periodo 1 a 2, manteniéndose siempre negativo ya que los individuos desahorran. De esta forma se cumple que $S_2 =- S_0 - S_1$.

Para países desarrollados:





Analizando el caso de los países desarrollados, vemos que el ahorro individual del primer cohorte se mantiene siempre negativo y tiene una caída más marcada a medida que aumenta la probabilidad de sobrevivir del periodo 0 a 1. A mayor probabilidad de sobrevivir, más se endeuda confiando en que podrá repagarlo con su alta dotación del siguiente período. A mayor probabilidad de sobrevivir del periodo 1 al 2, más desahorra, pero la pendiente no es tan empinada como en el periodo anterior.

Para el segundo cohorte, S_1 , el ahorro crece a mayor probabilidad de sobrevivir del periodo 0 a 1 pero decrece con pendiente constante a medida que aumenta la probabilidad de sobrevivir del periodo 1 a 2. S_1 se mantiene siempre positivo.

Por último, para el tercer cohorte, el ahorro se mantiene constante cuando aumenta la probabilidad de sobrevivir del periodo 0 a 1 y crece a mayor probabilidad de sobrevivir del periodo 1 al 2.

5. Conclusiones

En este trabajo planteamos un modelo de generaciones traslapadas para estudiar de manera estructural la relación entre cambios demográficos y el ahorro agregado. Consideramos dos tipos de cambios demográficos, crecimiento de la población y cambios en la esperanza de vida consecuencia de aumentos en la probabilidad de supervivencia.

Nuestro análisis se centra en comparar estados estacionarios. Los resultados nos indican que mientras el crecimiento poblacional se relaciona positivamente con el ahorro agregado, el efecto de cambios en la probabilidad de supervivencia es en general ambiguo y depende de dos cosas. Primero, la posición financiera neta del país bajo análisis osea del perfil de ingreso del país. Segundo, de la posición en el ciclo de vida en el que la esperanza de vida aumenta. Nuestros resultados sugieren que establecer una relación empírica entre estos cambios demográficos no es una tarea sencilla.

Llegamos a esta conclusión observando una serie de resultados. En primer lugar, notamos que para los países desarrollados el ahorro responde más a cambios en la esperanza de vida a temprana edad que en la adultez. Es decir, reacciona más ante cambios en s_0 que en s_1 . Este comportamiento se ve tanto en el comportamiento del ahorro agregado como en el ahorro individual. Notamos que la pendiente en el comportamiento del ahorro acuerdo a s_0 es mayor. El único caso cuando esto no pasa es para S_2.

En segundo lugar, los países emergentes presentan el caso contrario: según los gráficos, el ahorro agregado responde más ante cambios en la esperanza de vida en la adultez que a temprana edad. Es decir, reacciona más ante cambios en s_1 que en s_0. Este comportamiento se ve tanto en el del ahorro agregado como en el ahorro individual, donde el ahorro para todos los cohortes tiene mayor pendiente contra s_1 que en s_0 .

Comparando el comportamiento del ahorro individual entre emergentes y desarrollados, observamos que ante cambios en s0, el comportamiento del ahorro por cohorte es casi idéntico. Vemos una relación negativa entre S_0 y s_0, esto muestra que ante mayores probabilidades de sobrevivir, más se endeudan los agentes. Por otro lado, hay una relación positiva entre S_1 y s_0: ante mayor esperanza de vida, hay más ahorro agregado (a_1 aumenta). Esto implica que el ahorro de los agentes en S_1 (Dotación + ahorro previo - consumo) es más alto. Finalmente, vemos que hay una pendiente casi nula en S_2, entendiendo que S_2 es la resta de los dos ahorros previos, los movimientos opuestos del primer y segundo cohorte anulan los cambios en su comportamiento frente a los distintos valores de s_0.

Por otro lado, es llamativo el comportamiento opuesto entre ambos tipos de país con respecto a s_1.

En países desarrollados s_1 casi no afecta las decisiones de ahorro, porque en la última parte de su vida los agentes están cubiertos, ya que la dotación no cae con fuerza. Lo contrario ocurre con los emergentes, ya que la fuerte baja de su ingreso produce mayor volatilidad de ahorro para cada fracción etaria. Los cohortes de jóvenes y adultos aumentan sus decisiones de ahorro para mayores probabilidades de supervivencia, lo vemos en su forma cóncava. Esto implica una mayor oportunidad de desahorro para los viejos.

Anexo

<u>Cálculo de esperanza de vida</u>

$$Esperanza\ de\ vida\ =\ 1\cdot(1-s_0)+2\cdot s_0\cdot(1-s_1)+3\cdot s_0\cdot s_1$$

$$Esperanza\ de\ vida\ =\ 1+s_0+s_0\cdot s_1$$

<u>Caracterización de la solución</u>

$$max\ lnc_0+\beta s_0 lnc_1+\beta^2 s_0 s_1 lnc_2 \quad \text{s.a.} \quad c_0+Q_0a_1\leq\theta_0$$

$$c_1+Q_1\alpha_2\leq\theta_1+\alpha_1$$

$$c_2\leq\theta_0+\alpha_2$$

Armamos la RPI:

$$c_1+Q_1(c_2-a_2)=\theta_1+\alpha_1$$

$$c_0+Q_0(c_1+Q_1c_2-Q_1\theta_2-\theta_1)=\theta_0$$

$$c_0 + Q_0 c_1 + Q_0 Q_1 c_2 = \theta_0 + Q_0 \theta_1 + Q_0 Q_1 \theta_2$$

Distribución etaria

$$\omega_0^t = \frac{N_0^t}{N_0^t + N_1^t + N_2^t} = \frac{(1+n)N_0^{t-1}}{(1+n)N_0^{t-1} + s_0 N_0^{t-1} + s_1 N_1^{t-1}} = \frac{(1+n)N_0^{t-1}}{(1+n)N_0^{t-1} + s_0 N_0^{t-1} + s_1 s_0 N_0^{t-2}} = \frac{(1+n)^2 N_0^{t-2}}{(1+n)^2 N_0^{t-2} + s_0 (1+n)\ N_0^{t-2} + s_1 s_0 N_0^{t-2}}$$

$$= \frac{(1+n)^2}{(1+n)^2 + s_0(1+n)\ + s_1 s_0}$$

$$\omega_1^t = \frac{N_1^t}{N_0^t + N_1^t + N_2^t} = \frac{s_0 N_0^{t-1}}{(1+n)N_0^{t-1} + s_0 N_0^{t-1} + s_1 N_1^{t-1}} = \frac{s_0 (1+n) N_0^{t-2}}{(1+n)N_0^{t-1} + s_0(1+n)N_0^{t-2} + s_1 s_0 N_0^{t-2}} = \frac{s_0(1+n)N_0^{t-2}}{(1+n)^2 N_0^{t-2} + s_0(1+n)\ N_0^{t-2} + s_1 s_0 N_0^{t-2}}$$

$$= \frac{s_0(1+n)}{(1+n)^2 + s_0(1+n)\ + s_1 s_0}$$

$$\omega_2^t = \frac{N_2^t}{N_0^t + N_1^t + N_2^t} = \frac{s_1 N_1^{t-1}}{(1+n)N_0^{t-1} + s_0 N_0^{t-1} + s_1 N_1^{t-1}} = \frac{s_1 s_0 N_0^{t-2}}{(1+n)N_0^{t-1} + s_0 N_0^{t-1} + s_1 N_1^{t-2}} = \frac{s_1 s_0 N_0^{t-2}}{(1+n)^2 N_0^{t-2} + s_0(1+n)N_0^{t-2} + s_1 s_0 N_0^{t-2}}$$

$$= \frac{s_1 s_0}{(1+n)^2 + s_0(1+n)\ + s_1 s_0}$$

Estática comparada

Estática comparada : vemos el comportamiento de las fracciones etarias en función de la probabilidad de vida y del crecimiento poblacional.

- $\partial w_0 / \partial s_0 \leq 0$: como hay más probabilidad de sobrevivir al periodo 1, los individuos que viven solo 1 un periodo, periodo 0, representan una menor proporción del total.
- $\partial w_1 / \partial s_0 \geq 0$: como hay más probabilidad de sobrevivir al periodo 1, los individuos que viven dos períodos representan una mayor proporción del total.

- $\partial w_2 \, / \partial s_0 \geq 0$: como hay más probabilidad de sobrevivir al periodo 1, los que viven tres períodos representan una mayor proporción del total.
- $\partial w_0 / \partial s_1 \leq 0$: como hay más probabilidad de sobrevivir al periodo 2, los que viven un solo periodo, periodo 0, representan una menor proporción del total.
- $\partial w_1 \, / \partial s_1 \leq 0$: como hay más probabilidad de sobrevivir al periodo 2, los que viven dos períodos representan una menor proporción del total.
- $\partial w_2 \, / \partial s_1 \geq 0$: como hay más probabilidad de sobrevivir al periodo 2, los que viven tres períodos representan una mayor proporción del total.
- $\partial w_0 \, / \partial n \geq 0$
- $\partial w_1 \, / \partial n \leq 0$
- $\partial w_2 \, / \partial n \leq 0$

Planteo del problema

$lnc_0 + \beta s_0 lnc_1 + \beta^2 s_0 s_1 lnc_2$ s.a. $c_0 + Q_0 a_1 \leq \theta_0$

$$c_1 + Q_1 \alpha_2 \leq \theta_1 + \alpha_1$$

$$c_2 \leq \theta_0 + \alpha_2$$

CPO

$$\{c_0\} \ \frac{1}{c_0} = \lambda$$

$$\{c_1\} \ \frac{\beta s_0}{c_1} = \lambda Q_0$$

$\{c_2\}\ \frac{\beta^2 s_0 s_1}{c_2} = \lambda Q_0 Q_1$

$\{\lambda\}\ c_0 + Q_0 c_1 + Q_0 Q_1 c_2 = \theta_0 + Q_0\theta_1 + Q_0 Q_1 \theta_2$

De $c_0\, y\, c_2$ obtenemos $\frac{1}{c_0} = \frac{\beta^2 s_0 s_1}{c_2} \cdot \frac{1}{Q_0 Q_1}$

$c_2 = c_0 \beta^2 s_0 s_1 \cdot \frac{1}{Q_0 Q_1}$

$De\, c_0\, y\ c_2$:

$\frac{1}{C_0} = \frac{\beta^2 s_0 s_1}{C_2} = \frac{1}{Q_1 Q_0}$ y $c_2 = c_0 \beta^2 s_0 s_1 \frac{1}{Q_1 Q_0}$

Buscamos el consumo del período 0:

En RPI:

$$c_0 + Q_0 \frac{\beta s_0 C_0}{Q_0} + Q_0 Q_1 c_0 \beta^2 s_0 s_1 \frac{1}{Q_1 Q_0} = \theta_0 + Q_0 \theta_1 + Q_0 Q_1 \theta_2$$

$$c_0(1 + \beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1) = \theta_0 + Q_0 \theta_1 + Q_0 Q_1 \theta_2$$

Buscamos el consumo del período 1

Usando $c_0 = \frac{c_1 Q_0}{\beta s_0}$ y $c_2 = \frac{\beta s_1 c_1}{Q_1}$

Reemplazando estas expresiones en las RPI:

$$\frac{c_1 Q_0}{\beta s_0} + Q_0 c_1 + Q_0 Q_1 \frac{\beta s_1 c_1}{Q_1} = \theta_0 + Q_0 \theta_1 + Q_0 Q_1 \theta_2$$

$$\frac{Q_0 c_1}{\beta s_0}[1 + \beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1] = \theta_0 + Q_0\theta_1 + Q_0 Q_1\theta_2$$

$$c_1 = \frac{\beta s_0}{Q_0[1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1]}[\theta_0 + Q_0\theta_1 + Q_0 Q_1\theta_2]$$

Buscamos el consumo en el período 2

Usamos $c_1 = \frac{c_2 Q_1}{\beta s_1}$ y $c_0 = \frac{c_2 Q_0 Q_1}{\beta^2 s_0 s_1}$

Reemplazamos estas expresiones en la RPI:

$$\frac{c_2 Q_0 Q_1}{\beta^2 s_0 s_1} + Q_0\frac{C_2 Q_1}{\beta s_1} + Q_0 Q_1 c_2 = \theta_0 + Q_0\theta_1 + Q_0 Q_1\theta_2$$

$$\frac{C_2 Q_0 Q_1}{\beta^2 s_0 s_1}[1 + \beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1] = \theta_0 + Q_0\theta_1 + Q_0 Q_1\theta_2$$

$$c_2 = \frac{\beta^2 s_0 s_1}{Q_0 Q_1[1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1]}[\theta_0 + Q_0\theta_1 + Q_0 Q_1\theta_2]$$

Buscamos los ahorro de cada período

<u>Período 0</u>

$$S_0 = \theta_0 - \frac{\theta_0+Q_0\theta_1+Q_0 Q_1\theta_2}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1} = \frac{1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}[(\beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1)\theta_0 - Q_0\theta_1 - Q_0 Q_1\theta_2]$$

$$S_0 = \frac{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}[\theta_0 - \frac{Q_0}{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\theta_1 - \frac{Q_0 Q_1}{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\theta_2]$$

<u>Período 1</u>

Tomando $c_0 + Q_0 a_1 \leq \theta_0 \rightarrow a_1 = \frac{(\theta_0 - c_0)}{Q_0} = \frac{S_0}{Q_0}$.

$$S_1 = \theta_1 + (1 - Q_0)a_1 - c_1 \ = \theta_1 + (1 - Q_0)\frac{S_0}{Q_0} - c_1$$

$$S_1 = \theta_1 + \frac{(1-Q_0)}{Q_0}\frac{1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}(\theta_0(\beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1) - Q_0\theta_1 - Q_0 Q_1\theta_2) - \frac{\beta s_0}{Q_0}[\frac{\theta_0+\theta_1 Q_0+\theta_2\ Q_0 Q_1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}]$$

$$S_1 = \frac{1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}[(1+\beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1)\theta_1 + \frac{(1-Q_0)}{Q_0}Q_0\theta_1 - \frac{\beta s_0}{Q_0}\theta_1 Q_0 - \frac{(1-Q_0)}{Q_0}\theta_0(\beta s_0 + \beta^2 s_0 s_1)$$

$$- \frac{\beta s_0}{Q_0}\theta_0 + \frac{(1-Q_0)}{Q_0}Q_0 Q_1\theta_2 - \frac{\beta s_0}{Q_0}Q_0 Q_1\theta_2]$$

$$S_1 = \frac{1+\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}[\frac{(\beta^2 s_0 s_1+Q_0)\theta_1}{1+\beta^2 s_0 s_1} - \frac{\{Q_0\beta s_0-\beta^2 s_0 s_1(1-Q_0)\}}{1+\beta^2 s_0 s_1}\frac{\theta_0}{Q_0} - \frac{Q_0(1-Q_0+\beta s_0)}{1+\beta^2 s_0 s_1}\theta_2]$$

<u>Período 2</u>

$$S_2 = - S_0 - S_1$$

$$S_2 = - \{\frac{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}[\theta_0 - \frac{Q_0}{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\theta_1 - \frac{Q_0 Q_1}{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\theta_2]\} \quad - \quad \{$$

$$\frac{1+\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}[\frac{\beta^2 s_0 s_1+Q_0}{1+\beta^2 s_0 s_1} - \frac{Q_0\beta s_0-\beta^2 s_0 s_1(1-Q_0)}{1+\beta^2 s_0 s_1}\cdot\frac{\theta_0}{Q_0} - \frac{Q_1(\beta s_0+1-Q_0)}{1+\beta^2 s_0 s_1}\theta_2\}$$

$$S_2 = \frac{1+\beta\ s_0}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}Q_1[\theta_2 - \frac{\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta S_0}\frac{\theta_0}{Q_0 Q_1} - \frac{\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0}\frac{\theta_1}{Q_1}]$$

Ahorro agregado:

$$S_A = \omega_0 S_0 + \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2$$

$$=\frac{(1+n)^2}{(1+n)^2+s_0(1+n)+s_1s_0}$$

$$\frac{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\left[\theta_0-\frac{Q_0}{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\theta_1-\frac{Q_0Q_1}{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\theta_2\right]+\frac{s_0(1+n)}{(1+n)^2+s_0(1+n)+s_1s_0}$$

$$\frac{1+\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\left[\frac{(\beta^2 s_0 s_1+Q_0)\theta_1}{1+\beta^2 s_0 s_1}-\frac{\{Q_0\beta s_0-\beta^2 s_0 s_1(1-Q_0)\}}{1+\beta^2 s_0 s_1}\frac{\theta_0}{Q_0}-\frac{Q_0(1-Q_0+\beta s_0)}{1+\beta^2 s_0 s_1}\theta_2\right]+\frac{s_1s_0}{(1+n)^2+s_0(1+n)+s_1s_0}$$

$$\frac{1+\beta\ s_0}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}Q_1\left[\theta_2-\frac{\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta S_0}\frac{\theta_0}{Q_0Q_1}-\frac{\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0}\frac{\theta_1}{Q_1}\right]$$

Ahorro como proporción del producto:

$$\frac{S_A}{\theta_A}=\frac{\omega_0 S_0+\omega_1 S_1+\omega_2 S_2}{\omega_0\theta_0+\omega_1\theta_1+\omega_2\theta_2}=\frac{S_A}{\frac{(1+n)^2}{(1+n)^2+s_0(1+n)+s_1s_0}\theta_0+\frac{s_0(1+n)}{(1+n)^2+s_0(1+n)+s_1s_0}\theta_1+\frac{s_1s_0}{(1+n)^2+s_0(1+n)+s_1s_0}\theta_2}$$

Estática comparada:

$$\partial S_0/\partial s_0=\frac{[(\beta+\beta^2 s_1)(\ 1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )-(\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )(\beta+\beta^2 s_1)\ ]}{(1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1)^2}\left[\theta_0-\frac{Q_0}{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\theta_1-\frac{Q_0Q_1}{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\theta_2\right]+\ldots$$

Primer término: positivo

Segundo término: negativo, (muy negativo para país desarrollado, más chico para país emergente.

$$\ldots+\frac{\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}{1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1}\left[\frac{Q_0\theta_1(\beta+\beta^2 s_1)}{(\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1)^2}+\frac{Q_0Q_1\theta_2(\beta+\beta^2 s_1)}{(\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1)^2}\right]\longrightarrow \text{positivo}$$

$$\partial S_1/\partial s_0 = \frac{[\beta^2 s_1\theta_1+\frac{\theta_0\beta}{Q_0}[\ \beta s_1(1-Q_0)-Q_0]-Q_0\theta_2\beta](1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )\ -[(\beta^2 s_0 s_1+Q_0)\theta_1-\{Q_0\beta s_0-\beta^2 s_0 s_1(1-Q_0)\}\frac{\theta_0}{Q_0}-Q_0(1-Q_0+\beta s_0)\ \theta_2](\beta+\beta^2 s_1)}{(1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )^2}$$

Signo depende de las magnitudes de $\theta_0,\ \theta_1\ y\ \theta_2$.

$$\partial S_2/\partial s_0 = Q_1.\ \frac{[\theta_0\beta-\beta^2 s_1\frac{\theta_0}{Q_0Q_1}-\beta^2 s_1\frac{\theta_1}{Q_1}](1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1)-[(1+\beta\ s_0)\theta_2-\beta^2 s_0 s_1\frac{\theta_0}{Q_0Q_1}-\beta^2 s_0 s_1\frac{\theta_1}{Q_1}](\beta+\beta^2 s_1)}{(1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )^2}$$

Estática comparada con cambios en s_1:

$$\partial S_0/\partial s_1=\frac{\beta^2 s_0\theta_0(1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1)-[(\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1)\theta_0-Q_0\theta_1-\theta_2 Q_0 Q_1]\beta^2 s_0}{(1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1)^2}$$

$$\partial S_1/\partial s_1 = \frac{[\beta^2 s_0\theta_1+\beta^2 s_0(1-Q_0)\frac{\theta_0}{Q_0}](1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )-[(\beta^2 s_0 s_1+Q_0)\theta_1-\{Q_0\beta s_0-\beta^2 s_0 s_1(1-Q_0)\}\frac{\theta_0}{Q_0}-Q_0(1-Q_0+\beta s_0)\ \theta_2]\beta^2 s_0}{(1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )^2}$$

$$\partial S_2/\partial s_0=\frac{[\beta^2 s_0\frac{\theta_0}{Q_0Q_1}-\beta^2 s_0\frac{\theta_1}{Q_1}](1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )\ -[(1+\beta\ s_0)\theta_2-\frac{\theta_0}{Q_0Q_1}\beta^2\ s_0 s_1-\beta^2 s_0 s_1\frac{\theta_1}{Q_1}]\beta^2 s_0}{(1+\beta s_0+\beta^2 s_0 s_1\ )^2}$$

Vemos que las derivadas no dicen nada claro sobre el signo que pudieran tener, por lo que nos respaldamos en los resultados que obtuvimos simulando en Matlab.

Referencias

Obstfeld, M., & Rogoff, K. (1996). *Foundations of international macroeconomics*. MIT Press.

Blanchard, O.J. (1985) Debt, deficits, and finite horizons. Journal of Political Economy 93, 223–247.

Yaari, M. (1965) Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer. Review of Economic Studies 32

Attanasio, Orazio, Kitao, Sagiri and Violante, Giovanni, (2007), Global demographic trends and social security reform, Journal of Monetary Economics, 54, issue 1, p. 144-198.

UNITED NATIONS, D. O. E. AND P. D. SOCIAL AFFAIRS (2022): "World Population Prospects 2022: Data Sources," .