# Protección al Empleo, Adopción de Tecnologías y Crecimiento *

Agustín Gutiérrez - Legajo 15P1068†

Maestría en Economía - Universidad Torcuato Di Tella

Tutor : Martín Solá

1 de Junio, 2021

**Abstract**

Una literatura creciente ubica a la difusión de ideas y tecnologías como una fuente importante para el crecimiento económico. Para que esta difusión se lleve a cabo se necesita no sólo que la tecnología este disponible sino también que los agentes económicos decidan adoptarlas. Este proyecto estudia como factores que impiden la libre reasignación de recursos entre firmas afectan los incentivos de estas a adoptar nuevas tecnologías. Para ello introducimos decisiones de empleo y costos de despido a lo que de otra manera es el modelo estándar de Perla and Tonetti (2014). En una economía en crecimiento, la libre reasignación de recursos impulsa el crecimiento económico ya que aumentos del salario real llevan a las firmas a adoptar nuevos métodos de producción para reducir sus costos. Los costos de despidos tienen efectos ambiguos en la tasa de adopción. Por un lado debilitan este mecanismo al reducir la movilidad de empleo entre firmas pero incrementan los costos totales de cada trabajador lo cual incentiva una mayor adopción.

*Agradezco a Nancy Stokey, Thomas Winberry y Martin Sola por sus sugerencias y consejos los cuales mejoraron sustancialmente este proyecto. Este proyecto también se enriqueció con las discusiones durante el *Third Year Seminar* de la University of Chicago y a través de los comentarios de Victor Jorge Elías, Julio Jorge Elías, Levi Crews, Marcos Sorá, Ignacio Cigliutti, Younghun Shim, Fernando Cirelli y María Belen Zanzuchi. Todos los errores son míos.

†E-mail: gutierrez.agustin@mail.utdt.edu.

# 1 Introducción

Una literatura creciente ubica a la difusión de ideas y tecnologías como una fuente importante para el crecimiento económico. En estos modelos, el crecimiento en la productividad de los factores no viene necesariamente de la invención de nuevas tecnologías sino a través de agentes económicos imitando las tecnologías de sus pares mas productivos. [1] Sin embargo, el retorno de dicha adopción depende de la habilidad de la firmas en ajustar a voluntad los insumos y producir a una escala eficiente. Varios tipos de fricciones en el mercado laboral, como los costos de despido, restringen el libre ajuste del factor trabajo y restringen la reasignación del mismo hacia su uso mas productivo. Este trabajo estudia cómo factores que restringen la reasignación del trabajo entre firmas modifica los incentivos a adoptar nuevas tecnologías.

El punto de partida es el modelo de Perla and Tonetti (2014). A este, agregamos decisiones de empleo para la firma con costos de ajustes asimétricos que toman la forma de un impuesto a la destrucción de empleo. Procedemos en dos pasos. Primero, para entender la importancia de la libre reasignación de recursos en el proceso de difusión examinamos una versión del modelo sin costes de ajustes. Encontramos que en el sendero de crecimiento balanceado (BGP por sus siglas en inglés) la libre reasignación del trabajo promueve la adopción de nuevas tecnologías e incrementa la tasa de crecimiento de la economía. A medida que las firmas adoptan nuevas tecnologías demandan relativamente mas trabajo, lo cual incrementa el salario y reduce los beneficios de todas las firmas. La adopción es costosa ya que toma tiempo durante el cual la firma no produce. La reducción en los beneficios de la firma funcionan entonces como una reducción en el costo de oportunidad de seguir operando su tecnología actual e incentiva la adopción.

Segundo, introducimos a este modelo costos de despido. Como ahora las firmas deben pagar un costo cada vez que despiden trabajadores estas deciden operar a una escala ineficiente y por lo tanto el trabajo no fluye a sus usos mas productivos debilitando el mecanismo anterior.

[1] Por ejemplo Lucas (2009); Lucas and Moll (2014) y Perla and Tonetti (2014)

Sin embargo, es esta escala ineficiente y la posibilidad de reajustar su fuerza laboral al adoptar una nueva tecnología que impulsa a las firmas a adoptar antes. Si la tasa de adopción es mas alta o mas baja que en el mundo sin fricciones depende en equilibrio de la magnitud de estas dos fuerzas.

El primero paso en nuestro análisis extiende Perla and Tonetti (2014) incorporando al problema de la firma decisiones de empleo en un mercado perfectamente competitivo. El modelo permanece parsimonioso y puede caracterizarse su solución de manera analítica. Mostramos como las decisiones de empleo y adopción por parte de las firmas determinan la tasa de crecimiento de la economía. Comparado con el modelo original de Perla and Tonetti (2014) nuestra economía base exhibe una tasa de crecimiento mayor debido a que las decisiones de empleo de las firmas introducen una nueva externalidad positiva para la economía. Aquí, las firmas no sólo adoptan porque las chances de conseguir una mejor tecnología mejoran con el tiempo como en Perla and Tonetti (2014), sino que ademas estas decisiones generan aumentos en el salario real aumentando los costos de producción para todas las demás firmas. La caída en el flujo de beneficios para la firma reduce su costo de oportunidad de adoptar y por lo tanto en equilibrio hay mas adopción y mayor crecimiento.

El segundo paso en nuestro análisis es incorporar los costos de despidos a nuestra economía base. Modelamos estos como un impuesto a la destrucción de empleo pagado por las firmas. Para estudiar sus efectos en el proceso de adopción consideramos el problema de una firma que recientemente adoptó una tecnología y tiene que decidir ahora su sendero de empleo y el momento óptimo para adoptar nuevamente una tecnología. Aquí mostramos que los costos de despido llevan a las firmas a operar a una escala ineficiente lo cual reduce el retorno de adoptar ya que la nueva tecnología no puede aprovecharse en su totalidad. Sin embargo, los costos de despidos también incrementan los costos totales de la firma por lo que al igual que los salarios reales mas altos este incremento del costo también los incentiva a adoptar. El efecto final de los costos de despidos es una pregunta cuantitativa y dependen de la fuerza relativa de cada uno de estos efectos.

Este proyecto está relacionado con dos ramas de la literatura. La primera corresponde a la literatura de *missallocation* iniciada por Restuccia and Rogerson (2008) y Hsieh and Klenow (2009). Esta primera ola de trabajos académicos permanece agnóstica acerca del causante de la mala asignación de recursos y en cambio documenta como distorsiones al nivel de la firma, modelados como impuestos arbitrarios, pueden explicar diferencias en el TFP agregado entre países Otro conjunto de trabajos toman una posición sobre el origen de la mala asignación de recursos. En esta dirección, algunos autores han estudiado el efecto de costos de despidos sin embargo su foco está en los efectos sobre la productividad agregada. A través de modelos de equilibrio general, Hopenhayn and Rogerson (1993), Moscoso Boedo and Mukoyama (2012) y Da-Rocha et al. (2016) muestran como los costos de despidos afectan la reasignación de trabajo entre firmas reduciendo la eficiencia agregada y la productividad total de los factores.

Nosotros complementamos esta literatura al estudiar también como los costos de despido afectan también la tasa a la cual crece la productividad agregada de la economía En este trabajo enfatizamos que barreras a la libre reasignación de recursos no solo afectan la distribución de recursos entre las firmas sino que ademas afectan la evolución de la productividad al modificar los incentivos de las firmas a adquirir nuevas tecnologías[2]

Poschke (2009) y Mukoyama and Osotimehin (2019) son dos excepciones que estudian los efectos de los costos de despido en la tasa de crecimiento. En Poschke (2009), el crecimiento surge a través de un proceso de selección en el que las firmas existentes son reemplazadas por nuevas firmas, de manera que ellos enfatizan la innovación y creación de firmas como fuente de crecimiento. En su modelo, los costos de despidos son como un impuesto a la salida de firmas, el cual reduce la tasa de salida de firmas con baja productividad Mukoyama and Osotimehin (2019) muestra que los costos de despido pueden afectar también la tasa de crecimiento vía las decisiones de I&D en un modelo de calidad-escalada. Nuestro foco, como mencionamos antes, esta en el proceso de difusión y adopción de tecnologías existentes.

La segunda rama de la literatura estudia los efectos que tiene la adopción de nuevas

[2] Da-Rocha et al. (2016) y Bento and Restuccia (2017) hacen un punto similar pero enfocándose en las decisiones de inversión

tecnologías en la evolución de empleo y del salario real. Usando los modelos de *tareas-especificas* desarrollados por Acemoglu and Autor (2011), Acemoglu and Restrepo (2018, 2019) estudia las consecuencias de la automatización del trabajo y el uso de robots industriales como una fuente de sustitución y creación de empleo. En este trabajo, en cambio, el concepto de lo que constituye una tecnología es mas amplio y estudiamos el efecto opuesto: cómo las condiciones del mercado laboral afectan las decisiones de adopción de estas tecnologías

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, describimos el modelo completo el cual extiende Perla and Tonetti (2014) al incluir decisiones de empleo para la firma con costos de ajustes al trabajo. En la Sección 3, nos abstraemos de los costos de despidos para mostrar el efecto de la libre reasignación de recursos en el proceso de difusión En la Sección 4, desarrollamos nuestro modelo de equilibrio parcial con costos de despidos y estudiamos el problema de la firma en este ambiente. La Sección 5 presenta las conclusiones del trabajo.

# 2 Modelo

El tiempo es continuo y corre hasta el horizonte infinito. La economía esta poblada por tres tipos de agentes que operan en mercados perfectamente competitivos con fricciones en el mercado laboral. El modelo incluye: (i) un agente representativo con preferencias sobre la producción total y sin desutilidad por el trabajo; (ii) un continuo de masa uno de firmas neutrales al riesgo que difieren en su nivel tecnológico $z$; y (iii) un gobierno cobra impuestos a la destrucción de empleo y cuyo ingreso es redistribuido a los consumidores *lump-sum*.

**Agente Representativo.** La función de utilidad del agente representativo $U(t)$ es el valor presente descontado de la utilidad instantánea de consumir unidades del producto total de la economía, $C(t)$. Asumimos que la utilidad instantánea son preferencias logarítmicas y que la tasa de descuento es $\rho > 0$:[3]

$$U(t) = \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} \log C(t) ds.$$

No hay desutilidad por trabajo, por lo que el agente representativo ofrece trabajo a las firmas de manera inelástica. La oferta total de trabajo es $\bar{L}$ unidades de trabajo por unidad de tiempo, el cual normalizamos a $\bar{L} = 1$. El agente representativo posee un porfolio diversificado compuesto por todas las firmas que operan en la economía Finalmente, recibe transferencias lump-sum del gobierno en cada instante $t$. De manera que la restricción presupuestaria esta dada por,

$$C(t) + \dot{A}(t) = w(t) + r(t) A(t) + T(t),$$

donde $w(t)$ es el salario real al instante $t$, $A(t)$ son la tenencia de activos, $T(t)$ son las transferencias del gobierno y $r(t)$ es la tasa de interés

La maximización de la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria genera la típica ecuación de Euler,

$$g(t) = (r(t) - \rho),$$

donde $g(t)$ denota la tasa de crecimiento del consumo agregado que es también la tasa de crecimiento de la economía.

**Firmas.** La parte central del modelo es el problema dinámico de la firma. La economía esta poblada por un continuo de masa uno de firmas neutrales al riesgo que viven para siempre y que están indexadas por su tecnología, $z$. Usamos $\Psi(z, t)$ para denotar la distribución de las firmas $z$ en el cross-section que producen en el instante $t$ y $\psi(z, t)$ para la función de probabilidad asociada a esta distribución. Cada firma esta dotada con una función de producción que exhibe retornos decrecientes a escala y que utiliza trabajo como único factor

[3] El supuesto de utilidad logarítmica puede ser fácilmente remplazado por funciones mas generales que sean consistentes con la existencia de un BGP, por ejemplo preferencias CES.

de producción para producir un bien homogéneo $y$,

$$y = zn^{\theta}, \qquad \theta \in (0, 1) .$$

Las firmas venden su producto en un mercado competitivo a precio $p(t)$, el cual usamos como numerario, tomando el valor del salario real $w(t)$ como dado.

En cada instante de tiempo, la firma $z$ decide entre buscar por una nueva tecnología $\tilde{z}$ o producir usando $z$. Al igual que en Perla and Tonetti (2014), la decisión endógena de imitar mejores métodos de producción impulsan el crecimiento económico El costo de invertir en una nueva tecnología es la imposibilidad de producir durante ese instante. Al invertir, la firma enfrenta un tasa de riesgo fija $\lambda \geq 0$ de encontrar una nueva tecnología. Si tiene éxito a tiempo $t' > t$, su nueva tecnología es sacada de la distribución de tecnologías existentes en $t'$, $\Psi(z, t')$. Alternativamente, la firma decide producir usando $z$.

Las fricciones en el mercado de trabajo vienen por la existencia de costos de despido,$\mathcal{F}(\dot{n}(t), t)$. Asumimos que la firma debe pagar una proporción $\kappa \geq 0$ del salario real $w(t)$ por trabajador despedido a tiempo $t$,

$$\mathcal{F}(\dot{n}(t), t) = \kappa w(t) \max\{0, -\dot{n}(t)\} .$$

De manera que, cuando la firma decide cuantos trabajadores contratar tiene en cuenta que en el futuro cambios en el numero de trabajadores están sujetos a estos costos de despido.

La firma $z$ elige cuantos trabajadores contratar y si buscar por una nueva tecnología con el fin de maximizar el valor presente de los profits. Como las firmas son de los consumidores, su factor de descuento es igual a la tasa de interés de la economía, $r(t) = \rho + g(t)$.

Para estudiar como los factores que restringen la reasignación de insumos entre las firmas modifican los incentivos a adoptar nuevas tecnologías procedemos en dos pasos. La Sección 3 analiza una economía sin fricciones ($\kappa = 0$). Allí mostramos como la capacidad de contratar y despedir trabajadores libremente fomenta la adopción mediante la competencia entre firmas por el factor trabajo. Luego, en la Sección 4, introducimos los costos de despido ($\kappa > 0$) y mostramos como estos distorsionan la decisión de empleo por las firmas y consecuentemente afectan su decisión de adopción.

# 3 Economía sin Fricciones

En nuestro modelo de referencia, el problema de la firma se puede separar en un componente estático y uno dinámico.

**Problema estático de la firma.** Cuando la firma utiliza la tecnología $z$ para producir debe decidir cuantos trabajadores contratar. Las decisiones de empleo es estática cuando no hay costos de despido y es la solución a,

$$\pi^u(z,t) = \max_n \left\{ z n^\theta - w(t) n \right\}.$$

A nivel de empleo de la firma con tecnología $z$ a tiempo $t$ esta dado por,

$$n^u(z,t) = \left( \frac{\theta z}{w(t)} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}. \tag{1}$$

**Problema dinámico de la firma.** Dado el flujo de beneficios para la firma en cada instante $t$, $\pi^u(z,t)$, la ley de movimiento para la distribución de tecnologías disponibles y la tasa de interés, cada firma tiene la decisión de tratar de adquirir una nueva tecnología $z'$ o producir. Dejamos que $V(z,t)$ y $V_s(t)$ denoten la función de valor para la firma cuando decide producir y cuando decide adoptar respectivamente. Es importante notar que el valor de adoptar una nueva tecnología no depende del nivel actual dela tecnología de la firma. Esto se debe a que tanto la tasa con la que una nueva tecnología llega, $\lambda$, y la distribución de la cual la firma obtiene su nueva tecnología, $\Psi(z',t)$, son independientes de $z$. Ademas, el valor de seguir usando la tecnología $z$, $V(z,t)$, es una función creciente de $z$. Estos dos resultados, en conjunto, implican que la decisión entre adoptar o producir esta caracterizada por una regla de umbral que depende de $t$, $M(t)$. Todas las firmas con tecnología $z < M(t)$ dejan de producir y se dedican a buscar nuevos métodos de producción. El nuevo nivel de tecnología lo obtienen de la distribución de tecnologías utilizadas para producir en el instante en que el Poisson shock le llega a la firma. El valor de la firma de buscar una nueva tecnología es la solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman,

$$r(t)\, V_s(t) = \lambda \mathbb{E}_{\Psi(\cdot,t)} \left[ V(z,t) - V_s(t) \right] + \frac{\partial V_s(t)}{\partial t}. \tag{2}$$

Las firmas con tecnología por encima de $M(t)$ producen y reciben el flujo de beneficios $\pi^u(z,t)$. El valor de utilizar la tecnología para producir, $V(z,t)$, es la solución a,

$$r(t)\, V(z,t) = \pi(z,t) + \frac{\partial V(z,t)}{\partial t}, \qquad z \geq M(t), \tag{3}$$

con condiciones de *value-matching* y *smooth pasting* dadas por,

$$V(M(t),t) = V_s(t), \qquad \frac{\partial V(M(t),t)}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

En el modelo, la firmas encuentran rentable pasar de producir a buscar tecnologías nuevas por dos motivos. Primero, a medida que otras firmas adoptan tecnologías, el set del cual ellas pueden adquirir una si deciden buscar mejora. Esto eventualmente impulsa a la firma a cambiar su tecnología. Este mecanismo está presente en los modelos de Lucas and Moll (2014) y Perla and Tonetti (2014). Nuevo en este modelo son los efectos de la competencia por el factor trabajo y sus efectos de equilibrio general. A medida que la economía crece y el salario real aumenta los beneficios de la firma por producir usando $z$ se reducen. Con ellos cae el costo de oportunidad de buscar nuevas tecnologías e impulsa mas adopción.

**Distribución de Tecnologías.** El ultimo elemento que tenemos que describir es la ley de movimiento para la distribución de tecnologías que se usan para producir en la economía

Utilizamos $S(t)$ para denotar la tasa a la que las firmas dejan de producir y comienzan a buscar nuevas tecnologías, y $H(t)$ para referirnos a la masa total de firmas que buscan nuevas tecnologías

La ecuación de Kolmogorov (KFE) que describe la evolución de la distribución de tecnologías, $\Psi(z,t)$, esta dada por la ecuación (5),

$$\frac{\partial \Psi(z,t)}{\partial t} = \lambda H(t)\Psi(z,t) - S(t), \quad \text{for all } z \geq M(t). \tag{5}$$

El lado derecho de esta ecuación describe como la distribución acumulada hasta $z$ evoluciona a través del tiempo. El primero de los términos refleja el influjo de firmas que adoptaron la tecnología $z$ o menor. Del total de firmas buscando nuevas tecnologías ,$H(t)$, solo una proporción $\lambda$ consiguen encontrar una tecnología en el instante $t$ y esa tecnología viene de la distribución $\Psi(z,t)$. El segundo termino refleja la perdida de masa por aquellas firmas que en el periodo deciden buscar nuevas tecnologías. Como en equilibrio solo adoptan aquellas firmas que se encuentran en el soporte inferior de la distribución, $S(t)$ refleja la cantidad de firmas que deciden comenzar a buscar en este instante. Esto implica que la tasa de adopción evoluciona según la ecuación diferencial,

$$S(t) = M'(t)\psi(M(t),t). \tag{6}$$

La velocidad a la que el umbral de adopción elimina tecnologías de la distribución, $M(t)$, y la cantidad de firmas que el umbral de adopción colecta de esa distribución, $\psi(M(t),t)$.

Finalmente, la masa total de firmas tratando de adoptar nuevas tecnologías evoluciona de acuerdo a la ecuación (7),

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -\lambda H(t) + S(t). \tag{7}$$

El primero de los términos describe la proporción de firmas que exitosamente logran obtener una nueva tecnología mientras que el segundo termino tiene en cuenta las firmas que ahora se encuentran por debajo del nuevo umbral. Al instante cero, la masa total de firmas que buscan tecnologías tiene que satisfacer $H(0) = \Phi_0(M(0))$, donde usamos $\Phi_0(\cdot)$ para denotar la distribución inicial de tecnologías en la economía, tanto para productores como para aquellas firmas que buscan adoptar. A partir de ahora asumimos que la distribución inicial de tecnologías es Pareto.

**Assumption 3.1.** La distribución inicial de tecnologías $\Phi_0(z)$ es Pareto con parámetros $z_m > 0$ y $\alpha > 1$,

$$\Phi_0(z) = 1 - \left(\frac{z_m(0)}{z}\right)^{\alpha}. \tag{8}$$

### Balanced Growth Path Equilibrium

En el resto de esta sección nos concentramos en resolver por el *balanced growth path equilibrium* (BGP). Un equilibrio BGP es un equilibrio en el que el consumo agregado, el salario real y la tasa de interés crecen a una tasa constante y la distribución de tecnologías es estacionaria cuando es re-escalada. Formalmente, un equilibrio BGP, dada una distribución inicial de tecnologías $\Phi_0(z)$; consiste en una sendero para la distribución de tecnologías $\Psi(z,t)$, para la política de adopción de tecnologías y de empleo $\{M(t), n^u(z,t)\}$, para el salario real y la tasa de interés $\{w(t), r(t)\}$, y para las funciones de valor $V(z,t)$ y $V_s(t)$ tales que,

- Dado los precios $\{w(t), r(t)\}$ y la distribución $\Psi(z,t)$, $M(t)$ es la regla de adopción optima; $n^u(z,t)$ es la política de empleo que resuelve el problema estático; y las funciones $V(z,t)$ y $V_s(t)$ son las funciones de valor para la producción y adopción de tecnologías respectivamente las cuales satisfacen,

$$V(z,t) = e^{gt} v\left(ze^{-gt}\right), \qquad V_s(t) = e^{gt} v_s$$

.

- La tasa de interés es constante, el consumo agregado re-escalado es estacionario y ambos son consistentes con la ecuación de Euler del agente representativo: $r = \rho + g$, con $g$ la tasa de crecimiento del consumo agregado.

- Los mercados de bienes y de trabajo se vacían en cada instante $t$.
- La distribución de tecnologías usadas para producir es la solución al sistema de ecuaciones diferenciales, (7)-(8), con,

$$\psi\left(z,t\right) = e^{-gt}\psi\left(ze^{-gt},0\right)$$

El resultado principal de esta sección es la caracterización del equilibrio BGP. El apéndice contiene los detalles del álgebra En esta economía, el crecimiento económico viene a través de las firmas en el soporte inferior de la distribución y sus decisiones de adopción de tecnologías De manera que, para resolver por el equilibrio, es conveniente normalizar las variables por el soporte inferior de la distribución de tecnologías que usan para producir, $M\left(t\right)$, y resolver por el equilibrio estacionario de las variables normalizadas. Usamos variables con tilde para referirnos a las variables normalizadas. Para los beneficios de la firma es útil normalizarlas también por el salario real. En el equilibrio BGP, el salario real normalizado es constante por lo que normalizar los beneficios de la firma por los salarios no afecta el equilibrio pero simplifica el álgebra sustancialmente.

Empezamos definiendo el cambio de variable $\tilde{z} = \frac{z}{M(t)}$, y la distribución normalizada de tecnologías,

$$F\left(\frac{z}{M\left(t\right)}\right) \equiv \Psi\left(z,t\right). \tag{9}$$

Bajo esta normalización, el umbral de adopción es siempre $\tilde{z} = 1$ para todo $t$.

Resolvemos por el equilibrio de la siguiente manera. Primero resolvemos por la distribución normalizada de tecnologías, la solución a la ecuación diferencial generada por las ecuaciones (7)) a (9). Luego, usamos las condiciones de vaciamiento de mercado para resolver por los precios de equilibrio. Finalmente, nos movemos al problema dinámico de la firma, caracterizamos las funciones de valor de la firma y resolvemos por la tasa de crecimiento de la economía.

**KFE para la distribución normalizada.** Para derivar la KFE para la distribución normalizada tenemos que combinar la definición de $F(\tilde{z})$, su propiedad de ser invariante en el tiempo con la KFE para $\Psi(\cdot, t)$, ecuación (5). Juntas se obtiene,

$$0 = \lambda H F(\tilde{z}) + \frac{\partial F(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \tilde{z} g - S. \tag{10}$$

Comparadas con la ecuación (5) la KFE para $F(\tilde{z})$ tiene un termino extra que corresponde a las firmas que no adoptan las cuales se mueven hacia atrás relativas a $M(t)$ a tasa $g$.[4]

En la ecuación anterior ya hemos impuesto que, en el BGP, la tasa a la que la firmas comienzan a buscar nuevas tecnologías, la masa total de firmas que buscan y la tasa de crecimiento son constantes (algo que tenemos que verificar). Las ecuaciones (7) a (10) junto al Supuesto3.1, implican las siguientes condiciones de equilibrio,

$$F(\tilde{z}) = 1 - \tilde{z}^{-\alpha}, \qquad \tilde{z} \geq 1, \tag{11}$$

$$S = \alpha g, \tag{12}$$

$$\lambda H = S, \tag{13}$$

$$M(0) = \Phi_0^{-1}(H). \tag{14}$$

La distribución de tecnologías usadas para la producción es una distribución truncada de la distribución original. La ecuación (13) nos dice que la masa de firmas que consiguen una nueva tecnología se iguala con la masa de firmas que pasan de producir a buscar tecnologías. La ecuación (14) es nuestra condición inicial para la ley de movimiento de $H(t)$ la cual define el umbral de adopción inicial. La distribución normalizada de tecnologías, ecuación (11), el nivel de empleo de la firma y las condiciones de vaciamiento del mercado laboral determinan

[4]Como el soporte inferior de la distribución es $\tilde{z} = 1$ para todo $t$, tenemos la condición necesaria $F(1) = 0$.

el salario real de equilibrio, $\tilde{w} = \theta \bar{z}$, con $\bar{z}^{\frac{1}{1-\theta}} \equiv \mathbb{E}_F\left[\tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}\right]$ la tecnología promedio utilizada para la producción.

**Ecuaciones dinámicas del equilibrio.** Habiendo caracterizado la distribución de tecnologías y el salario de equilibrio podemos ahora resolver el problema dinámico de la firma. En el BGP, el valor de continuar produciendo, y sus condiciones de *value matching smooth pasting*, ecuaciones (2))-(4)), se simplifican a,

$$(r-g)\, v(\tilde{z}) = \tilde{\pi}(\tilde{z}) - \tilde{z} g v'(\tilde{z}), \quad \tilde{z} \geq 1, \tag{15}$$

$$v(1) = v_s \tag{16}$$

$$v'(1) = 0 \tag{17}$$

con los beneficios normalizados para la firma dados por, $\tilde{\pi}(\tilde{z}) = \bar{\pi}_{\min} \tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}$.[5] La solución al sistema de ecuaciones diferenciales (15)-(17) es luego,

$$v(\tilde{z}) = \frac{\bar{\pi}_{\min} \tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}}{r + g\frac{\theta}{1-\theta}} + \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}} \left[ \frac{\bar{\pi}_{\min}}{(r-g)} - \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r + g\frac{\theta}{1-\theta}} \right]. \tag{18}$$

El primero de los términos corresponde al valor de operar la tecnología $\tilde{z}$ para siempre, mientras que el segundo representan el valor de la opción para la firma de buscar y adoptar una nueva tecnología. Finalmente, la función de valor para aquellos que deciden buscar nuevas tecnologías esta dada por la ecuación (19),

$$(r + \lambda - g)\, v_s = \lambda \mathbb{E}_F[v(\tilde{z})]. \tag{19}$$

### Crecimiento, adopción y la distribución del tamaño de las firmas.

La proposición 1 es el resultado principal de la sección y define la tasa de crecimiento de la economía en equilibrio como función de los fundamentals del modelo, completando la

[5] Definimos $\bar{\pi}_{\min} \equiv \frac{1-\theta}{\theta} \bar{z}^{-\frac{1}{1-\theta}}$

caracterización del equilibrio. Imponemos restricciones en los parámetros del modelo, las cuales están detalladas en la proposición. Primero, imponemos que la elasticidad de la demanda de trabajo no puede ser muy grande relativo al parámetro que gobierna la cola de la distribución de tecnologías para poder asegurar en cada instante del tiempo un nivel finito de producto agregado. Segundo, la elasticidad de la demanda de trabajo no puede ser muy chica para poder asegurar una tasa de crecimiento positiva.[6]

**Proposition 1.** Si la distribución inicial de tecnologías $\Phi_0(z)$ es Pareto con parámetro de escala $z_m(0) > 0$; y los parámetros del modelo satisfacen que $\alpha(1-\theta) > 1$ y $\lambda \in \rho(\alpha(1-\theta)-1)$, entonces existe un único BGP con tasa de crecimiento positiva y finita e igual a,

$$g = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\lambda}{(\alpha-1)} - \rho\right]}_{\text{Perla \& Tonetti (2014) sin demanda por trabajo Demand}} + \underbrace{\frac{\alpha\theta\lambda}{\alpha(\alpha(1-\theta)-1)(\alpha-1)}}_{\text{Competencia por el Trabajo}}. \tag{20}$$

*Proof.* See Appendix. □

La característica mas importante de la Proposición 1 es la dependencia de la tasa de crecimiento en la elasticidad de la demanda laboral. Cuando $\theta = 0$ la función de producción de cada firma no requiere de trabajo. En este caso, el modelo colapsa a una versión en tiempo continuo del modelo de Perla and Tonetti (2014). De manera que, la única fuerza que promueve la adopción de tecnologías y el crecimiento de la economía son las oportunidades de obtener mejores tecnologías las cuales mejoran con el tiempo. La dependencia de la tasa de crecimiento en $\theta$ en la ecuación (20) nos dice que las decisiones de las firmas introducen una fuerza adicional en el modelo. Los rendimientos decreciente a escala en la función de producción llevan a una tasa de crecimiento mayor relativo al modelo original. A medida que $\theta$ incrementa la demanda por trabajo se vuelve mas elástica por lo que los beneficios de la firma se vuelven mas reactivos a cambios en el salario. Cuando las firmas adoptan nuevas

[6]Para el caso con preferencias CES necesitamos ademas imponer restricciones que aseguren que la utilidad del agente representativo es finita.

tecnologías las firmas demandan mas trabajo y esto incrementa el salario real. Para aquellas firmas que deciden producir, esto significa un incremento en sus costos sin un aumento en sus ventas, los beneficios de la firma caen y con ellos el costo de oportunidad de seguir operando la misma tecnología Esto incentiva la adopción de nuevas tecnologías y genera mayor producto en la economía

La Proposición 2 hace este resultado mas claro al mostrar como el tiempo que la firma opera su tecnología, $\tau(\tilde{z})$, decrece con la elasticidad de la demanda por trabajo.

**Proposition 2.** Dada una tasa de crecimiento de la economía $g$,

1. El tiempo que una firma opera su tecnología $\tilde{z}$, $\tau(\tilde{z})$, es,

$$\tau(\tilde{z}) = \frac{\log(\tilde{z})}{\lambda g}.$$

2. El tiempo promedio que una firma tarda en buscar una nueva tecnología, $\bar{\tau}$, esta dada por,

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda \alpha g}$$

3. El tiempo promedio que una firma tarda en buscar una nueva tecnología, $\bar{\tau}$ es decreciente en la elasticidad de la demanda de trabajo, $\theta$.

*Proof.* See Appendix. □

# 4 Economía con fricciones

En esta ultima sección introducimos los costos de despidos, $\kappa > 0$, para estudiar los efectos de la asignación ineficiente de recursos entre firmas en sus decisiones sobre adoptar nuevas tecnologías. En este caso nos concentramos en estudiar el problema de la firma en equilibrio parcial donde tomamos la tasa de crecimiento $g > 0$, y la evolución de los precios como dados con $r = \rho + g$.

La contribución principal de esta sección es la caracterización de la demanda por trabajo de la firma y el tiempo total que opera su tecnología antes de adoptar una nueva. Comparamos estas decisiones con las de nuestra economía base presentada en la Sección 3. Para el resto del trabajo imponemos el Supuesto 4.1 el cual asegura que al menos una medida positiva de firmas encuentra optimo despedir trabajadores en algún punto en el tiempo. [7]

**Assumption 4.1.** Asumimos que $1 - \kappa\rho > 0$.

**Problema dinámico de la firma.** La introducción de costos de despidos no nos permiten separar el problema de la firma entre un problema estático y uno dinámico como lo hicimos en la Sección 3. Ahora, las decisiones de empleo incluyen las expectativa sobre posibles despidos en el futuro con sus respectivos costos. Al mismo tiempo, para saber cuantos trabajadores contratar la firma necesita saber cuantos trabajadores tiene en caso de que desea reducir su numero de trabajadores. Por estos motivos el nivel de empleo de la firma es ahora un variable de estado relevante para la firma.

Al igual que antes, usamos $V(z, n, t)$ para denotar el valor de la firma que utiliza la tecnología $z$ para producir y que cuenta con $n$ trabajadores. Similarmente, dejamos que $V_{s,\kappa}(t)$ denote el valor de la firma que busca una nueva tecnología. Esta función no depende de la tecnología que la firma posee al momento de buscar por los mismos motivos que en la Sección 3. Ademas, esta no depende del nivel de empleo de la firma al momento de iniciar su búsqueda lo cual es una consecuencia de asumir que los costos de despido solo aplican a los trabajadores usados durante el proceso de producción.[8] Notamos que la función esta indexada por $\kappa$ para distinguirla de contraparte en el modelo sin fricciones. Por ultimo, al igual que en la Sección anterior, como el valor de adoptar es independiente de $z$ y el valor de producir es creciente en $z$ dado $n$, tenemos que la decisión de buscar una tecnología es

[7] Sin el Supuesto 4.1 todas las firmas mantienen su nivel de empleo constante hasta que deciden adoptar una nueva tecnología.

[8] El supuesto que las firmas pueden despedir a voluntad cuando deciden empezar a buscar una tecnología no es muy atractivo ni realista. Sin embargo, vuelve al modelo manejable y nos permite caracterizar la dinámica del nivel e empleo para la firma en el BGP.

también aquí una regla de umbral que depende del tiempo calendario.

En nuestra economía con costos de despido las decisiones dinámicas de las firmas están descriptas por las siguiente ecuaciones HJB. Las firmas que buscan nuevas tecnologías para imitar mantienen cero trabajadores dado que pueden despedir libremente. Su dinámica es similar a las de la economía sin fricciones excepto que al encontrar una tecnología $z$ obtienen el valor de una firma con $n = 0$, $V(z, 0, t)$,

$$r(t) V_{s,\kappa}(t) = \mathbb{E}_{\Psi(\cdot,t)} \left[ V(z, 0, t) - V_{s,\kappa}(t) \right] + \frac{\partial V_{s,\kappa}(t)}{\partial t}. \tag{21}$$

El problema para aquellas firmas que deciden emplear su tecnología incorpora ahora los elementos importantes del problema. Un productor con tecnología $z$ y empleo igual a $n$ en el instante $t$ tiene valor igual $V(z, n, t)$ que satisface,

$$r(t) V(z, n, t) = \max_u \left\{ \pi(z, n, t) - \mathcal{F}(u, t) + \frac{\partial V(z, n, t)}{\partial n} u + \frac{\partial V(z, n, t)}{\partial t} \right\} \tag{22}$$

$$\text{s.t. } \dot{n} = u,$$

Comparado con nuestra economía sin fricciones, la ecuación (22) incorpora el cambio in el valor de la firma que viene por cambios en el nivel de empleo: el costo de despedir trabajadores, $\mathcal{F}(u, t)$, y la ganancia por acercarse a la escala eficiente de producción, $\frac{\partial V(z,n,t)}{\partial n}$.

**Nivel de empleo y decisiones de adopción.** Para caracterizar la solución al problema del productos con tecnología $z$ es conveniente usar las herramientas de control optimo y separar la variable de control $u(t)$ en dos partes. Usamos $h(t)$ para denotar el flujo de empleados contratados en el instante $t$ y $f(t)$ para el flujo de trabajadores despedidos. Es importante remarcar que sólo una de estas variables puede ser estrictamente positiva en el instante $t$. Con estas definiciones tenemos $u(t) = h(t) - f(t)$ y $\mathcal{F}(u, t) = \kappa w(t) f$.[9] La firma

[9]Esta reformulación del problema nos devuelve el mismo sendero optimo para el nivel de empleo que en el problema descripto por las HJB. Sin embargo, hacen del problema mucho mas sencillo porque convierten a la función objetivo en una función continuamente diferenciable en todos sus argumentos con lo cual podemos

resuelve entonces,

$$\max_{f,h\geq 0,n(t),T\geq t} \quad \int_t^T e^{-r(\tau-t)}\left\{zn\left(\tau\right)^{\theta}-w\left(\tau\right)n\left(\tau\right)-\kappa w\left(\tau\right)f\left(\tau\right)\right\}d\tau+e^{-r(T-t)}V_s\left(T\right), \quad (23)$$

$$\text{s.t. } \dot{n}\left(\tau\right)=h\left(\tau\right)-f\left(\tau\right)$$

$$n\left(\tau\right)=n\left(t\right)+\int_t^{\tau}\dot{n}\left(s\right)ds.$$

Usando $\lambda\left(\tau\right)$ para la variable de co-estado, podemos definir el Hamiltoniano para este problema, $\mathcal{H}\left(n,h,f,\lambda,\tau\right)$:

$$\mathcal{H}\left(n,h,f,\lambda,\tau\right)\equiv zn^{\theta}-w\left(\tau\right)n-\kappa w\left(\tau\right)f+\lambda\left(\tau\right)\left[h-f\right].$$

Su solución esta caracterizada por el siguiente sistema de condiciones necesarias y suficientes,

$$\{h\}:\lambda\left(\tau\right)\leq 0 \qquad \text{(con iguald si } h>0) \qquad (24)$$

$$\{f\}:-\kappa w\left(\tau\right)-\lambda\left(\tau\right)\leq 0 \qquad \text{(con igualdad si } f>0) \qquad (25)$$

$$\{n\}:\dot{\lambda}\left(\tau\right)-r\left(\tau\right)\lambda\left(\tau\right)=-\left[\theta zn\left(\tau\right)^{\theta-1}-w\left(\tau\right)\right] \qquad (26)$$

con condiciones de borde dadas por $\lambda\left(t\right)=\lambda\left(T\right)=0$ ya que el nivel de empleo inicial tanto como el nivel de empleo al momento que se adopta una tecnología son variables libres. Finalmente, el momento optimo de comenzar a buscar una tecnología, $T_s$, satisface,

$$rV_s\left(T_s\right)-\frac{\partial V_s\left(T_s\right)}{\partial\tau}=\mathcal{H}\left(n\left(T_s\right),h\left(T_s\right),f\left(T_s\right),\lambda\left(T_s\right),T_s\right). \qquad (27)$$

Las ecuaciones (24) a (27) caracterizan las dinámicas del nivel de empleo y la decisión de adopción para la firma, ambas están descriptas en la Proposición 3.

**Proposition 3.** El nivel de empleo optimo para la firma $n\left(z,\tau\right)$ esta caracterizado por una

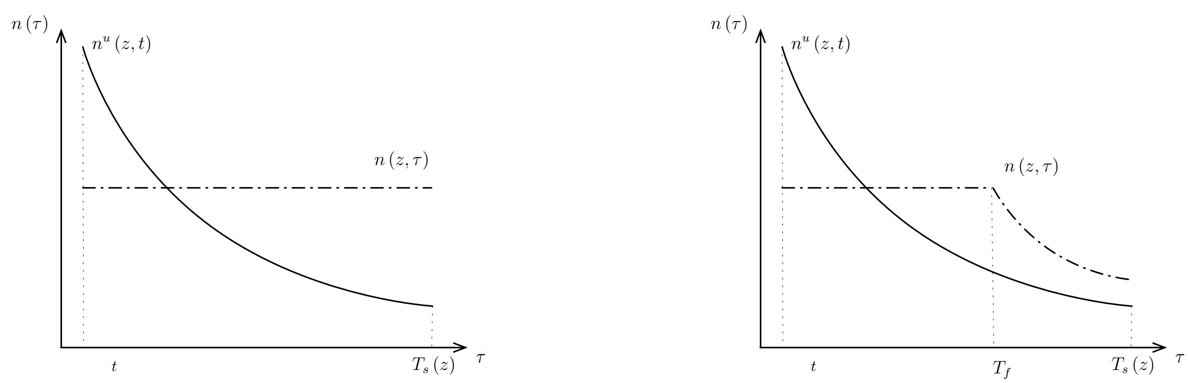
usar las herramientas estándar de optimización para caracterizar la solución. Vea, por ejemplo, Samaniego (2006) para una discusión mas detallada sobre este tipo de métodos decisión de umbral $\tilde{z}(t)$ y dos tiempos de parada $T_f$ y $T_s(z)$ tales que después de haber adoptado la tecnología $z$ en el instante $t$,

- Si $z \leq \tilde{z}(t)$, $n(z,\tau) = n^c(z, T_s(z))$,
- Si $z > \tilde{z}(t)$, luego $n(z,\tau) = n(z, T_f)$ para $\tau \in [t, T_f]$ y $n(z,\tau) = n^c(z,\tau)$ para $\tau \in [T_f, T_s(z)]$.

donde $n^c(z, T_s(z)) = \left[\frac{\theta z}{(1-\kappa\rho)w(\tau)}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}$. Ademas, el nivel de empleo satisface $n(z,t) < n^u(z,t)$ y $n^c(z,\tau) > n^u(z,\tau)$ para $\tau \in [T_f, T_s(z)]$.

Proposición 3 implica que, en presencia de costos de despido, todas las firmas comienzan operando a una escala menor a la eficiente. Algunas de estas firmas mantienen esta escala ineficiente hasta el momento en que deciden buscar una nueva tecnología. El resto, mantiene este nivel de empleo por $T_f$ periodos a partir del cual comienzan a despedir trabajadores. En ambos casos, las firmas pasan a operar a una escala mayor a la eficiente antes de buscar una nueva tecnología. La figura 1 ilustra las dinámicas de la Proposición 3

Figure 1: Dinamicas de Empleo con Costos de Despido




El ultimo resultado de esta sección caracteriza la relación entre los costos de despido y la decisión de las firmas de adoptar una nueva tecnología Los resultados en la Proposición 3 junto a la ecuación (27) determinan el momento optimo para la firma de empezar a buscar una nueva tecnología,

$$(r-g)\, v_s\,(\kappa)\, e^{\frac{g}{1-\theta}T_s(z)} = \left[\frac{1-\theta-\kappa\,(r-g)}{\theta} - \frac{\kappa g}{1-\theta}\right]\left[\frac{\theta z}{1-\kappa\,(r-g)}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}. \tag{28}$$

Los efectos de cambios en los costos de despidos están dados por la relación entre $T_s(z)$ y $\kappa$. En nuestro análisis de equilibrio parcial, tomando como dados la tasa de crecimiento de la economía y la tasa de interés, cambios en el parámetro $\kappa$ tiene dos efectos opuestos sobre $T_s\,(z)$. Primero, mayores costos de despidos reducen el retorno a adoptar tecnologías el cual esta capturado por la caída en la función de valor $v_s\,(\kappa)$. Al mismo tiempo, buscar por una nueva tecnología adquiere mayor valor porque posibilita a la firma resetear su nivel de empleo y acercarse a su escala eficiente, estos efectos están capturados por los cambios en el lado derecho de la ecuación (28). El efecto total sobre el tiempo de adopción $T_s(z)$ depende de la fuerza relativa de cada uno de estos efectos y cual domina en la practica es una pregunta cuantitativa que escapa a este proyecto.[10]

# 5 Conclusión

En este trabajo estudiamos como factores que impiden la libre reasignación de recursos entre firmas modifica sus incentivos a adoptar nuevas tecnologías. Para ello, desarrollamos un modelo de difusión de tecnología con fricciones en el mercado de trabajo extendiendo Perla and Tonetti (2014). Argumentamos que la libre movilidad de los factores es una fuerza adicional que impulsa la adopción de tecnologías y por lo tanto el crecimiento económico. En una economía sin costos de despido, aumentos en la demanda por trabajo de aquellos que adoptan se convierte en una externalidad para otras firmas impulsándolas a adoptar nuevas tecnologías antes de tiempo.

Fricciones a la reasignación de recursos restringen este mecanismo e inducen a las firmas

[10] El momento optimo de despedir trabajadores, $T_f$, se dilata en el tiempo cuando aumentan los costos de despidos.

a operar a una escala ineficiente. Al mismo tiempo, esta ineficiencia reduce los profits de las firmas y con ello su costo de oportunidad de buscar nuevas tecnologías. La tasa de adopción de la economía es el resultado de estas dos fuerzas contrapuestas y cual domina en cada contexto es una pregunta cuantitativa y que escapa a este proyecto.

Nuestro modelo con costos de despido es analizado en equilibrio parcial, tomando la evolución de los precios como dados. De manera que nuestro análisis no captura los efectos de equilibrio general que tienen las decisiones de empleo de las firmas sobre la evolución del salario real. Consideramos que incorporar estos efectos son cruciales para entender que pasa con la tasa de crecimiento de la economía como vimos en la economía sin fricciones. Sin embargo, dejamos este análisis para trabajos futuros.

# References


**Acemoglu and Autor**, "Chapter 12 - Skills, Tasks and Technologies: Implications for Employment and Earnings," in "in," Vol. 4 of *Handbook of Labor Economics*, Elsevier, 2011, pp. 1043 – 1171.

**Acemoglu, Daron and Pascual Restrepo**, "The Race between Man and Machine: Implications of Technology for Growth, Factor Shares, and Employment," *American Economic Review*, June 2018, *108* (6), 1488–1542.

**_ and _**, "Automation and New Tasks: How Technology Displaces and Reinstates Labor," *Journal of Economic Perspectives*, May 2019, *33* (2), 3–30.

**Bento, Pedro and Diego Restuccia**, "Misallocation, Establishment Size, and Productivity," *American Economic Journal: Macroeconomics*, July 2017, *9* (3), 267–303.

**Boedo, Hernan J. Moscoso and Toshihiko Mukoyama**, "Evaluating the effects of entry regulations and firing costs on international income differences," *Journal of Economic Growth*, 2012, *17* (2), 143–170.

**Da-Rocha, Jose-Maria, Marina Mendes Tavares, and Diego Restuccia**, "Firing Costs, Misallocation, and Aggregate Productivity," Working Paper 23008, National Bureau of Economic Research December 2016.

**Hopenhayn, Hugo and Richard Rogerson**, "Job Turnover and Policy Evaluation: A General Equilibrium Analysis," *Journal of Political Economy*, 1993, *101* (5), 915–938.

**Hsieh, Chang-Tai and Peter J. Klenow**, "Misallocation and Manufacturing TFP in China and India*," *The Quarterly Journal of Economics*, 11 2009, *124* (4), 1403–1448.

**Lucas, Robert E.**, "Ideas and Growth," *Economica*, 2009, *76* (301), 1–19.

— **and Benjamin Moll**, "Knowledge Growth and the Allocation of Time," *Journal of Political Economy*, 2014, *122* (1), 1–51.

**Mukoyama, Toshihiko and Sophie Osotimehin**, "Barriers to Reallocation and Economic Growth: The Effects of Firing Costs," *American Economic Journal: Macroeconomics*, October 2019, *11* (4), 235–70.

**Perla, Jesse and Christopher Tonetti**, "Equilibrium Imitation and Growth," *Journal of Political Economy*, 2014, *122* (1), 52–76.

**Poschke, Markus**, "Employment protection, firm selection, and growth," *Journal of Monetary Economics*, 2009, *56* (8), 1074–1085.

**Restuccia, Diego and Richard Rogerson**, "Policy distortions and aggregate productivity with heterogeneous establishments," *Review of Economic Dynamics*, 2008, *11* (4), 707 – 720.

**Samaniego, Roberto M.**, "Employment protection and high-tech aversion," *Review of Economic Dynamics*, 2006, *9* (2), 224 – 241.

# A Economía sin fricciones

## A.1 Agente Representativo

El agentee representativo resuelve,:

$$\max \int_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \frac{C(\tau)^{1-\gamma}}{1-\gamma} d\tau, \quad C(\tau) + \dot{A}(\tau) = w(\tau) + r(\tau) A(\tau) + T(\tau). \tag{29}$$

Usando $\lambda(\tau)$ como variable de co-estado, tenemos que la solución esta caracterizado las siguiente ecuaciones,

$$\begin{aligned}
\{C\} :& C(t)^{-\gamma} = \lambda(t), \qquad\qquad \forall t \geq 0 \\
\{A\} :& \dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) = -r(t)\lambda(t), \\
\{\lambda\} :& C(t) + \dot{A}(t) = w(t) + r(t) A(t) + T(t).
\end{aligned}$$

Juntas implican la ecuación de Euler,

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\gamma}(r(t) - \rho). \tag{30}$$

## A.2 Problema estático de la firma.

La firma elige $n(t)$ para maximizar,

$$\pi(z,t) = \max_{n(t)} \left\{ zn(t)^{\theta} - w(t) n(t) \right\}.$$

Usamos $n(z,t)$ para referirnos a la demanda óptima por trabajo, tenemos que $n(z,t)$ satisface,

$$\{n\} : \theta z n(z,t)^{\theta-1} = w(t),$$

la cual implica,

$$n(z,t) = \left(\frac{\theta z}{w(t)}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}. \tag{31}$$

El producto y los beneficios de la firma están dados luego por,

$$y(z,t) = \bar{\theta} z^{\frac{1}{1-\theta}} w(t)^{-\frac{\theta}{1-\theta}}, \qquad \pi(z,t) = (1-\theta)\,\bar{\theta} z^{\frac{1}{1-\theta}} w(t)^{-\frac{\theta}{1-\theta}}, \tag{32}$$

donde hemos definido $\bar{\theta} = \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}$.

## A.3 Problema dinámico de la firma.

Las funciones $V(z,t)$ satisface la siguiente ecuación Hamilton-Jacobi-Belllman,

$$r(t)\,V(z,t) = \pi(z,t) + \frac{\partial V(z,t)}{\partial t}, \qquad z \geq M(t), \tag{33}$$

con condiciones *value-matching* y *smooth pasting* dadas por,

$$V(M(t),t) = V_s(t), \qquad \frac{\partial V(M(t),t)}{\partial z} = 0. \tag{34}$$

Mientras que $V_s(t)$ satisface,

$$r(t)\,V_s(t) = \lambda \int_{M(t)}^{\infty} [V(z,t) - V_s(t)]\, d\Psi(z,t) + \frac{\partial V_s(t)}{\partial t}. \tag{35}$$

## A.4 Distribución de Tecnologías

Utilizamos $S(t)$ para denotar la tasa de adopción y $H(t)$ para el total de firmas que buscan una tecnología en el instante $t$. Como tenemos una masa de medida uno de firmas, $S(t)$ tambien representa el flujo de firmas que pasan de producir a adoptar en el instante $t$. La variable $H(t)$ cambia en el tiempo de acuerdo a,

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -\lambda H(t) + S(t) . \tag{36}$$

Al instante cero esta debe satisfacer,

$$H(0) = \Phi(M(0), 0) ,$$

donde usamos $\Phi(\cdot, 0)$ para denotar la distribucion de tecnologias en la economia (producen y adoptan) a tiempo cero. Para la tasa de adopcion tenemos,

$$S(t) = M'(t) \psi(M(t), t) . \tag{37}$$

La KFE para la distribución de tecnologías usadas para la producción esta dada por,

$$\frac{\partial \Psi(z,t)}{\partial t} = \lambda H(t) \Psi(z,t) - S(t) . \tag{38}$$

A partir de ahora asumimos que la distribución inicial es Pareto con parámetros $z_m > 0$ y $\alpha > \frac{1}{1-\theta} > 1$:

$$\Phi(z, 0) = 1 - \left( \frac{z_m(0)}{z} \right)^{\alpha} .$$

Esto implica que la distribución de tecnologías usadas para producira tiempo cero es también Pareto con parámetros $(M(0), \alpha)$:

$$\psi(z, 0) = \frac{\phi(z, 0)}{1 - \Phi(M(0), 0)} = \alpha M(0)^{\alpha} z^{-\alpha-1}. \tag{39}$$

## A.5 Equilibrio BGP.

Un equilibrio en esta economía consiste, dad una distribución inicial $\Phi(z, 0)$, es una sendero para la distribución de tecnologías $\Psi(z, t)$, políticas de adopción para la firma $M(t)$, política de empleo $n(z,t)$, salarios $w(t)$ y una tasa de interés $r(t)$, funciones $V(z,t)$ y $V_s(t)$ tales que,

- Dado los precios $\{w(t), r(t)\}$ y la distribución $\Psi(z,t)$: $M(t)$ es la regla de umbral óptima; $n(z,t)$ es la demanda por trabajo; y $V(z,t)$ y $V_s(t)$ son las funciones de valor de la firma.

- El mercado de bienes y trabajo se vacían en cada instante $t$:

$$1 = \int_{M(t)}^{\infty} n(z,t)\, d\Psi(z,t), \qquad C(t) = \int_{M(t)}^{\infty} y(z,t)\, d\Psi(z,t).$$

- La tasa de interés $r(t)$ y el consumo agregado son consistentes con la ecuación de Euler,

$$r(t) = \rho + \gamma g(t),$$

  donde $g(t)$ es la tasa de crecimiento del consumo.

- La distribución de tecnologías es la solución al sistema de ecuaciones diferenciales dado por, (36)-(39) .

Nos concentramos en un equilibrio particular, el equilibrio BGP. Este, es un equilibrio en el que el consumo agregado y el salario real crecen a una tasa constante, la tasa de interés permanece constante y la distribución de tecnologías es invariante en el tiempo cuando se la normaliza por la tasa de crecimiento.

Para resolver por el BGP es útil normalizar las variables por $M(t)$ y resolver por el equilibrio estacionario de las variables normalizadas.

**Distribución de tecnologías normalizadas.** Definimos el cambio de variable $\tilde{z} = \frac{z}{M(t)}$, $g(t) = \frac{M'(t)}{M(t)}$ y $F\left(\frac{z}{M(t)}, t\right) \equiv \Psi(z,t)$. Tomando la derivada con respecto a $z$:

$$\phi(z,t) = \frac{1}{M(t)} f\left(\frac{z}{M(t)}, t\right).$$

Este cambio de variable implica que el umbral de adopcion es siempre $z = 1$ para todo $t$.

**Condiciones de equilibrio estáticas normalizadas.** Normalizamos la variable por el valor del umbral $M(t)$ y definimos,

$$\tilde{w}(t) = \frac{w(t)}{M(t)}, \quad \tilde{n}(z,t) = n(z,t), \quad \tilde{y}(z,t) = \frac{y(z,t)}{M(t)}, \quad \tilde{\pi}(z,t) = \frac{\pi(z,t)}{M(t)\,\tilde{w}(t)}.$$

Normalizamos los beneficios de la firma además con $\tilde{w}(t)$. Esto ayuda a simplificar las expresiones. Usando nuestras ecuaciones estáticas (31) y (32) obtenemos,

$$\begin{aligned}
\tilde{n}(z,t) &= \left(\frac{\theta z/M(t)}{\tilde{w}(t)}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \\
\tilde{y}(z,t) &= \bar{\theta}\left(\frac{z}{M(t)}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \tilde{w}(t)^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \\
\tilde{\pi}(z,t) &= (1-\theta)\,\bar{\theta}\left(\frac{z}{M(t)}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \tilde{w}(t)^{-\frac{1}{1-\theta}}.
\end{aligned}$$

**Varables agregadas normalizadas.** El total de empleo demandado para producción esta dado por,

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(t) &= \int_{M(t)}^{\infty} n(z,t)\,\psi(z,t)\,dz \\
&= \int_{M(t)}^{\infty} n(z,t)\, f\left(\frac{z}{M(t)}, t\right) \frac{dz}{M(t)} \\
&= \int_{1}^{\infty} \left(\frac{\theta \tilde{z}}{\tilde{w}(t)}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} f(\tilde{z},t)\,d\tilde{z} \\
&= \left(\frac{\theta}{\tilde{w}(t)}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \mathbb{E}_{F(\cdot,t)}\left[\tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}\right].
\end{aligned}$$

donde definimos $\bar{z}(t) = \mathbb{E}_{F(\cdot,t)}\left[\tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}\right]^{1-\theta}$. $\bar{z}(t)$ representa el valor promedio de las tecnologías normalizadas usadas para producir. used in production. Luego, la demanda total por trabajo puede escribirse como,

$$\tilde{N}(t) = \left(\frac{\theta \bar{z}(t)}{\tilde{w}(t)}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}. \tag{40}$$

El producto toal normalizado y los beneficios de la firma son,

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(t)}{M(t)} &= \int_{M(t)}^{\infty} \tilde{y}(z,t)\,\psi(z,t)\,dz = \bar{\theta}\tilde{w}(t)^{-\frac{\theta}{1-\theta}}\,\bar{z}(t)^{\frac{1}{1-\theta}}\,, \\
\frac{\Pi(t)}{M(t)\,\tilde{w}(t)} &= (1-\theta)\,\bar{\theta}\tilde{w}(t)^{-\frac{1}{1-\theta}}\,\bar{z}(t)^{\frac{1}{1-\theta}}\,.
\end{aligned} \tag{41}
$$

**Vaciamiento de Mercado.** Concluimos esta sección calculando los precios de equilibrio. Vaciamiento del mercado de trabajo require,

$$
1 = \tilde{N}(t) \implies \tilde{w}(t) = \theta\bar{z}(t)\,. \tag{42}
$$

Usando la ecuacion (41) podemos calcular el consumo agregado (normalizado)

$$
\tilde{C}(t) = \bar{z}(t)\,. \tag{43}
$$

Importante, para después, los beneficios de la firma son,

$$
\tilde{\pi}(\tilde{z},t) = \bar{\pi}(t)_{\min}\,\tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}, \tag{44}
$$

donde definimos $\bar{\pi}_{\min}(t) \equiv \frac{1-\theta}{\theta}\bar{z}(t)^{-\frac{1}{1-\theta}}$.

**Problema dinámico de la firma normalizado.** En esta sección normalizamos las funciones relacionadas al problema dinámico. Para el valor de continuación tenemos,

$$
v\left(\frac{z}{M(t)}, t\right) \equiv \frac{V(z,t)}{M(t)\,\tilde{w}(t)},
$$

o,

$$
V(z,t) = M(t)\,\tilde{w}(t)\,v\left(\frac{z}{M(t)}, t\right).
$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo y dividiendo esta por $M(t)\tilde{w}(t)$, obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(t)\tilde{w}(t)}\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} &= \frac{M'(t)}{M(t)}v\left(\frac{z}{M(t)},t\right)+\frac{\tilde{w}'(t)}{\tilde{w}(t)}v\left(\frac{z}{M(t)},t\right)\\ &\quad -\frac{z}{M(t)}\frac{M'(t)}{M(t)}\frac{\partial v\left(\frac{z}{M(t)},t\right)}{\partial z}+\frac{\partial v\left(\frac{z}{M(t)},t\right)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Luego, de la ecuación HJB, la ecuacion (33), obtenemos,

$$(r(t)-g(t)-g_{\tilde{w}}(t))\,v(\tilde{z},t)=\tilde{\pi}(z,t)-\tilde{z}g(t)\frac{\partial v(\tilde{z},t)}{\partial \tilde{z}}+\frac{\partial v(\tilde{z},t)}{\partial t},\qquad \tilde{z}\geq 1. \tag{45}$$

De manera similar, definimos el valor normalizado de adoptar una tecnología como,

$$v_s(t)=\frac{V_s(t)}{M(t)\tilde{w}(t)}.$$

Luego,

$$\frac{1}{M(t)\tilde{w}(t)}\frac{\partial V_s(t)}{\partial t}=\frac{M'(t)}{M(t)}v_s(t)+\frac{\tilde{w}'(t)}{\tilde{w}(t)}v_s(t)+v_s'(t).$$

Usando la ecuación (35), obtenemos la ODE normalizada para el valor de adoptar,

$$\left(r(t)v_s(t)-\lambda\int_1^{\infty}[v(\tilde{z},t)-v_s(t)]\,f(\tilde{z},t)\,d\tilde{z}\right)=\frac{M'(t)}{M(t)}v_s(t)+\frac{\tilde{w}'(t)}{\tilde{w}(t)}v_s(t)+v_s'(t). \tag{46}$$

Las condiciones de *value matching* y *smooth pasting* ahora son,

$$v(1,t)=v_s(t),\qquad \frac{\partial v(1,t)}{\partial \tilde{z}}=0. \tag{47}$$

**KFE para la distribución normalizada.** Tomando la derivada contra el tiempo en la definición de $F(\cdot,t)$:

$$\frac{\partial \Psi(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial F\left(\frac{z}{M(t)},t\right)}{\partial t}-\frac{\partial F\left(\frac{z}{M(t)},t\right)}{\partial \tilde{z}}\frac{z}{M(t)}g(t).$$

Combinamos esta con la KFE para $\Psi(\cdot, t)$, ecuación (38), y la definición de $F(\cdot, t)$ para obtener,

$$\frac{\partial F(\tilde{z}, t)}{\partial t} = \lambda H(t) F(\tilde{z}, t) + \frac{\partial F(\tilde{z}, t)}{\partial \tilde{z}} \tilde{z} g(t) - S(t). \tag{48}$$

El termino extra en esta ecuación corresponde a las firmas que no adoptan y que se mueven hacia atrás en la distribución a medida que las otras firmas adoptan mejores tecnologías. Como el soporte inferior es $\tilde{z} = 1$ en todo $t$, tenemos que,

$$F(1, t) = 0, \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial F(1, t)}{\partial t} = 0 \quad \forall t.$$

### A.5.1 Resolviendo el BGP.

En el BGP la distribución normalizada es invariante,

$$F(\tilde{z}, t) = F(\tilde{z}) \implies \frac{\partial F(\tilde{z}, t)}{\partial t} = 0. \tag{49}$$

Comenzamos con la ecuación (48), resolviendo por la distribución invariante $F(\tilde{z})$. Luego, utilizamos la condición de equilibrio en el mercado de trabajo junto con la distribución $F(\cdot)$ para calcular el salario de equilibrio y los beneficios de la firma. Dado el salario de equilibrio, resolvemos el sistema de ODE que caracterizan $v(\tilde{z})$ y $v_s$. Al final del camino computamos la tasa de crecimiento y confirmamos que la misma es constante.

**Distribución invariante.** En el BGP, $g(t) = g$, $S(t) = S$ y $H(t) = H$. Luego, usando (36), (48) y (49) obtenemos,

$$\begin{aligned} H &= \frac{S}{\lambda}, \\ H &= \Phi(M(0), 0), \\ S &= \lambda H F(\tilde{z}) + \frac{\partial F(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \tilde{z} g. \end{aligned}$$

La solución para esta ODE es Pareto con parámetro, $\frac{S}{g}$:

$$F\left(\tilde{z}\right) = 1 - \tilde{z}^{-\frac{S}{g}}, \qquad \tilde{z} \geq 1. \tag{50}$$

Bajo nuestro supuesto sobre la distribución inicial tenemos,

$$f\left(\tilde{z}\right) = M\left(0\right)\psi\left(z,0\right) = M\left(0\right)\frac{\phi\left(z,0\right)}{1-\Phi\left(M\left(0\right),0\right)} = \alpha\tilde{z}^{-\alpha-1}.$$

Por lo tanto,

$$S = g\alpha, \quad H = \frac{S}{\lambda}, \quad H = 1 - \left(\frac{z_m}{M\left(0\right)}\right)^{\alpha}. \tag{51}$$

**Variables estáticas de equilibrio.** Con la distribucion invariante podemos calcular:

- Salario real,

$$\tilde{w} = \theta\bar{z}, \tag{52}$$

  con

$$\bar{z}^{\frac{1}{1-\theta}} = \mathbb{E}_F\left[\tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}\right] = \frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{1-\theta}}.$$

- Beneficios de la firma, ecuación (44):

$$\tilde{\pi}\left(\tilde{z}\right) = \bar{\pi}_{\min}\tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}},$$
$$\bar{\pi}_{\min} \equiv \frac{1-\theta}{\theta}\bar{z}^{-\frac{1}{1-\theta}}.$$

- Consumo agregado

$$C\left(t\right) = \tilde{C}M\left(t\right)$$
$$\tilde{C} = \bar{z}.$$

**Variables dinámicas de equilibrio.** Empezamos con el valor de continuación. En el equilibrio estacionario para las variables normalizadas tenemos $v(\tilde{z}, t) = v(\tilde{z})$. Luego, usando (45) y (47), obtenemos,

$$(r - g)\, v(\tilde{z}) = \tilde{\pi}(\tilde{z}) - \tilde{z} g v'(\tilde{z}), \quad \tilde{z} \geq 1, \tag{53}$$

con,

$$v(1) = v_s, \qquad v'(1) = 0.$$

Re-ordenando la ecuación (53) llegamos a,

$$\frac{(r-g)}{\tilde{z}g} v(\tilde{z}) + \frac{\partial v(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{z}g} \tilde{\pi}(\tilde{z}).$$

Ahora, supongamos que existe una función $\mu(\tilde{z}) > 0$ satisfaciendo,

$$\mu(\tilde{z}) \frac{(r-g)}{\tilde{z}g} = \mu'(\tilde{z}) \implies \mu(\tilde{z}) = \mu(1)\, \tilde{z}^{\frac{r-g}{g}}.$$

Multiplicando la HJB por $\mu(\tilde{z})$ obtenemos,

$$\mu'(\tilde{z})\, v(\tilde{z}) + \mu(\tilde{z}) \frac{\partial v(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} = \mu(\tilde{z}) \frac{1}{\tilde{z}g} \tilde{\pi}(\tilde{z}).$$

Integrando esta ecuación entre $[1, \tilde{z}]$,

$$\mu(\tilde{z})\, v(\tilde{z}) = \mu(1)\, v(1) + \int_1^{\tilde{z}} \mu(x) \frac{1}{xg} \tilde{\pi}(x)\, dx.$$

Usando la forma funcional de $\mu(\tilde{z})$ y la condición de *value matching*, llegamos a

$$
\begin{aligned}
v(\tilde{z}) &= \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}} v_s + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{g} \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}} \int_1^{\tilde{z}} x^{\frac{r-g}{g}+\frac{\theta}{1-\theta}} dx \\
&= \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}} v_s + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{g} \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}} \frac{1}{\frac{r}{g}+\frac{\theta}{1-\theta}} \left[\tilde{z}^{\frac{r}{g}+\frac{\theta}{1-\theta}} - 1\right] \\
&= \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}} v_s + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{g} \frac{1}{\frac{r}{g}+\frac{\theta}{1-\theta}} \left[\tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}} - \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}}\right] \\
v(\tilde{z}) &= \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}} \left[v_s - \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\right] + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}} \tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}.
\end{aligned}
$$

La condición *smooth pasting* impone,

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{r-g}{g} \left[v_s - \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\right] + \frac{1}{1-\theta} \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}} \\
v_s &= \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}} + \frac{g}{r-g} \frac{1}{1-\theta} \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}} \\
v_s &= \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}} \left(1 + \frac{g}{r-g} \frac{1}{1-\theta}\right) \\
v_s &= \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{(1-\theta)}} \frac{r+g\frac{\theta}{(1-\theta)}}{(r-g)} \\
v_s &= \frac{\bar{\pi}_{\min}}{(r-g)} \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Caracterizamos ahora el valor de adopcion. Usando el guess y la HJB (46),

$$
\begin{aligned}
\frac{(r+\lambda-g)}{\lambda} v_s &= \int_1^{\infty} v(\tilde{z}) f(\tilde{z}) d\tilde{z} \\
&= \left[v_s - \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\right] \mathbb{E}_F\left[\tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}}\right] + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}} \tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}}
\end{aligned}
$$

con,

$$
\mathbb{E}_F\left[\tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}}\right] = \frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1}.
$$

De manera que $\{v_s, g\}$es la solución al sistema,

$$\frac{(r+\lambda-g)}{\lambda}v_s = \left[v_s - \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\right]\frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1} + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\bar{z}^{\frac{1}{1-\theta}},$$
$$v_s = \frac{\bar{\pi}_{\min}}{(r-g)}.$$

Empezando por la primera ecuación.

$$\begin{aligned}
\frac{(r+\lambda-g)}{\lambda}v_s &= \left[v_s - \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\right]\frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1} + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\bar{z}^{\frac{1}{1-\theta}} \\
&= v_s\frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1} + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\left[\bar{z}^{\frac{1}{1-\theta}} - \frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1}\right] \\
&= v_s\frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1} + \frac{\alpha\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\left[\frac{1}{\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{r}{g}+\alpha-1\right)}\right] \\
&= v_s\frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1} + \frac{\alpha\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}}\left[\frac{\frac{r}{g}+\frac{\theta}{1-\theta}}{\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)\left(\frac{r}{g}+\alpha-1\right)}\right] \\
&= v_s\frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1} + \frac{\alpha\bar{\pi}_{\min}}{g}\frac{1}{\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)\left(\frac{r}{g}+\alpha-1\right)} \\
&= \frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1}\left[v_s + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{g}\frac{1}{\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)}\right].
\end{aligned}$$

Substituimos la segunda ecuación para llegar a,

$$\frac{(r+\lambda-g)}{\lambda} = \frac{\alpha}{\frac{r}{g}+\alpha-1}\left[1 + \frac{(r-g)}{g}\frac{1}{\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)}\right].$$

Luego,

$$(r+\lambda-g)\frac{1}{g}\left[r+g(\alpha-1)\right] = \alpha\lambda\frac{g\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)+(r-g)}{g\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)}.$$

Cancelando $g$ de ambos lados,

$$\begin{aligned}
(r+\lambda-g)\left[r+g(\alpha-1)\right]\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right) &= \alpha\lambda\left[g\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)+(r-g)\right] \\
&= \alpha\lambda\left[g\left(\alpha-1+1-\frac{1}{1-\theta}\right)+(r-g)\right] \\
&= \alpha\lambda\left[\left[g(\alpha-1)+r\right]-g\frac{1}{1-\theta}\right].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
-g\frac{\alpha\lambda}{1-\theta} &= \left\{(r-g+\lambda)\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)-\alpha\lambda\right\}\left[g(\alpha-1)+r\right] \\
&= \left\{(r-g)\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)+\lambda\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)-\alpha\lambda\right\}\left[g(\alpha-1)+r\right] \\
&= \left\{(r-g)\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)-\lambda\frac{1}{1-\theta}\right\}\left[g(\alpha-1)+r\right] \\
&= (r-g)\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)\left[g(\alpha-1)+r\right]-\lambda\frac{1}{1-\theta}g\alpha+\lambda\frac{1}{1-\theta}g-\lambda\frac{1}{1-\theta}r.
\end{aligned}$$

Re-ordenando,

$$\begin{aligned}
0 &= (r-g)\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)\left[g(\alpha-1)+r\right]+\lambda\frac{1}{1-\theta}g-\lambda\frac{1}{1-\theta}r \\
&= (r-g)\left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)\left[g(\alpha-1)+r\right]-\lambda\frac{1}{1-\theta}(r-g) \\
&= \left(\alpha-\frac{1}{1-\theta}\right)\left[g(\alpha-1)+r\right]-\lambda\frac{1}{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\lambda}{\left[\alpha(1-\theta)-1\right]} = g(\alpha-1)+r.$$

Usando que $r=\rho+\gamma g$ podemos resolver por $g$,

$$g = \frac{1}{(\alpha-1+\gamma)}\left\{\frac{\lambda}{\left[\alpha(1-\theta)-1\right]}-\rho\right\}. \tag{55}$$

El resto el equilibrio está dado por las siguiente ecuaciones,

$$
\begin{aligned}
r &= \rho + \gamma g \\
S &= \alpha g \\
H &= \frac{S}{\lambda} \\
M(0) &= \Phi_0^{-1}(H) \\
v_s &= \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r-g}, \\
v(\tilde{z}) &= \tilde{z}^{-\frac{r-g}{g}} \left[ v_s - \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}} \right] + \frac{\bar{\pi}_{\min}}{r+g\frac{\theta}{1-\theta}} \tilde{z}^{\frac{1}{1-\theta}} \\
\tilde{C} &= \bar{z}. \\
M(t) &= M(0)\, e^{gt}.
\end{aligned}
$$

# B Economía con fricciones

El Hamiltoniano de este problema es,

$$
\mathcal{H}(n, h, f, \lambda, t) = zn^{\theta} - w(t)\, n - \kappa w(t)\, f + \lambda (h - f)
$$

Las condiciones necesarias y suficiente que caracterizan la solución al problema son,

$$
\begin{aligned}
\{h\} &: \lambda(\tau) \leq 0 \\
\{f\} &: -\kappa w(\tau) - \lambda(\tau) \leq 0 \\
\{n\} &: \dot{\lambda}(\tau) - r\lambda(\tau) = -\left[ zn^{\theta-1} - w(t) \right]
\end{aligned}
$$

con condiciones de borde,

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda(T_s) = 0 \\ rV_s(T_s) - \frac{\partial V_s(T_s)}{\partial \tau} &= \mathcal{H}(n(T_s), h(T_s), f(T_s), \lambda(T_s), T_s). \end{aligned}$$

Esta sección busca probar la Proposicion 3. Para ello, es util probar antes una serie de Lemas.

**Lemma 1.** No hay ningún rango de tiempo sobre el que la solución para el nivel de empleo de la firma sea estrictamente creciente.

*Proof.* Supongamos por el contrario que $h(s) > 0$ para $s \in [\tau_1, \tau_2]$ con $\tau_2 \leq T_s$. Luego, sobre este rango $f(s) = 0$ y $\lambda(s) = \dot{\lambda}(s) = 0$. Usando la ley de movimiento para $\lambda(s)$ para $s \in [\tau_1, \tau_2]$ obtenemos,

$$n(s) = \left[\frac{\theta z}{w(s)}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}, \qquad s \in [\tau_1, \tau_2].$$

Dado que los salarios crecen a tasa $g > 0$, $n(s)$ decrece sobre este intervalo lo cual es una contradicción.a $h(s) > 0$. □

**Lemma 2.** La solución para el nivel de empleo no posee saltos en el intervalo $[t, T_s)$ y no es estrictamente decreciente.

*Proof.* Que la solución no tiene saltos es un resultado de que la función objetivo es estrictamente cóncava. Para mostrar que no es estrictamente decreciente procedemos de la siguiente manera. Supongamos, por contradicción, que $f(s) > 0$ sobre algún intervalo $s \in [t, T_s)$. Luego,

$$\lambda(s) = -\kappa w(s), \qquad \forall s \in [t, T_s).$$

pero como $\lambda(t) = 0$, $w(s) > 0$ para todo $s$ y $\lambda(s)$ es una función continua del tiempo obtenemos nuestra contradicción. □

**Lemma 3.** Si $f(s) > 0$ para $s \in [\tau_1, \tau_2]$. Luego, $f(s) > 0$ para todo $s \geq \tau_1$.

*Proof.* Supongamos que no. Luego, por Lema 1, tenemos $f(s) = 0$ para $s \in [\tau_2, \tau_3]$ con $\tau_3 \geq \tau_2$ y $n(s) = \bar{n}$; también $f(s) > 0$ para $s \geq \tau_3$.

La primera parte de la contradicción implica que $n(s) = n(\tau_2)$ para todo $s \in [\tau_2, \tau_3]$ ya que $n(s)$ es continua y $h(s) = 0$. Luego,la ley de movimiento de $\lambda(s)$ en $s \in [\tau_1, \tau_2] \bigcup [\tau_3, T_s]$ implica,

$$\lambda(s) = -\kappa w(s)$$
$$\dot{\lambda}(s) - r\lambda(s) = -\left[\theta z n(s)^{\theta-1} - w(s)\right]$$
$$n(\tau_2) = n(\tau_3).$$

Definimos, $\mu(s) = \lambda(s)/w(s)$. Luego, para $s \in [\tau_1, \tau_2] \bigcup [\tau_3, T_s]$,

$$\mu(s) = -\kappa$$
$$\dot{\mu}(s) = \frac{\dot{\lambda}(s)}{w(s)} - \mu(s) g_w.$$

Combinando ambas $\dot{\lambda}(s) = -\kappa g_w w(s)$. Por lo tanto,

$$(r - g_w)\kappa = 1 - \frac{\theta z n(s)^{\theta-1}}{w(s)}, \quad s \in [\tau_1, \tau_2] \bigcup [\tau_3, T_s].$$

Ahora bien, para $s = \tau_2$ y $s = \tau_3$ debemos tener $n(\tau_2) = n(\tau_3)$ lo cual requiere $w(\tau_2) = w(\tau_3)$. Esto es una contradicción al menos que $\tau_2 = \tau_3$ ya que los salarios crecen a tasa $g_w$. Esto concluye la prueba. □

**Lemma 4.** La solución para el nivel de empleo dado la secuencia de salarios satisface $\lim_{t \to T_s} n(t) > 0$.

*Proof.* Para aquellas firmas que deciden despedir trabajadores a tiempo $T_f \leq T_s$, debemos tener que para todo $s \in [T_f, T_s]$,

$$\lambda(s) = -\kappa w(s).$$

De manera que, $\mu(s) = -\kappa$ y $\dot{\mu}(s) = 0$. Luego,sobre este intervalo el nivel de empleo es igual

$$n(s) = \left[\frac{\theta z}{w(s)\left(1 - \kappa\left(r - g_w\right)\right)}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Por lo tanto, $n(T_s) \neq 0$. $\square$

Lemas 1 a 4 describen la evolución de empleo para una firma a lo largo del tiempo desde el momento en que decide adoptar una nueva tecnología. Estas dinámicas están graficadas en la Figura 1. En conjunto también prueban la Proposición 3.