

**Tipo de documento:** Tesis de Maestría

*Maestría en Economía*

# Aversión al riesgo y cambios de regimen

**Autoría:** Caravello, Tomás Enrique

**Año:** 2023

## ¿Cómo citar este trabajo?

Caravello, T.(2023) "Aversión al riesgo y cambios de regimen". [Tesis de Maestría. Universidad Torcuato Di Tella]. Repositorio Digital Universidad Torcuato Di Tella

<https://repositorio.utdt.edu/handle/20.500.13098/12602>

El presente documento se encuentra alojado en el Repositorio Digital de la Universidad Torcuato Di Tella bajo una licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0 Argentina (CC BY-NC-SA 4.0 AR)  
Dirección: <https://repositorio.utdt.edu>

- **Título de la tesis:** Aversión al riesgo y cambios de regimen
- **Maestría:** Maestría en Economía
- **Alumno:** Tomás Enrique Caravello
- **Legajo:** 19A1508
- **Tutor:** Martín Solá
- **Fecha:** 24 de Mayo de 2023

# Aversión al riesgo y cambios de regimen

Tomás E. Caravello

Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology, U.S.A.

John Driffill

Yale-NUS College, Singapore

Turalay Kenc

INCEIF, Malaysia and CERF, University of Cambridge

Martin Sola

Universidad Torcuato di Tella

May 24, 2023

## **Abstract**

El trabajo desarrolla un modelo de valuación de activos basado en consumo, con utilidad recursiva, cambios de regimen y burbujas intrínsecas. El modelo comprende varios subcasos, que incluyen solo un subconjunto de las características mencionadas. El principal resultado es que el riesgo de cambio de regimen es un componente esencial de la prima de riesgo en acciones, explicando hasta el 50% de la misma. Asimismo, un modelo que no contenga esta característica sobreestimaré el grado de aversion al riesgo de los agentes: el precio del riesgo de cambio de regimen sería confundido con un alto grado de aversión al riesgo. Las burbujas intrínsecas no son un componente esencial para explicar la prima del riesgo. Sin embargo, incluirlas mejora la bondad del ajuste del modelo al final de la muestra.

# 1 Introducción

La prima de riesgo es un concepto fundamental en la economía financiera. El trabajo seminal de (Mehra & Prescott 1985) destacó la incapacidad de los modelos de determinación de precios de activos para producir la prima riesgo observada. Weil (1989, 1990) mostraron que los modelos macrofinancieros estándar son inadecuados para generar la tasa de interés baja del mercado. Estos y otros trabajos relacionados enfatizaron que los modelos de referencia deben incorporar nuevas dimensiones. Consideramos dos: (i) separar la elasticidad intertemporal de sustitución de la aversión al riesgo; y (ii) incorporar nuevos riesgos, como el cambio de régimen y el precio del riesgo de dicho potencial cambio. Lo primero alivia el *risk-free rate puzzle*, mientras que lo segundo extiende el conjunto de oportunidades 'constante' a un conjunto estocástico que captura los ciclos económicos y los riesgos relacionados, lo que conlleva fuentes adicionales de prima de riesgo específica del régimen. Un modelo con estas características hace que el momento de resolución de la incertidumbre (temprano o tardío) importe, y da lugar a entornos complejos para analizar la prima de riesgo bajo un marco de cambio de régimen con riesgos con precios.

Este documento desarrolla y estima un modelo de precios de activos basado en el consumo, en el que los parámetros del proceso de dividendos están sujetos a cambios discretos ocasionales en el régimen (Bonomo & Garcia (1996), Driffill & Sola (1998)). Permitimos la utilidad recursiva (Epstein & Zin 1989, Duffie & Epstein 1992b) y las burbujas intrínsecas (Froot & Obstfeld 1991, Driffill & Sola 1998). Una característica esencial de nuestro modelo es que permitimos que el riesgo de cambio de régimen tenga un precio (Dai & Singleton 2003, Bhamra et al. 2010, Chen 2010) y estimamos el precio del riesgo. También estimamos la contribución de las burbujas intrínsecas a la prima de riesgo total y encontramos que es pequeña.

Comenzamos nuestro análisis estimando un modelo de forma reducida de las ratios precio-dividendo, el exceso de retorno y el crecimiento de los dividendos según Froot & Obstfeld (1991). Los principales resultados de este ejercicio inicial son que los datos parecen estar sujetos a oscilaciones que pueden caracterizarse como cambios de régimen, afectando a todas las ecuaciones del modelo. Las burbujas intrínsecas explican una gran parte de los precios de las acciones cuando no se permiten cambios de régimen, pero su importancia disminuye cuando tenemos en cuenta los cambios de régimen.

Presentamos un modelo estructural con características que pueden capturar esos he-

chos estilizados. La versión más general del modelo asume utilidad recursiva (Lee & Phillips 2016), cambio de régimen (Dai & Singleton 2003, Bhamra et al. 2010, Chen 2010) y burbujas intrínsecas (Froot & Obstfeld 1991, Driffill & Sola 1998). Esta configuración engloba varias especificaciones populares obtenidas mediante la adición de diferentes restricciones al modelo. Derivamos las implicaciones del modelo para variables financieras relevantes: la relación precio-dividendo, la tasa libre de riesgo, el proceso de crecimiento de los dividendos y los rendimientos esperados de las acciones. Luego estimamos los parámetros estructurales consistentes con las diferentes especificaciones (correspondientes al modelo general y otros modelos populares obtenidos a partir de versiones restringidas). Mostramos cómo cambian parámetros estimados cruciales, como el coeficiente de aversión al riesgo, en las diferentes versiones anidadas del modelo.

Uno de los principales resultados del presente trabajo es que el precio del riesgo del cambio de régimen parece ser un determinante fundamental de la prima de riesgo, explicando hasta el 50 por ciento de la misma. La intuición económica de por qué debemos fijar un precio a este riesgo es considerar a un inversor que posee acciones en un estado o régimen bueno caracterizado por una baja utilidad marginal. Luego, si ocurriera un cambio de régimen, la economía pasaría a un estado malo donde el consumo es más valioso para el inversor en términos de utilidad marginal (Bhamra et al. 2010, Chen 2010, Arnold et al. 2013). Además, el precio del activo reacciona al cambio de régimen. A medida que la economía se mueve hacia un estado malo, esperamos que el precio del activo caiga en una cantidad negativa, lo que resultaría en una pérdida de capital instantánea debido al cambio de régimen. Por lo tanto, las acciones tienen un rendimiento inferior cuando hay un cambio a un estado con una alta utilidad marginal del consumo. Por lo tanto, debemos fijar un precio a esta fuente de riesgo en equilibrio. Encontramos empíricamente que este es un determinante esencial del rendimiento excesivo.

Otro resultado crucial se relaciona con los valores que toman los estimados de los parámetros cruciales bajo diferentes escenarios. En particular, los valores estimados para la aversión al riesgo y la EIS (elasticidad intertemporal de sustitución) son sustancialmente diferentes en las versiones restringidas del modelo (por ejemplo, cuando restringimos el modelo para no permitir cambios de régimen o burbujas). El parámetro estimado de aversión al riesgo es más bajo cuando permitimos un riesgo de cambio de régimen con precio. La intuición detrás de este resultado es que si existe un término adicional que puede ajustarse a la prima de riesgo observada, el parámetro de aversión al riesgo inferido sería más pequeño. En cierto sentido, este término adicional ayuda a aliviar el típico

enigma de la prima de renta variable.

Otro resultado clave es que las burbujas intrínsecas explican solo una parte modesta de la prima de riesgo cuando el modelo permite cambios de régimen, pero explican una proporción más alta del riesgo en el modelo de régimen único. Interpretamos esto en línea con [Driffill & Sola \(1998\)](#): los cambios de régimen pueden parecer burbujas.

## 1.1 Literatura relacionada

Existe una amplia literatura sobre los determinantes de precios de activos en equilibrio general, que comienza con el artículo de [Lucas \(1978\)](#) que intenta modelar y ajustar la prima de riesgo observada. El trabajo de [Mehra & Prescott \(1985\)](#) resaltó la necesidad de extender el marco teórico a formas de utilidad ricas en conjuntos de oportunidades de inversión estocásticas. Configuraciones como la utilidad estocástica diferencial (recursiva) ([Epstein & Zin 1989, 1991](#), [Weil 1989, 1990](#), [Duffie & Epstein 1992a,b](#)) aumentaron el precio de riesgo requerido por el mercado, mientras que el conjunto de oportunidades estocásticas, como las burbujas de precios ([Froot & Obstfeld 1991](#)) y los cambios de régimen en los precios de los activos ([Cecchetti et al. 1990](#)), aproximan la volatilidad observada en los precios de los activos. Dado que el dividendo agregado es igual al consumo en equilibrio, muchos investigadores ([Campbell & Shiller 1988](#), [Goyal & Welch 2003](#)) también han adoptado el modelo basado en dividendos como una alternativa al modelo de determinación de precios de activos basado en el consumo.

[Froot & Obstfeld \(1991\)](#) fue el primero en extender los modelos de precios-dividendos para incorporar "burbujas intrínsecas", capturando la divergencia entre los fundamentos y los precios de las acciones. El artículo trata las burbujas como una función no lineal de los dividendos actuales y, por lo tanto, modela la aparente sobre reacción de los precios de las acciones a los mismos. Al tener en cuenta las burbujas, dichos modelos parecen caracterizar mejor los rendimientos de capital. [Driffill & Sola \(1998\)](#) amplió aún más el conjunto de oportunidades estocásticas al incorporar cambios de régimen en la dinámica de los dividendos, mientras que [Lee & Phillips \(2016\)](#) consideró un modelo estructural que asume utilidad recursiva.

Este documento se diferencia de los trabajos existentes de las siguientes maneras: i) a diferencia de [Driffill & Sola \(1998\)](#) y [Lee & Phillips \(2016\)](#), nuestro modelo captura tanto las tasas de descuento específicas de cada régimen como el riesgo de cambio de régimen

con precio. ii) Utilizamos un modelo estructural para ampliar los resultados de [Driffill & Sola \(1998\)](#) no solo para desentrañar el parámetro de aversión al riesgo de la elasticidad de sustitución intertemporal utilizando la utilidad de Epstein-Zin-Weil, sino también para separar la contribución al riesgo asociada con los cambios de régimen que de otro modo se atribuiría incorrectamente a otras fuentes de riesgo.

## 2 Analisis preliminar

En esta sección, presentamos un modelo que extiende el modelo de dividendos con cambios de régimen propuesto por [Driffill & Sola \(1998\)](#), al permitir tasas de descuento dependientes del régimen. Exploramos si sus resultados cambian sustancialmente al permitir esta extensión, lo que implica que las tasas de descuento cambiantes modelarían mejor los precios de las acciones.<sup>1</sup> El modelo estimado aquí no impone supuestos paramétricos estrictos sobre las preferencias. Por lo tanto, puede interpretarse como un modelo que captura las propiedades estadísticas de la serie y, en cierto sentido, proporcionaría el mejor ajuste que el modelo estructural puede lograr.

El modelo de forma reducida consta de las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{P_t}{D_t} &= k_{s_t} + a_{s_t} D_t^{\eta-1} + \sigma^a s_t \varepsilon_t^a, & (1) \\ \Delta \log(D_t) &= \mu_{s_t} + \sigma_{s_t} \xi_t, & (2) \\ r_t &= \mu^r s_t + \sigma^b s_t \varepsilon_t^b, & (3) \end{aligned}$$

La ecuación (1) representa la evolución del ratio precio-dividendo, donde el término  $a_{s_t} D_t^{\eta-1}$  representa una burbuja intrínseca. La ecuación (2) describe el proceso de crecimiento de los dividendos, que tiene una deriva y varianza dependientes del régimen. La ecuación (3) permite que las tasas de descuento dependan del régimen.

Para evaluar la contribución de los términos de burbuja al ajuste de los precios de las acciones, mostramos en la Figura 1 los precios reales y ajustados utilizando el modelo presentado en las Ecuaciones (1) - (3) y también una versión restringida que impone  $a_0 = a_1 = 0$ . Como era de esperar, el modelo no restringido se ajusta mejor a los datos que la versión restringida, especialmente al final de la muestra.<sup>2</sup> El modelo con tasas de

<sup>1</sup>Esto sería relevante ya que asumimos tasas de descuento dependientes del régimen en el modelo basado en el consumo

<sup>2</sup>La función de verosimilitud maximizada para el modelo no restringido es 56.43, mientras que para la

descuento, deriva y volatilidad dependientes del régimen, pero sin burbujas, solo empeora marginalmente su ajuste, especialmente al final de la muestra. Su poder explicativo parece similar al considerar estas dos explicaciones alternativas para la evolución de los precios de las acciones.

Por otro lado, podemos ver en la Figura 1 que el modelo base asigna una gran parte de los precios reales de los activos al componente de la burbuja, y los fundamentos estimados solo explican una pequeña fracción de los precios observados de los activos. Por lo tanto, los términos  $\alpha_i D^\lambda$  parecen dominantes. Sin embargo, los "fundamentos" estimados en el modelo restringido sin burbujas, que se muestran en el panel superior, son muy diferentes, hasta el punto de que solo permitir cambios de régimen explica la mayor parte de las variaciones en los precios de las acciones.<sup>3</sup>

En resumen, los datos parecen tener cambios de régimen y la contribución o incluso la existencia de burbujas intrínsecas no es una conclusión definitiva, ya que la mayor parte de su influencia se circunscribe a finales de la década de 1990. Desafortunadamente, dado que el modelo base está en forma reducida, no podemos interpretar los resultados anteriores en términos de los parámetros de un modelo de optimización (como la aversión al riesgo o la elasticidad intertemporal de sustitución) y tenemos poca orientación sobre cómo estos quiebres estructurales afectan a los inversores en los mercados de valores. Por ejemplo, podría ser el caso que se necesite un valor considerable de aversión al riesgo para explicar un valor bajo para el componente fundamental en el modelo base (panel inferior de la Figura 1). Además, no está claro cómo cambiarían los parámetros implícitos al considerar diferentes especificaciones. Estamos observando los datos a través de la lente de varios modelos de forma reducida (es decir, el modelo no restringido con cambios de régimen y burbujas y sus versiones restringidas). Sin embargo, estos modelos no nos iluminan al indagar sobre los parámetros profundos de la economía.

Para llenar esta brecha, desarrollamos una versión estructural del modelo que permite responder a las preguntas planteadas anteriormente en términos de los parámetros profundos de la economía. El modelo estructural nos permite ampliar el análisis en varias direcciones: podemos investigar cómo cambian los parámetros estructurales estimados cuando modificamos o restringimos las especificaciones del modelo. En otras palabras,

---

versión restringida es 48.28. Una prueba estándar de razón de verosimilitud rechaza la hipótesis nula del modelo restringido a favor del modelo alternativo con burbujas.

<sup>3</sup>La excepción a esto podría ser el comportamiento de los precios de las acciones durante la llamada "burbuja punto com" durante la década de 1990.

podemos mostrar cómo los diferentes modelos incorporados (que podemos considerar como diferentes tipos de lentes que usamos para mirar los mismos datos) alteran nuestras conclusiones sobre las características relevantes de la economía. Además, un modelo estructural permite la descomposición del riesgo primario total en sus diferentes componentes. Por lo tanto, podríamos evaluar cuánto del riesgo primario se debe a los cambios de régimen, las burbujas y otros factores.

### 3 Un Modelo Estructural de los Precios de las Acciones

Presentamos un modelo basado en el consumo para determinar el precio de las acciones que engloba varios casos de interés. Tal como está, el modelo es una versión estructural extendida de [Driffill & Sola \(1998\)](#) en tiempo continuo que incorpora una función de utilidad recursiva, riesgo específico del factor según el régimen y precio del riesgo del cambio de régimen. Como se explicó anteriormente, utilizamos el modelo con tres propósitos: (i) mostrar cómo cambian las estimaciones de los parámetros estructurales cuando estimamos diferentes versiones restringidas del modelo, (ii) evaluar cuánto de la prima de riesgo se explica por el componente de difusión, el componente de cambio de régimen y las burbujas, y (iii) comprender los hechos estilizados que aparecen en los datos en términos del modelo de equilibrio general.

#### Primitivas y Equilibrio

##### Estados Exógenos

Consideremos un activo (una acción) que genera un flujo de caja neto aleatorio (o dividendo) de  $D_t$  por unidad de tiempo. Un proceso de difusión con parámetros de *drift* y volatilidad dependientes del estado impulsa los flujos de dividendos. Los shocks continuos en la economía son generados por un movimiento Browniano,  $W_t$ , definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . El tiempo es continuo. Más específicamente, los dividendos evolucionan de acuerdo con:

$$\frac{dD_t}{D_t} = \mu_{s_t} dt + \sigma_{s_t} dW_t \quad (4)$$

El estado  $s_t$  dicta los cambios de régimen en el proceso de dividendos y sigue una cadena de Markov de dos estados que alterna entre los estados 0 y 1. Dos *hazard rates* parametrizan el proceso,  $h_0$  y  $h_1$ . En pocas palabras, la probabilidad de que ocurra una transición del estado  $i$  al estado  $j$  en un pequeño intervalo de tiempo  $(t, t + dt)$  es igual a  $h_i dt$ . De manera similar,  $1 - h_i dt$  es la probabilidad de que el proceso permanezca en el estado  $i$ .

## Equilibrio del Mercado

La economía tiene dos activos: las acciones y un bono libre de riesgo instantáneo. Normalizamos el número de acciones en circulación a 1. Suponemos que el bono libre de riesgo tiene cero oferta neta y que no hay ninguna otra fuente de ingresos. Por lo tanto, en equilibrio tenemos que  $c_t = D_t$  para todo  $t$ .

## Preferencias

Consideremos a un inversionista representativo que debe decidir cuánto consumir o ahorrar y la composición de la cartera de activos que decide mantener. La función de utilidad indirecta a lo largo de la vida toma la forma

$$J_t = \mathbf{E}_t \int_t^{\infty} f(c_u, J_u) du, \quad (5)$$

donde  $f$  es un agregador normalizado de consumo y valores esperados de la utilidad indirecta futura a lo largo de la vida en cada período, definido de la siguiente manera:

$$f(c, J(s), s) = \frac{\delta}{(1-\psi)'} \frac{z(s)c^{1-\psi} - [(1-\gamma)J(s)]^{\frac{1-\psi}{1-\gamma}}}{[(1-\gamma)J(s)]^{\frac{1-\psi}{1-\gamma}-1}}, \quad (6)$$

donde  $z(s)$  es un shock de preferencia. Aumentamos el modelo con ese shock para generar un precio constante y separadamente identificable del riesgo de cambio de régimen <sup>4</sup>. El factor estocástico de descuento toma la siguiente forma:

$$M(s_t) = e^{\int_0^t f_u(D_\tau, J(D_\tau, s_\tau)) d\tau}, f_c(c_t, J(D_t, s_t)), \quad (7)$$

y por lo tanto (ver el Apéndice B para una derivación):

$$\frac{dM}{M} = -r^f s dt - \lambda s dW - (\Gamma_s - 1) dN, \quad (8)$$

para constantes  $r^f$  y  $\Gamma_s$  definidas en el Apéndice B. Dado que en equilibrio  $c_t = D_t$  y la ley de movimiento de los dividendos, en equilibrio tenemos que  $J$  es una función de  $D_t$ , y  $s_t$ . La condición de optimalidad requiere que  $J(D, s)$  cumpla la ecuación Hamiltoniana-Jacobi-Bellman (HJB):

$$\sup_D \mathcal{D}J_i(D, s) + f(D, J_i, s) dt = 0 \quad (9)$$

<sup>4</sup>Esta suposición permite estimar el precio del riesgo de cambio como una constante.

Siguiendo a [Chen \(2010\)](#), suponemos y verificamos la siguiente solución:

$$J(D, s) = \frac{[\phi_s D]^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (10)$$

donde  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son las razones de consumo-riqueza en el régimen 0 y 1, respectivamente, y se determinan resolviendo la ecuación HJB (ver Apéndice B para más detalles).

### 3.1 Implicaciones del modelo para las variables observables.

Esta sección resume las fórmulas que el modelo proporciona para varias variables observables importantes, como la relación precio-dividendo, el rendimiento excesivo y la tasa libre de riesgo.

**Relación precio-dividendo.** El valor de equilibrio de la relación precio-dividendo se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{P_s}{D} = k_s + \sum_{v=1}^2 \alpha_{s,v} D^{\eta_v-1}, \quad (11)$$

donde:

$$k_i = \frac{r^{ej} - \mu_j + h_i \Gamma_i}{(r^{ei} - \mu_i + h_i \Gamma_i)(r^{ej} - \mu_j + h_j \Gamma_j) - h_i h_j} \quad (12)$$

donde  $r^{ei}$  son los rendimientos esperados de las acciones condicionales al estado  $i$ ,  $\Gamma_i$  es el precio del riesgo de cambio de régimen y  $\eta_i$  son las raíces características de la ecuación homogénea del componente del precio. Las expresiones exactas para  $\eta_i$ ,  $r^{ei}$  y  $\Gamma_i$  se pueden encontrar en el Apéndice B. Por otro lado, los coeficientes de burbuja  $\alpha_{s,v}$  son arbitrarios.<sup>5</sup> Lo importante es que el modelo predice expresiones dependientes del estado para las relaciones precio-dividendo. Además, las fórmulas para  $k_s$  y  $\eta_i$  dependen de los parámetros de preferencia ( $\delta, \psi, \gamma$ ) así como de los parámetros que impulsan los procesos exógenos.

**Tasa libre de riesgo.** La tasa libre de riesgo es una constante dependiente del estado. También depende de los parámetros para el proceso de crecimiento de los dividendos, los parámetros de preferencia y el precio del riesgo de cambio. La fórmula general es bastante

---

<sup>5</sup>Los términos de burbuja son la solución de una ecuación diferencial homogénea. No tenemos condiciones de frontera para determinar los coeficientes relevantes.

compleja, por lo que la relegamos al Apéndice B. Estudiaremos algunos casos restringidos más simples más adelante.

**Rendimientos esperados de las acciones.** Los rendimientos esperados excesivos dependientes del estado se calculan mediante la siguiente fórmula (ver Apéndice D):

$$E_t \left[ \frac{dP_i + D dt}{P_i} \right] = R(D, s = i) dt \quad (13)$$

donde

$$R(D, s = i) = \left( r_i^f + \frac{k_i D + \eta_1 a_{i,1} D^{\eta_1} + \eta_2 a_{i,2} D^{\eta_2}}{k_i D + a_{i,1} D^{\eta_1} + a_{i,2} D^{\eta_2}} \right) \gamma \sigma_i^2 + \lambda h_i (\Gamma_i - 1) \frac{(k_i - k_j) D + (a_{i,1} - a_{j,1}) D^{\eta_1} + (a_{i,2} - a_{j,2}) D^{\eta_2}}{k_i D + a_{i,1} D^{\eta_1} + a_{i,2} D^{\eta_2}}$$

y  $a_{m,i}$  es el coeficiente para el término con  $\eta_m$  en el estado  $i$ .

**Crecimiento de dividendos.** La ecuación (4) gobierna la dinámica estocástica del crecimiento de dividendos. Esta ecuación especifica que la tasa de crecimiento de los dividendos depende de la variable estatal  $s_t$  a través de los parámetros dependientes del estado  $\mu_{s_t}$  y  $\sigma_{s_t}$ . El modelo permite tasas de crecimiento de dividendos específicas para cada régimen, capturando la noción de que la dinámica de los dividendos puede variar según el estado de la economía. Esta característica es importante para capturar la naturaleza variable en el tiempo de los dividendos y su relación con el mercado de valores.

## Versiones restringidas contenidas en el modelo general

En esta sección, demostramos que muchas especificaciones populares utilizadas en la literatura están incluidas en el modelo general. Al imponer diferentes restricciones en el modelo, podemos evaluar sus consecuencias y examinar la importancia teórica de cada componente que hemos agregado. Además, exploraremos cómo estos componentes influyen en la tasa de interés libre de riesgo, la relación precio-dividendo y las primas de riesgo.

### Utilidad con potencia constante

Como es bien conocido, al establecer  $\gamma = \psi$  llegamos al caso de la utilidad con potencia constante,  $u(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$ . Esto es válido bajo cualquiera de las combinaciones que exploramos a continuación. Por lo tanto, para cada uno de los casos particulares que

presentamos, tendremos dos especificaciones posibles: una con utilidad de potencia (es decir, imponiendo  $\psi = \gamma$ ) y otra con utilidad recursiva, donde  $\psi$  y  $\gamma$  pueden ser diferentes.

### Utilidad recursiva, régimen único y sin burbujas

Primero, consideramos el caso en el que no permitimos cambios de régimen ni burbujas. Bajo este escenario, la relación entre las variables observables y el modelo está dada por:

$$\frac{dD}{D} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (14)$$

$$\frac{P}{D} = \frac{1}{r^f + \gamma\sigma^2 - \mu'}, \quad (15)$$

$$r^f = \delta + \psi\mu - \frac{1}{2}\gamma(1 + \psi)\sigma^2, \quad (16)$$

$$E_t \left[ \frac{dP + Ddt}{P} \right] - r^f dt = \gamma\sigma^2 dt. \quad (17)$$

Estas son las ecuaciones del modelo de determinación de precios de activos basado en el consumo con utilidad recursiva. La relación precio-dividendo obedece la fórmula de Gordon utilizando la tasa de descuento ajustada al riesgo adecuada. La tasa libre de riesgo,  $r^f$ , depende del factor de descuento temporal,  $\delta$ , la tasa de crecimiento,  $\mu$ , la elasticidad intertemporal de sustitución,  $\psi$ , y un término de ahorro de precaución,  $\frac{1}{2}\gamma(1 + \psi)\sigma^2$ . Por último, el término  $\gamma\sigma^2$  representa el rendimiento esperado en exceso. Mayores riesgos,  $\sigma^2$ , o aversión al riesgo,  $\gamma$ , aumentan el rendimiento esperado en exceso requerido para que el agente mantenga la acción en equilibrio.

### Utilidad recursiva, régimen único y burbujas intrínsecas

Cuando desactivamos los cambios de régimen pero permitimos burbujas intrínsecas, las variables observables se modelan de la siguiente manera:

$$\frac{dD}{D} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (18)$$

$$\frac{P}{D} = \frac{1}{r^f + \gamma\sigma^2 - \mu} + \alpha_1 D^{\eta_1 - 1} + \alpha_2 D^{\eta_2 - 1}, \quad (19)$$

$$r^f = \delta + \psi\mu - \frac{1}{2}\gamma(1 + \psi)\sigma^2, \quad (20)$$

$$E_t \left[ \frac{dP + Ddt}{P} \right] - r^f dt = \frac{kD + \eta_1 \alpha_1 D^{\eta_1} + \eta_2 \alpha_2 D^{\eta_2}}{kD + \alpha_1 D^{\eta_1} + \alpha_2 D^{\eta_2}} \gamma\sigma^2 dt. \quad (21)$$

Cuando permitimos la existencia de burbujas intrínsecas, la relación precio-dividendo

ya no es constante. La relación entre precios y dividendos se vuelve no lineal. La no linealidad también aparece en la ecuación de rendimiento esperado en exceso. La intuición es la siguiente: cuando la relación es lineal (es decir, sin burbujas), la varianza instantánea de  $\frac{dP}{P}$  se da por  $\sigma^2$ . Por otro lado, si hay burbujas intrínsecas, la relación se vuelve no lineal ya que los cambios en los dividendos también afectan los precios a través de los cambios inducidos en el valor del término de burbuja  $\alpha D^n$ , que es una función no lineal de los dividendos. Por lo tanto, la covarianza instantánea entre el consumo y los rendimientos de las acciones ya no es constante: los shocks a los dividendos (y por lo tanto al consumo) afectan los precios de manera diferente según el nivel de los dividendos.

### Utilidad recursiva, cambio de régimen y sin burbujas

Cuando permitimos cambios de régimen pero excluimos burbujas intrínsecas, lo cual se logra simplemente estableciendo  $\alpha_0, i = \alpha_1, i = 0$ , las ecuaciones observables toman la siguiente forma: <sup>6</sup>:

$$\frac{dD}{D} = \mu_s dt + \sigma_s dW, \quad (22)$$

$$r^f s = -\delta \frac{1-\gamma}{1-\psi} \left[ \left( \frac{\psi-\gamma}{1-\gamma} \right) z s^{1-\psi} \phi^{\psi-1} s - 1 \right] + \gamma \mu s - \frac{1}{2} \gamma (1+\gamma) \sigma_s^2 - h_s [\Gamma_s - 1], \quad (23)$$

$$\frac{P_s}{D} = k_s, \quad (24)$$

$$E_t \left[ \frac{dP_i + D dt}{P_i} \right] - r_i^f dt = \left( +\gamma \sigma_i^2 - h_i (\Gamma_i - 1) \frac{(k_j - k_i)}{k_i} \right) dt, \quad (25)$$

donde las expresiones para los  $k_s$  se dan en la ecuación (12) en el Apéndice B. En primer lugar, observe que el crecimiento de los dividendos está sujeto a cambios de régimen exógenos que cambian el valor de su tendencia,  $\mu$ , y volatilidad,  $\sigma$ . El impacto del cambio de régimen en el crecimiento de los dividendos es directo, ya que los dividendos son la variable exógena que impulsa todo lo demás.

Los cambios de régimen modifican la ecuación de la tasa de interés de varias formas. Primero, el término que corresponde al descuento temporal (que solía ser simplemente  $\delta$ ) ahora se expresa como  $-\delta \frac{1-\gamma}{1-\psi} \left[ \left( \frac{\psi-\gamma}{1-\gamma} \right) z s^{1-\psi} \phi^{\psi-1} s - 1 \right]$ . Esta expresión captura la interacción entre el cambio de régimen y la utilidad recursiva: cuando  $\gamma = \psi$ , el término

<sup>6</sup>Repetimos la ecuación de la tasa libre de riesgo por simplicidad expositiva

se reduce a  $\delta$ . Intuitivamente, dado que el agente ya no es indiferente al momento de resolución de la incertidumbre,  $\delta$  ya no es la medida exacta de las preferencias temporales para el agente. En segundo lugar, los términos relacionados con la tasa de crecimiento de la economía  $\gamma\mu s$  y el ahorro de precaución  $(\frac{1}{2}\gamma(1+\gamma)\sigma^2s)$  ahora dependen del régimen. <sup>7, 8</sup> Finalmente, el término  $h_i(\Gamma_i - 1)$  refleja que existe un precio del riesgo para el cambio de régimen. Recuerde que la tasa libre de riesgo por unidad de tiempo se define como  $-\mathbb{E}_t \left[ \frac{dM}{M} \right]$ . Cuando se permiten cambios de régimen, el valor del factor de descuento ( $M$ ) cambia cada vez que se produce un cambio de régimen. <sup>9</sup> Los cambios en  $M$  que podrían ocurrir con una probabilidad positiva, a su vez afectarían la tasa de crecimiento esperada del factor de descuento ( $\mathbb{E}_t \left[ \frac{dM}{M} \right]$ ) y, por lo tanto, la tasa libre de riesgo.

La intuición económica que justifica el precio del cambio de régimen es la siguiente. En primer lugar, se puede demostrar que  $\Gamma_i$  es la razón de los factores de descuento estocásticos específicos del estado,  $\Gamma_i = \frac{M_j}{M_i}$  (consulte el Apéndice B para obtener más detalles). Entonces, cada vez que hay un cambio de régimen y  $\Gamma_i > 1$ , una unidad de consumo tiene un mayor valor en el nuevo (mal) estado para el agente. <sup>10</sup> Suponga que la economía se encuentra en un estado  $i$ , con  $\Gamma_i$ . Considere un inversor que posee un bono libre de riesgo instantáneo que paga 1 unidad del bien de consumo. El inversor sabe que la economía puede pasar a un estado malo con cierta probabilidad en el próximo instante. Tenga en cuenta que una unidad de consumo tiene un valor mayor para ella en un estado malo. Esta posibilidad hace que el bono libre de riesgo sea más valioso. La razón es que si ocurriera un cambio de régimen en el próximo instante, el inversor recibiría una unidad de consumo en un estado malo del mundo, y le daría más valor a esa unidad.<sup>11</sup>

Por lo tanto, en este escenario, la mera existencia de cambios de régimen (con precio del

---

<sup>7</sup>Tenga en cuenta que todos los bienes provienen de árboles de Lucas. Por lo tanto, el crecimiento de los dividendos y el crecimiento de la producción son iguales.

<sup>8</sup>Tenga en cuenta que  $\psi$  no afecta directamente al término que representa el ahorro de precaución. Curiosamente, la relación entre  $\psi$  y la expresión de ahorro de precaución se produce a través de la función de valor,  $\Phi_i$ . Esta relación también estaba presente en el modelo de régimen único. En un modelo de régimen único, una solución en forma cerrada para el valor de  $\Phi$ , sustituida de nuevo en la ecuación principal, produce la conocida expresión de régimen único donde  $\psi$  afecta tanto al "crecimiento económico" como al "ahorro de precaución".

<sup>9</sup>En nuestro modelo, existen dos fuentes para este cambio: el shock de preferencia exógeno y el cambio endógeno en la utilidad vitalicia que afecta al factor de descuento bajo preferencias recursivas.

<sup>10</sup>Debido a que el valor del factor de descuento es  $M_i$  y si  $\Gamma > 1$ , entonces  $M_j > M_i$ . Por lo tanto, la valoración del agente por una unidad de bienes es mayor en el estado  $j$  (es decir, el otro estado) que en el estado actual.

<sup>11</sup>Claramente, el riesgo de consumo todavía está presente cuando los regímenes no tienen precio. Los cambios añaden una fuente de variación en el factor de descuento, que aparece como los términos adicionales que estamos discutiendo.

riesgo no nulo) hace que el bono sea más valioso y, en consecuencia, su tasa de rendimiento ( $r^f_i$ ) es más baja en equilibrio. Cada vez que  $\Gamma_i > 1$ , el término  $-h_i(\Gamma_i - 1)$  es negativo, por lo que la tasa libre de riesgo es menor que la expresión obtenida si esos regímenes no tuvieran precio.<sup>12</sup> La misma intuición se aplica si  $\Gamma_i < 1$ : al pasar a un estado donde una unidad de consumo es menos valiosa, el bono libre de riesgo es menos atractivo, por lo que su tasa de rendimiento debe ser más alta en equilibrio para que el inversor lo mantenga.

Continuando con el análisis de otras variables observables, observe que la relación precio-dividendo y el exceso de rendimiento esperado son constantes dependientes del estado. Una vez que eliminamos las burbujas, la relación entre los precios de las acciones y los dividendos es lineal siempre y cuando se mantenga en el mismo estado. El precio del riesgo de cambios de régimen afectan las relaciones precio-dividendo a través de los términos  $h_i\Gamma_i$  en la ecuación (12).

Finalmente, el rendimiento esperado del activo riesgoso ahora tiene un término  $\left(-h_i(\Gamma_i - 1)\frac{(k_j - k_i)}{k_i}\right)$  que refleja el riesgo de cambio de régimen. Por lo tanto, el término anterior depende de la tasa de llegada de cambios de régimen  $h_i$ , la ganancia/pérdida de capital proporcional que un cambio de régimen induciría debido al salto en los precios,  $\frac{(k_j - k_i)}{k_i}$ , y el precio del término de riesgo,  $(\Gamma_i - 1)$ .<sup>13</sup> Siguiendo el mismo razonamiento, considere un inversor que posee acciones. Una vez más, supongamos que, en el estado actual de la economía,  $\Gamma_i > 1$ . Luego, si ocurriera un cambio de régimen, la economía pasaría a un estado malo donde el consumo es más valioso para el inversor en términos de utilidad marginal. Además, debemos considerar cómo reacciona el precio del activo al cambio de régimen. Dado que el cambio es hacia un estado malo, intuitivamente podríamos pensar que el precio del activo caería en una cantidad negativa,  $\left(\frac{k_j - k_i}{k_i} < 0\right)$ , por lo que habría una pérdida de capital instantánea como resultado del cambio de régimen.<sup>14</sup>

Por lo tanto, el cambio de régimen haría que el activo arriesgado sea menos valioso: tiene un pago negativo cuando hay una transición a un estado malo, en el cual el consumo es más valioso. Por lo tanto, el rendimiento esperado requerido por el inversor para mantener ese activo en equilibrio es mayor.<sup>15</sup> Nótese que el efecto del cambio de régimen

<sup>12</sup>Si los regímenes no tuvieran precio, la tasa libre de riesgo se calcularía como  $r^f_s = -\delta\frac{1-\gamma}{1-\psi}\left[\left(\frac{\psi-\gamma}{1-\gamma}\right)z_s^{1-\psi}\phi^{\psi-1}s - 1\right] + \gamma\mu s - \frac{1}{2}\gamma(1+\gamma)\sigma_s^2$ . Consulte el Apéndice B para obtener más detalles.

<sup>13</sup>Recuerde que  $\Gamma_1\Gamma_2 = 1$ . Por lo tanto, la magnitud del término es mayor cuanto más cerca de cero estén los términos  $\Gamma_i$ :  $\Gamma_i - 1$  aumenta en valor absoluto y  $\Gamma_j - 1 = \frac{1}{\Gamma_i} - 1$  también aumenta.

<sup>14</sup>Esto resultará ser cierto en el modelo estimado.

<sup>15</sup>Claramente, la velocidad a la que se producen estos cambios también es un factor esencial que aparece

con precio en los rendimientos de las acciones es exactamente opuesto al de los bonos libres de riesgo. En cuanto a estos últimos, el activo seguro garantiza una unidad de consumo si se produce un cambio al estado malo. Por lo tanto, el cambio de régimen con precio aumentó el precio del bono libre de riesgo. Por el contrario, el activo arriesgado tiene un pago negativo si se produce un cambio de régimen: el titular sufre una pérdida de capital precisamente cuando la economía pasa a un estado donde el consumo es más valioso para el agente. Por lo tanto, esta característica hace que el activo arriesgado sea menos atractivo, lo que aumenta su rendimiento en equilibrio.

### Modelo general con cambio de régimen y burbujas

Es importante tener en cuenta que todos los mecanismos explicados anteriormente también son válidos para el caso general. Sin embargo, cabe destacar que las ganancias o pérdidas de capital debido a los cambios de régimen ahora se verían afectadas por los coeficientes de burbujas dependientes del estado. Es decir, en presencia de burbujas, las ganancias o pérdidas de capital debido a los cambios de régimen se calculan como  $\frac{(k_i - k_j)D + (\alpha_{i,1} - \alpha_{j,1})D^{\eta_1} + (\alpha_{i,2} - \alpha_{j,2})D^{\eta_2}}{k_i D + \alpha_{i,1} D^{\eta_1} + \alpha_{i,2} D^{\eta_2}}$  en lugar de  $\frac{k_j - k_i}{k_i}$ . Por lo tanto, el término ahora depende de la diferencia de los coeficientes de burbujas,  $\alpha_{i,m} - \alpha_{j,m}$  para  $m = 1, 2$ . Esto crea un término adicional en la fórmula de rendimiento excesivo debido a la interacción tanto del cambio de régimen como de las burbujas. Si se produce un cambio de régimen, los precios subirían porque  $k_i$  cambia a  $k_j$ , y porque el tamaño de la burbuja (capturado por los coeficientes  $\alpha_{i,m}$ ) también cambia.

### Descomposición de la Prima de Riesgo

En esta subsección, presentamos una descomposición del rendimiento excesivo en términos que aíslan cada una de las características discutidas anteriormente. Para hacerlo, reescribimos la ecuación para el rendimiento excesivo en el modelo general de la siguiente manera:

---

en la fórmula.

$$\begin{aligned}
E_t \left[ \frac{dP_i + D dt}{P_i} \right] - r_i^f dt = & \left( \underbrace{\gamma \sigma_i^2}_{\mathbf{(A)}} + \underbrace{\gamma \sigma_i^2 \frac{(\eta_1 - 1) a_{i,1} D^{\eta_1} + (\eta_2 - 1) a_{i,2} D^{\eta_2}}{k_1 D + a_{i,1} D^{\eta_1} + a_{i,2} D^{\eta_2}}}_{\mathbf{(B)}} + \right. \\
& \underbrace{h_i (\Gamma_i - 1) \frac{(k_i - k_j)}{k_i + a_{i,1} D^{\eta_1 - 1} + a_{i,2} D^{\eta_2 - 1}}}_{\mathbf{(C)}} + \\
& \left. \underbrace{h_i (\Gamma_i - 1) \frac{(a_{i,1} - a_{j,1}) D^{\eta_1} + (a_{i,2} - a_{j,2}) D^{\eta_2}}{k_i D + a_{i,1} D^{\eta_1} + a_{i,2} D^{\eta_2}}}_{\mathbf{(D)}} \right) dt \quad (26)
\end{aligned}$$

Nuestra propuesta de descomposición tiene cuatro términos: El Término **A** corresponde a la prima de riesgo predicha por un modelo sin cambio de régimen ni burbujas. Tiene la interpretación habitual: una mayor aversión al riesgo ( $\gamma$ ) o un mayor riesgo ( $\sigma_i^2$ ) llevarían el rendimiento esperado excesivo al alza. El Término **B** corresponde a la parte explicada únicamente por las burbujas. Como mostramos, en un modelo de un solo régimen que permite burbujas, la suma **A** + **B** determina la prima de riesgo. Como se discutió anteriormente, el término **B** aparece porque las burbujas añaden una fuente de variabilidad a los precios. Por lo tanto, los rendimientos excesivos incluyen un nuevo componente ya que los precios ahora son una función no lineal de los dividendos. El Término **C** corresponde a la parte de la prima de riesgo explicada únicamente por el cambio de régimen. Como mostramos, en un modelo con dos regímenes pero sin burbujas, la suma **A** + **C** determina la prima de riesgo. El Término **D** aparece debido a la interacción entre el cambio de regímenes y las burbujas. Captura el hecho de que cuando hay un cambio de régimen, los coeficientes de burbujas cambian, lo que genera una razón adicional por la cual los precios saltan.

## 4 Estimación

Estimamos el modelo general y tres posibles reducciones del modelo, a saber: 1) un modelo de un solo régimen que no permite burbujas, 2) un modelo de un solo régimen que permite burbujas, 3) un modelo que permite cambios de régimen pero no permite burbujas y 4) el modelo general con burbujas y cambios de régimen.

## Datos

Utilizamos los datos anuales de precios de acciones y dividendos de Estados Unidos de 1900 a 2019, contruidos por Robert Shiller. Los precios de las acciones son valores de enero para el índice de precios de acciones compuesto Standard and Poor. Cada observación en la serie de dividendos es un promedio para el año en cuestión. El índice de precios al consumidor (IPC) ajusta los precios y dividendos nominales para obtener precios y dividendos reales. Para la tasa real libre de riesgo, utilizamos datos sobre la tasa de interés nominal a 1 año y el índice de precios al consumidor, y calculamos las tasas de interés reales ex post.

## Modelo econométrico

La forma reducida implicada por el modelo estructural se amplía con errores de medición para convertirlo en algo que podamos estimar. Las ecuaciones que utilizamos son las siguientes:

$$\frac{P_t}{D_t} = k(s_t) + a_{s_t,1} D_t^{\eta_1-1} + \sigma^a(s_t) \varepsilon_t^a, \quad (27a)$$

$$\Delta \log(D_t) = \left( \mu(s_t) - \frac{\sigma^2(s_t)}{2} \right) + \sigma(s_t) \xi_t, \quad (27b)$$

$$r_t^S = R(D_t, s_t) + \sigma^b(s_t) \varepsilon_t^b, \quad (27c)$$

$$r_t^F = r^f(s_t) + \sigma^c(s_t) \varepsilon_t^c, \quad (27d)$$

donde  $\frac{P_t}{D_t}$  es el cociente precio-dividendo observado,  $\Delta \log(D_t)$  es el crecimiento anual de los dividendos,  $r_t^S$  son los rendimientos observados de las acciones (incluyendo dividendos) y  $r_t^F$  es la tasa real ex post. También es importante destacar que el modelo se amplía con tres errores de medición. Estos se denotan por  $(\varepsilon_t^a, \varepsilon_t^b, \varepsilon_t^c)$ . Se asume que todos ellos son independientes e idénticamente distribuidos según una distribución normal estándar. Sus desviaciones estándar se denotan por  $(\sigma_{s_t}^a, \sigma_{s_t}^b, \sigma_{s_t}^c)$  y dependen del estado  $s_t$ . Finalmente,  $\xi_t$  es el shock al crecimiento de los dividendos. Nuevamente, hacemos hincapié en que las expresiones de  $k(s_t)$ ,  $R(D_t, s_t)$  y  $r(s_t)$  son las mostradas anteriormente y también dependerán de la versión restringida específica que consideremos.<sup>16</sup> <sup>17</sup> Estimamos el

---

<sup>16</sup>Lo distinguimos notacionalmente porque, a diferencia de los otros shocks, tiene un contraparte en el modelo teórico:  $\Delta W_t$ .

<sup>17</sup>Es importante destacar que solo incluimos uno de los términos de burbujas, mientras que la teoría implica que existen dos raíces distintas posibles. Por razones de identificación, solo incluimos el término correspondiente a la raíz más grande,  $\eta_1$ . Por lo tanto, establecemos  $a_{s_t,2} = 0$  para ambos estados.

modelo mediante máxima verosimilitud. El Apéndice E explica cómo construir la función de verosimilitud.

## Resultados

Estimamos tanto para la función de utilidad recursiva como para la función de utilidad en forma de potencia cuatro versiones alternativas del modelo que etiquetamos como se presenta arriba: el modelo 1 es una parametrización de un solo régimen sin permitir la existencia de burbujas; el modelo 2 también es de un solo régimen pero permite la existencia de burbujas; el modelo 3 permite el cambio de régimen pero excluye las burbujas; el modelo 4 permite tanto el cambio de régimen como las burbujas. La Tabla 1 muestra los resultados para las parametrizaciones de un solo régimen, mientras que la Tabla 2 muestra los resultados de las versiones con cambio de régimen del modelo. En la Tabla 3, presentamos un resumen de las estadísticas clave de los diferentes modelos. Estos modelos solo se identifican si calibramos la tasa de descuento  $\delta$ . Los modelos de cambio de régimen con funciones de utilidad recursiva también requieren la calibración del parámetro  $\psi$ . Establecemos  $\delta = 0.02$  y  $\psi = 5.5$ , lo cual está en línea con la literatura.

Comenzando con los resultados del modelo 1 presentados en el panel izquierdo de la Tabla 1, encontramos que la función de utilidad en forma de potencia parece ser una buena caracterización de la economía, ya que no se rechaza la restricción  $\gamma = \psi$  según los datos. La estadística de razón de verosimilitud es  $2(251.327 - 251.270) = 0.114$ , lo que lleva al no rechazo de la hipótesis nula en ninguno de los niveles de significancia habituales. Para la función de utilidad en forma de potencia, el coeficiente de aversión al riesgo,  $\gamma$ , es de 3.57. Al estimar el modelo de utilidad recursiva,  $\psi$  aumenta a 4.85 mientras que  $\gamma$  disminuye a 3.4. Estos cambios no son estadísticamente significativos. Los coeficientes estimados de aversión al riesgo se alinean con los obtenidos en estudios anteriores.

El panel derecho de la Tabla 1 muestra los resultados de estimación de los modelos que permiten burbujas. Observamos que los datos respaldan la existencia de una burbuja intrínseca para ambos modelos considerados. Aunque las estimaciones puntuales no son significativas, las estadísticas de razón de verosimilitud son  $2(265.8 - 251.27) = 29.07$  y  $2(266.5 - 251.33) = 30.33$  respectivamente. Además, encontramos que la varianza estimada de la ecuación precio-dividendo es considerablemente menor en el modelo 2 que en el modelo 1, lo que muestra que la contribución de la burbuja a la ajuste de esta ecuación es considerable. Bajo este escenario, la versión de utilidad en forma de potencia del modelo

parece ser una simplificación válida de la utilidad recursiva. La estadística de razón de verosimilitud es  $2(266.496 - 265.806) = 1.38$  y no rechaza el modelo de utilidad en forma de potencia frente a la utilidad recursiva. Encontramos estimaciones relativamente bajas para el coeficiente de aversión al riesgo (2.053 para la versión recursiva y 2.733 para la versión de utilidad en forma de potencia). Este resultado se debe a que los modelos que permiten burbujas intrínsecas tienen una fuente adicional de prima de riesgo. Por lo tanto, a medida que un término adicional (positivo) influye en el rendimiento esperado en exceso, el valor estimado de  $\gamma\sigma^2$  disminuye para mantener la suma de los dos componentes y capturar aproximadamente el mismo riesgo.

Los resultados para los modelos 3 y 4 se encuentran en la Tabla 2. Una diferencia notable con los resultados presentados anteriormente es que rechazamos la función de utilidad en forma de potencia frente a la utilidad recursiva con una estadística de razón de verosimilitud de  $2(374.57 - 371.22) = 6.7$  para los modelos sin burbujas y  $2(379.23 - 377.23) = 4$  para los modelos con burbujas. Estos resultados respaldan el análisis de descomposición de riesgos que se presentará a continuación.

Los paneles izquierdos de la Tabla 2 presentan los resultados de los Modelos 3. Encontramos que los coeficientes estimados de aversión al riesgo son considerablemente más bajos cuando se permiten cambios de régimen (1.72 para la función de utilidad recursiva y 2.14 para la función de utilidad en forma de potencia) que los obtenidos bajo los Modelos 1 (3.4 para la función de utilidad recursiva y 3.58 para la función de utilidad en forma de potencia). El precio del riesgo de cambio de régimen ( $\Gamma_0$ ), que captura esta diferencia (0.164 para la función de utilidad recursiva y 0.082 para la función de utilidad en forma de potencia), es notablemente mayor cuando se asume una función de utilidad recursiva. Probablemente refleje que parte del riesgo en el modelo 3 se atribuye a la compensación solicitada por los cambios de régimen, que en el modelo 1 se interpretaron simplemente como (parte de la) aversión al riesgo.

Curiosamente, los resultados muestran que el crecimiento de los dividendos es más bajo ( $\hat{\mu}_0 = 0.004$  vs  $\hat{\mu}_1 = 0.033$  para la función de utilidad recursiva) y ( $\hat{\mu}_0 = 0.016$  vs  $\hat{\mu}_1 = 0.033$  para la función de utilidad en forma de potencia) y la varianza es mayor ( $\hat{\sigma}_0 = 0.15$  vs  $\hat{\sigma}_1 = 0.06$  para la función de utilidad recursiva) y ( $\hat{\sigma}_0 = 0.148$  vs  $\hat{\sigma}_1 = 0.06$  para la función de utilidad en forma de potencia) en el régimen 0 que en el régimen 1. Los precios de cambio de régimen reflejan la compensación solicitada por el individuo que posee la acción (o un bono), que surge debido a la posibilidad de cambiar a un estado de

naturaleza diferente. En particular, observe que el estado 0 tiene una volatilidad alta y un pequeño desplazamiento. También observe que para los modelos 3 y 4, las estimaciones de  $\Gamma_1$  son mayores que 1. Esto significa que cuando la economía está en el estado 1, un cambio de régimen al estado 0 (el malo) hará que el factor de descuento estocástico aumente abruptamente.<sup>18</sup> Esto es consistente con el modelo C-CAPM: los estados malos se asocian con una alta utilidad marginal del consumo.<sup>19</sup> Además, como el estimado  $k_0 < k_1$ , hay una pérdida de capital instantánea cuando hay un cambio de régimen de 1 a 0. Por lo tanto, el cambio de régimen con precio hace que la acción sea menos valiosa, ya que tiene un pago negativo cuando hay un cambio a un estado de alta utilidad marginal (es decir, el malo). Como explicaremos más adelante, el riesgo de cambio de régimen con precio representará una parte importante de los rendimientos observados.

Pasando al modelo 4, encontramos que su importancia parece ser menor, aunque no podemos rechazar estadísticamente las burbujas cuando permitimos cambios de régimen. Esto se debe a que los cambios de régimen parecen capturar la mayor parte de la variación en las relaciones precio-dividendo. Las estadísticas de razón de verosimilitud son  $2(379.23 - 374.57) = 9.32$  para la utilidad recursiva y  $2(377.23 - 371.22) = 12.02$  para la función de utilidad en forma de potencia. Estas estadísticas son más bajas que en el modelo sin cambios de régimen. Las burbujas capturan parte del riesgo atribuido en el modelo 3 al riesgo de cambio de régimen. Por lo tanto, la estimación arroja un coeficiente de aversión al riesgo ligeramente mayor bajo esta configuración que en el modelo 3.

La Tabla 3 muestra los principales momentos predichos de los datos. En particular, nos interesa la tasa de interés libre de riesgo predicha, los rendimientos esperados excesivos de tenencia y el componente fundamental de la relación precio-dividendo,  $k$ . Encontramos que los valores promedio implícitos obtenidos utilizando funciones de utilidad recursivas y en forma de potencia son similares dentro de los modelos. Sin embargo, las diferencias son ligeramente más prominentes cuando se consideran las parametrizaciones de cambio de régimen. Esto es consistente con la evidencia presentada anteriormente que muestra que rechazamos la función de utilidad en forma de potencia cuando se permite el cambio de régimen.

---

<sup>18</sup>Dado que  $\Gamma_1 = \frac{M_0(D)}{M_1(D)}$ , entonces  $\Gamma_1 > 1$  implica  $M_0(D) > M_1(D)$

<sup>19</sup>Vale la pena señalar que estimamos  $\Gamma_0$  como un parámetro libre, por lo que los datos parecen favorecer una parametrización en la que el estado malo en términos del proceso de dividendos (baja  $\mu$  y alta  $\sigma^2$ ) también es el estado malo en términos del factor de descuento estocástico.

Al comparar los modelos 1 y 2, encontramos que la tasa de interés libre de riesgo promedio es mayor cuando permitimos burbujas. También encontramos que la prima de riesgo toman valores similares. En los modelos 2, el componente fundamental de la relación precio-dividendo,  $k$ , es más bajo, lo que refleja que la burbuja explica una proporción de la variación en los precios. Al comparar los modelos 3 con los modelos 1 y los modelos 2, encontramos que en los modelos 3, la tasa de interés libre de riesgo en el estado 0 (el régimen malo) es similar a la obtenida en el modelo 2 y que la tasa de interés libre de riesgo en el estado 1 (el régimen bueno) es similar a la obtenida en el modelo 1. El Modelo 3 interpreta estas tasas como asociadas a los regímenes bueno y malo, mientras que el Modelo 1 y el Modelo 2 con la existencia o no de burbujas.

Con respecto a la prima de riesgo, encontramos que son más altos en los estados malos y más bajos en los estados buenos que los obtenidos en los modelos 1 y 2. Del mismo modo,  $k$  es más pequeño en los estados malos y más grande en los estados buenos que los obtenidos en los modelos de un solo régimen. Finalmente, los resultados para los Modelos 4 son cualitativamente similares a los de los modelos 3, excepto que una vez que permitimos burbujas,  $k$  es más pequeño en el estado bueno.

La Figura 3 muestra los datos de las relaciones precio-dividendo, los valores predichos por los modelos 3 y 4 y las probabilidades de régimen ajustadas. Como podemos ver, nuestro modelo estima que la economía ha estado en un estado bueno (es decir, alto crecimiento y baja varianza) desde mediados de la década de 1990. También podemos ver que el valor ajustado de la relación precio-dividendo para ese período es más alto que para períodos anteriores. Por lo tanto, tanto los modelos 3 como 4 brindan apoyo a una narrativa para explicar el aparente cambio permanente en la relación precio-dividendo, especialmente desde la década de 1990: un cambio de régimen en el proceso de crecimiento de los dividendos.<sup>20</sup> <sup>21</sup> En el estado bueno, dado que el crecimiento promedio de los dividendos es alto y la varianza es baja, las relaciones precio-dividendo son más altas que en el estado malo.

Finalmente, pasemos ahora a la tabla 4. Muestra una descomposición de la prima de riesgo para cada modelo considerado. Para los modelos 1, el rendimiento excesivo

---

<sup>20</sup>Nuestro modelo también ajusta una alta probabilidad de estar en el régimen bueno para el período 1956-1980. Como podemos ver, las relaciones precio-dividendo también fueron altas en ese período en comparación con los años adyacentes. Sin embargo, la relación precio-dividendo en este período no fue tan alta como en la década de 2000.

<sup>21</sup>Ver Lettau & van Nieuwerburgh (2008)

esperado se explica únicamente por el primer término, el típico  $\gamma\sigma^2$ . Se relaciona con el punto mencionado anteriormente: como es el único componente, debe ajustar la prima de riesgo observados por sí solo. Por lo tanto, el  $\gamma$  estimado de esta especificación es más alto que en los demás. Una vez que permitimos burbujas en los modelos 2, tenemos una explicación adicional para el nivel observado de prima de riesgo. Sin embargo, vale la pena señalar que el término habitual  $\gamma\sigma^2$  aún explica la mayor parte del rendimiento excesivo. Por lo tanto, aunque son importantes, las burbujas intrínsecas no parecen ser el principal impulsor de la prima de riesgo en los modelos 2.

Además, cuando permitimos cambios de régimen con precio en los modelos 3, los cambios de régimen con precio explican aproximadamente la mitad de la prima de riesgo. Este es un resultado notable porque muchos modelos de cambio de régimen no precios los cambios. Nuestros resultados muestran que son una fuente esencial de la prima de riesgo. Sin embargo, cabe destacar que los cambios de régimen que identificamos no necesariamente coinciden con *boom* y recesión. Los cambios en el proceso de crecimiento de los dividendos son el factor principal aquí. Los regímenes identificados son conceptualmente similares a los de [Bonomo & Garcia \(1996\)](#) y [Driffill & Sola \(1998\)](#): un estado de alta deriva y baja varianza (el estado bueno, que corresponde a nuestro estado 1) y un estado de baja deriva y alta varianza (el estado malo, que se da por el estado 0 en nuestra estimación). Por último, en el modelo 4, consideramos tanto el cambio de régimen como las burbujas y encontramos que la prima de riesgo total predicha por el modelo es ahora más alta que en los otros modelos.

Además, al comparar los valores que los diferentes modelos 4 predicen con los datos, encontramos que la prima de riesgo es aproximadamente un punto porcentual más alta para la especificación recursiva. Es aproximadamente dos puntos porcentuales más alta para la especificación de utilidad en forma de potencia.

El componente de cambio de régimen aún explica una parte significativa del rendimiento excesivo. Vale la pena señalar, sin embargo, que el componente de burbuja pura (Término **B**) es insignificante, mientras que el término de interacción entre cambio de régimen y burbujas explica alrededor del 10% de la prima de riesgo. Por lo tanto, la interacción entre cambio de régimen y burbujas parece más importante que el componente de burbuja pura.

## 5 Conclusiones

Este artículo muestra que el riesgo de cambio de régimen con precio parece ser un componente crucial de los rendimientos excesivos observados. Utilizando un modelo de cambio de régimen, hemos logrado: i) obtener estimaciones de aversión al riesgo más bajas para explicar los mismos rendimientos excesivos. ii) proporcionar una estimación del precio del riesgo de cambio de régimen. iii) encontrar evidencia de un cambio de régimen en el proceso de generación de datos de dividendos, lo cual puede ayudar a explicar las relaciones precio-dividendo más altas y los rendimientos excesivos más bajos, especialmente desde la década de 1990. iv) encontrar que la especificación de utilidad recursiva se prefiere sobre la utilidad en forma de potencia cuando permitimos cambios de régimen. v) encontrar que las burbujas intrínsecas no parecen ser esenciales para explicar el rendimiento excesivo esperado en los datos. Sin embargo, pueden mejorar el ajuste al final de la muestra.

## References

- Arnold, M., Wagner, A. F. & Westermann, R. (2013), 'Growth options, macroeconomic conditions, and the cross section of credit risk', *Journal of Financial Economics* **107**(2), 350 – 385.
- Bhamra, H. S., Kuehn, L.-A. & Strebulaev, I. A. (2010), 'The Levered Equity Risk Premium and Credit Spreads: A Unified Framework', *The Review of Financial Studies* **23**(2), 645–703.
- Bonomo, M. & Garcia, R. (1996), 'Consumption and equilibrium asset pricing : An empirical assessment', *Journal of Empirical Finance* **3**(3), 239–265.
- Brunnermeier, M. K. & Oehmke, M. (2013), Chapter 18 - Bubbles, Financial Crises, and Systemic Risk, in G. M. Constantinides, M. Harris & R. M. Stulz, eds, 'Handbook of the Economics of Finance', Vol. 2 of *Handbook of the Economics of Finance*, Elsevier, pp. 1221–1288. ISSN: 1574-0102.
- Campbell, J. Y. & Shiller, R. J. (1988), 'The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors', *The Review of Financial Studies* **1**(3), 195–228.  
**URL:** <http://www.jstor.org/stable/2961997>
- Cecchetti, S. G., Lam, P.-S. & Mark, N. C. (1990), 'Mean reversion in equilibrium asset prices, pp. 398-418', *American Economic Review* **80**(4), 398–418.
- Chen, H. (2010), 'Macroeconomic conditions and the puzzles of credit spreads and capital structure', *The Journal of Finance* **65**(6), 2171–2212.
- Cochrane, J. H. (2005), *Asset Pricing*, revised edition edn, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Dai, Q. & Singleton, K. (2003), 'Term structure dynamics in theory and reality', *Review of Financial Studies* **16**(3), 631–678.
- Driffill, J. & Sola, M. (1998), 'Intrinsic bubbles and regime switching', *Journal of Monetary Economics* **42**(2), 357–373.
- Duffie, D. & Epstein, L. G. (1992a), 'Asset Pricing with Stochastic Differential Utility', *The Review of Financial Studies* **5**(3), 411–436.
- Duffie, D. & Epstein, L. G. (1992b), 'Stochastic differential utility', *Econometrica* **60**(2), 353.

- Elliott, R., Aggoun, L. & Moore, J. (1995), *Hidden Markov Models*, Springer-Verlag: New York.
- Epstein, L. G. & Zin, S. E. (1989), 'Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework', *Econometrica* **57**(4), 937.
- Epstein, L. G. & Zin, S. E. (1991), 'Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis', *Journal of Political Economy* **99**(2), 263–286.
- Froot, K. & Obstfeld, M. (1991), 'Intrinsic bubbles: The case of stock prices', *American Economic Review* **81**(5), 1189–214.
- Goyal, A. & Welch, I. (2003), 'Predicting the Equity Premium with Dividend Ratios', *Management Science* **49**(5), 16.
- Hamilton, J. D. (1989), 'A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle', *Econometrica* **57**, 357–384.
- Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Kocherlakota, N. (2008), 'Injecting rational bubbles', *Journal of Economic Theory* **142**(1), 218–232. Monetary and Macro Economics.
- Kocherlakota, N. R. (1992), 'Bubbles and constraints on debt accumulation', *Journal of Economic Theory* **57**(1), 245–256.
- Lee, J. H. & Phillips, P. C. (2016), 'Asset pricing with financial bubble risk', *Journal of Empirical Finance* **38**, 590–622.
- Lettau, M. & van Nieuwerburgh, S. (2008), 'Reconciling the return predictability evidence', *Review of Financial Studies* **21**, 1607–1652.
- Lucas, R. E. (1978), 'Asset Prices in an Exchange Economy', *Econometrica* **46**(6), 1429.
- Mehra, R. & Prescott, E. C. (1985), 'The equity premium: A puzzle', *Journal of Monetary Economics* **15**(2), 145–161.
- Shen, J. & Elliott, R. J. (2015), 'General equilibrium pricing with multiple dividend streams and regime switching', *Quantitative Finance* **15**(9), 1543–1557.
- Weil, P. (1989), 'The Equity Premium Puzzle and The Risk-Free Rate Puzzle', *Journal of Monetary Economics* **24**(3), 401–421.

Weil, P. (1990), 'Nonexpected Utility in Macroeconomics', *The Quarterly Journal of Economics* **105**(1), 29.

## 6 Tablas y Figuras

### 6.1 Tablas

Parameter	No Regime-Switching			
	Model 1		Model 2	
	Recursive	Power	Recursive	Power
$\delta$	0.020 (calibrated)	0.020 (calibrated)	0.020 (calibrated)	0.020 (calibrated)
$\psi$	4.855 (5.999)	3.579 (0.394)	4.924 (4.936)	2.734 (0.743)
$\gamma$	3.397 (0.908)	3.579 (0.394)	2.054 (0.74)	2.734 (0.743)
$\mu$	0.026 (0.010)	0.029 (0.005)	0.022 (0.01)	0.031 (0.003)
$\sigma$	0.115 (0.004)	0.115 (0.004)	0.130 (0.010)	0.126 (0.006)
$\alpha$			0.026 (0.029)	0.023 (0.026)
$\sigma^a$	15.600 (1.239)	15.600 (1.219)	13.290 (0.982)	13.370 (0.986)
$\sigma^b$	0.183 (0.013)	0.183 (0.012)	0.183 (0.013)	0.183 (0.012)
$\sigma^c$	0.050 (0.003)	0.050 (0.002)	0.052 (0.003)	0.052 (0.003)
log-likelihood	251.327	251.270	266.496	265.806

Table 1: Estimated Parameters for each Specification.

Standard error in parenthesis. The expression (calibrated) in parenthesis means that the parameter was calibrated instead of estimated.

Parametro	cambio de regimen			
	Modelo 3		Modelo 4	
	Recursivo	potencia	Recursivo	potencia
$\delta$	0.020 (calibrado)	0.020 (calibrado)	0.020 (calibrado)	0.020 (calibrado)
$\psi$	5.500 (calibrado)	2.150 (0.319)	5.500 (calibrado)	3.020 (0.557)
$\gamma$	1.720 (0.414)	2.146 (0.319)	2.286 (0.588)	3.018 (0.557)
$p$	0.987 (0.015)	0.990 (0.011)	0.989 (0.014)	0.994 (0.008)
$q$	0.976 (0.014)	0.956 (0.023)	0.975 (0.017)	0.972 (0.024)
$\mu_0$	0.004 (0.016)	0.016 (0.016)	0.019 (0.016)	0.037 (0.013)
$\mu_1$	0.033 (0.012)	0.033 (0.012)	0.032 (0.012)	0.030 (0.01)
$\sigma_0$	0.150 (0.011)	0.148 (0.011)	0.150 (0.011)	0.149 (0.011)
$\sigma_1$	0.062 (0.005)	0.062 (0.005)	0.062 (0.005)	0.063 (0.005)
$\sigma_0^a$	4.340 (0.490)	4.370 (0.51)	4.328 (0.537)	4.344 (0.550)
$\sigma_1^a$	15.420 (1.855)	15.509 (1.816)	14.426 (1.679)	14.456 (1.64)
$\sigma_0^b$	0.211 (0.024)	0.216 (0.023)	0.211 (0.028)	0.214 (0.029)
$\sigma_1^b$	0.168 (0.015)	0.169 (0.015)	0.171 (0.016)	0.172 (0.016)
$\sigma_0^c$	0.067 (0.007)	0.067 (0.006)	0.068 (0.007)	0.068 (0.008)
$\sigma_1^c$	0.019 (0.004)	0.019 (0.004)	0.019 (0.004)	0.019 (0.004)
$\alpha_{0,1}$			0.000 (0.05)	0.000 (0.05)
$\alpha_{1,1}$			0.082 (0.067)	0.075 (0.073)
$\Gamma_0$	0.164 (0.179)	0.082 (0.101)	0.158 (0.158)	0.115 (0.131)
$\Gamma_1$	6.100 (6.597)	12.224 (14.872)	6.346 (6.332)	8.674 (9.439)
log-likelihood	374.569	371.217	379.230	377.231

Table 2: Parametros estimados para cada especificacion.

Errors estandar entre parentesis. La expresion (calibrado) indica que el parametro fue estimado en vez de estimado.

	No cambio de regimen				cambio de regimen			
	Model 1		Model 2		Model 3		Model 4	
	Recursivo	potencia	Recursivo	potencia	Recursivo	potencia	Recursivo	potencia
$r_0^f$	0.0144	0.0148	0.0246	0.0248	0.0207	0.0229	0.0209	0.0228
$r_1^f$					0.014	0.0136	0.0141	0.0136
$E_t(r^S - r^f   s_t = 0)$	0.0452	0.0475	0.0438	0.0544	0.061	0.091	0.0725	0.0905
$E_t(r^S - r^f   s_t = 1)$					0.0367	0.041	0.0454	0.0484
$k_0$	29.858	29.97	26.765	27.25	19.79	20.037	19.691	19.822
$k_1$					41.718	40.832	35.158	33.79

Table 3: Promedios de observables predecidos por cada especificacion.

Modelo	Preferencias	Term. A	Term. B	Term. C	Term. D	Total
Modelo 1	Recursivo	0.0452	0	0	0	0.0452
	potencia	0.0475	0	0	0	0.0475
Modelo 2	Recursivo	0.0343	0.0095	0	0	0.0438
	potencia	0.0430	0.0113	0	0	0.0543
Modelo 3	Recursivo	0.0239	0	0.026	0	0.0499
	potencia	0.0286	0	0.0385	0	0.0671
Modelo 4	Recursivo	0.0313	0.0012	0.0216	0.0057	0.0598
	potencia	0.0400	0.0018	0.0214	0.0066	0.0698
Data						0.05034

Table 4: Descomposicion de la prima de riesgo.

Los terminos son computados usando la descomposicion presentada en la ecuacion . (26).

## 6.2 Figuras

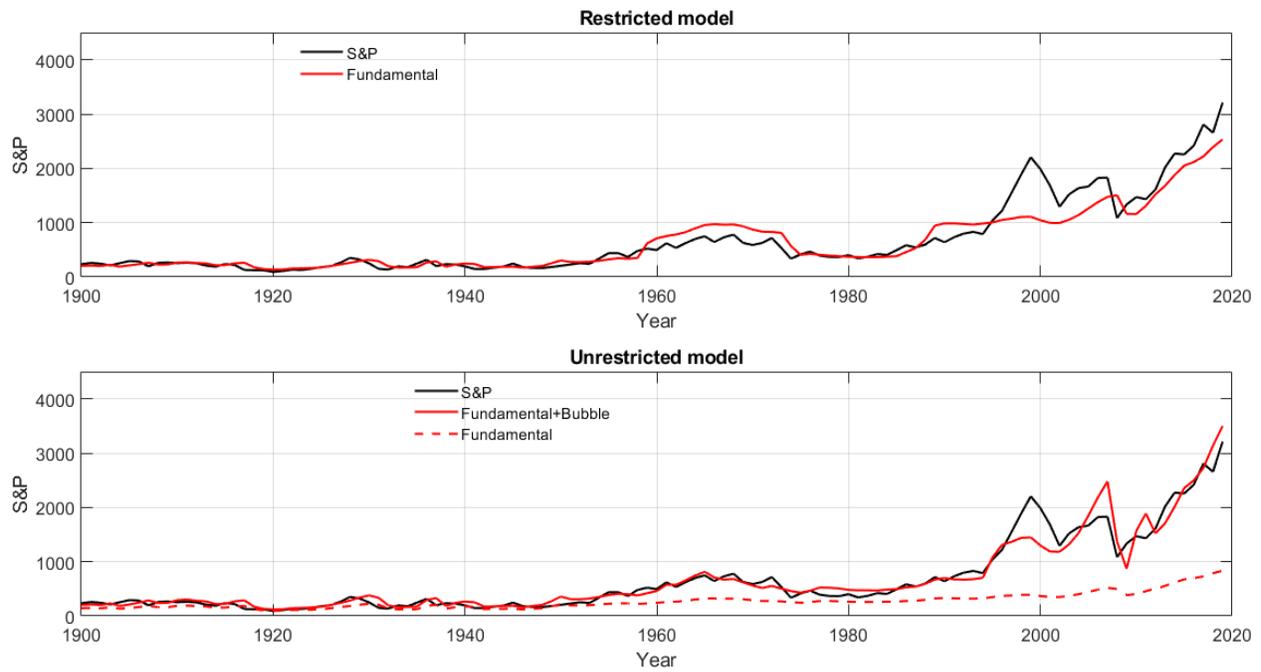


Figure 1: Precios reales y ajustados utilizando el modelo dado por las Ecs. (1) - (3). El primer panel muestra el modelo general, mientras que el segundo panel muestra una versión restringida, estimada bajo la restricción de que  $c_0 = c_1 = 0$ .

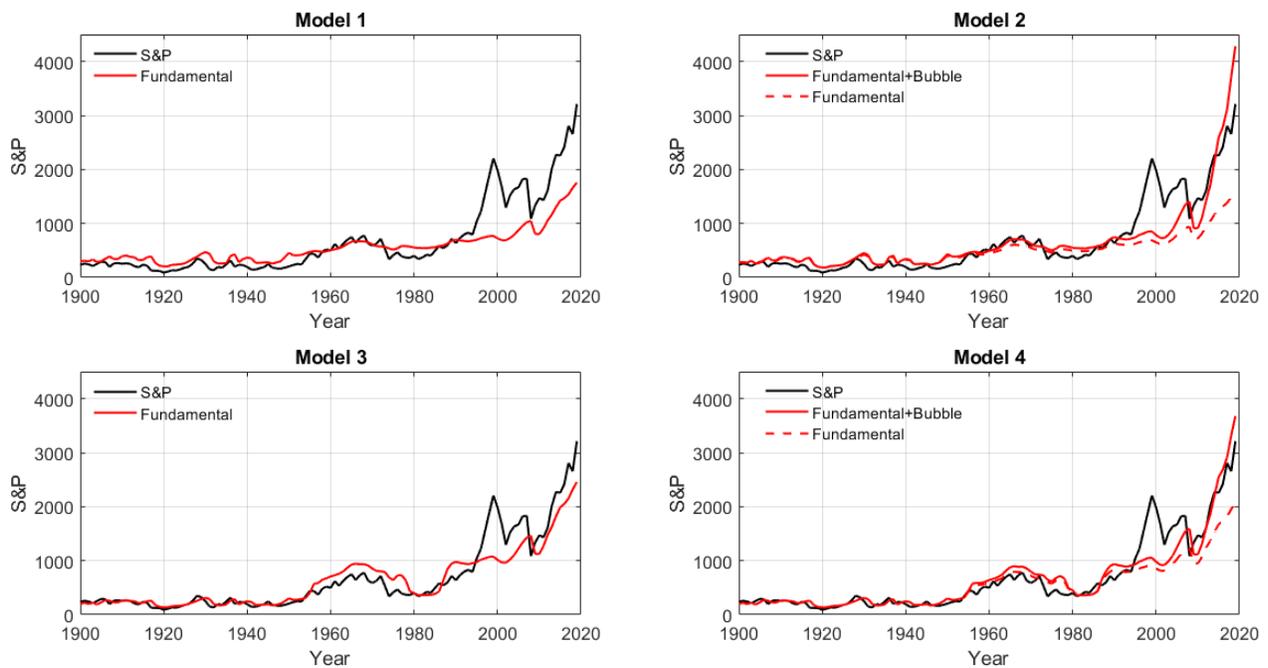


Figure 2: Precios de las acciones y valores ajustados por cada modelo. En todos los casos, se utiliza utilidad recursiva.

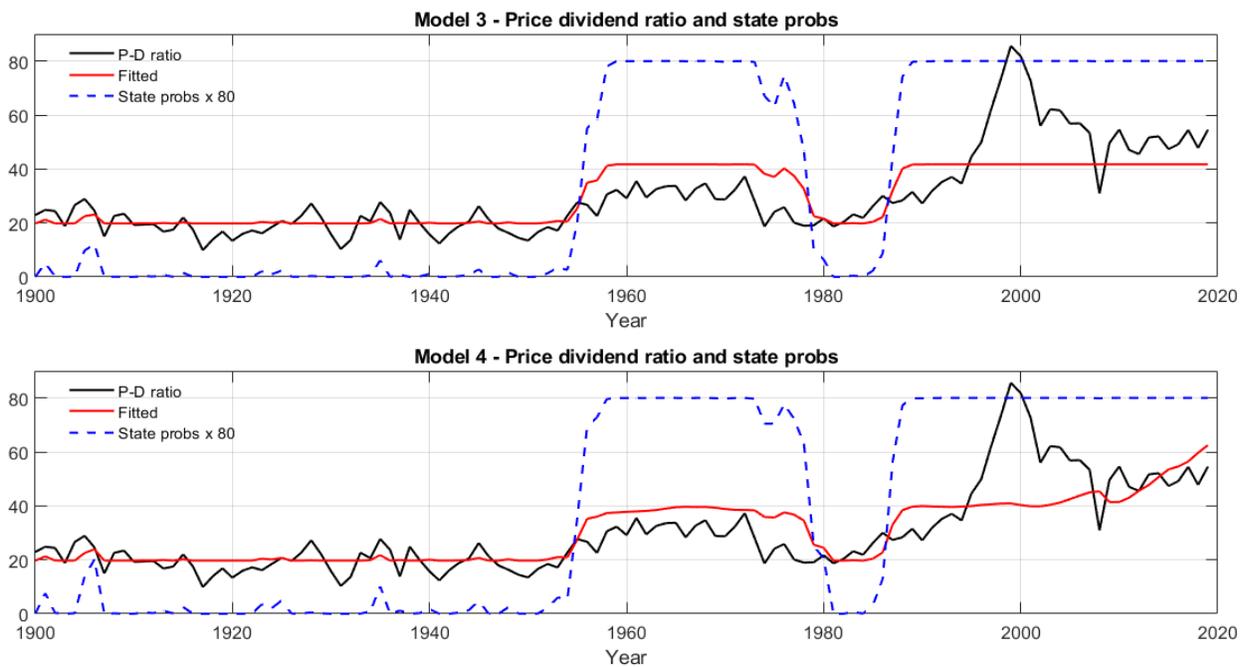


Figure 3: Relaciones precio-dividendo reales y ajustadas, y probabilidades de transición para los modelos 3 y 4.

# Appendices

## Appendix A Derivaciones para el Análisis Preliminar

Presentamos el modelo que utilizamos en la Sección 2. El tiempo es discreto. La ecuación de determinación de precios se define como:

$$P_t = \mathbf{E}_t \left[ e^{-r(s_t)} [P_{t+1}(s_{t+1}) + D_t] \right] \quad (\text{A.28})$$

(el precio  $P_t$  puede verse como el precio al comienzo del período, con el dividendo  $D_t$  pagado al final del período). La tasa de descuento es específica de cada régimen. La media condicional de la tasa de crecimiento de los dividendos presenta dependencia del estado:

$$\Delta D_t = \mu_{s_t} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t \quad (\text{A.29})$$

Donde  $\mu_{s_t} = (\mu_0(1 - s_t) + \mu_1 s_t)$  y  $\sigma_{s_t} = (\sigma_0(1 - s_t) + \sigma_1 s_t)$ . La solución fundamental de (A.28) es lineal en los dividendos, con un coeficiente específico de cada régimen:  $P_t^{\text{PV}} = k_{s_t} D_t$ . Estos coeficientes se pueden determinar en función de los demás parámetros mediante (A.28) en ambos estados:

$$\begin{aligned} k_0 &= ((q e^{-r_0} + (1 - q) e^{-r_1}) + q k_0 b_0 + (1 - q) k_1 b_1). \\ k_1 &= ((p e^{-r_1} + (1 - p) e^{-r_0}) + p k_1 b_1 + (1 - p) k_0 b_0) \end{aligned}$$

donde  $b_0 = e^{(\mu_0 - r_0 + \frac{1}{2} \sigma_0^2)}$  y  $b_1 = e^{(\mu_1 - r_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2)}$ . Estas dos ecuaciones determinan  $(k_0, k_1)$  en función de los demás parámetros.

En cuanto al componente de la burbuja,  $B_t$ , debe cumplir la siguiente ecuación de diferencia:

$$B_t = \mathbf{E}_t \left[ e^{-r s_t} B_{t+1}(s_{t+1}) | I_t \right] \quad (\text{A.30})$$

La burbuja intrínseca tiene la forma  $B_t = c_i D_t^\lambda$ . Utilizando esto y (A.30), obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} c_0 D_t^\lambda &= c_0 q D_t^\lambda e^{(\lambda \mu_0 - r_0 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_0^2)} + (1 - q) c_1 D_t^\lambda e^{(\lambda \mu_1 - r_1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_1^2)} \\ c_1 D_t^\lambda &= c_0 (1 - p) D_t^\lambda e^{(\lambda \mu_0 - r_0 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_0^2)} + p c_1 D_t^\lambda e^{(\lambda \mu_1 - r_1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_1^2)} \end{aligned}$$

A partir de estas dos ecuaciones, podemos obtener las siguientes expresiones para la relación  $\frac{c_1}{c_0}$

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{1 - qe^{(\lambda\mu_0 - r_0 + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma_0^2)}}{(1 - q)e^{(\lambda\mu_1 - r_1 + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma_1^2)}} \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{(1 - p)e^{(\lambda\mu_0 - r_0 + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma_0^2)}}{1 - pe^{(\lambda\mu_1 - r_1 + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma_1^2)}} \quad (\text{A.32})$$

Podemos utilizar (A.31) y (A.32) para obtener una solución para  $\lambda$  y  $\frac{c_1}{c_0}$ . Uno de los coeficientes de la burbuja se deja como parámetro libre a estimar. El modelo teórico que se estima se define mediante las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{P_t}{D_t} = k_{s_t} + c_{s_t} D_t^{\lambda-1} + \theta_{s_t} v_t, \quad (\text{A.33})$$

$$\Delta D_t = \mu_{s_t} + \sigma_{s_t}^d u_t, \quad (\text{A.34})$$

$$r_t = \mu_{s_t}^r + \sigma_{s_t}^r \xi_t, \quad (\text{A.35})$$

## Appendix B Utilidad Recursiva con Preferencias Dependientes del Estado

En las siguientes líneas, derivamos la solución del modelo asumiendo una función de utilidad recursiva y que la función de rendimiento instantáneo (agregador)  $f$  está sujeta a un shock de preferencias. Lo incluimos para que el precio del riesgo de cambio sea un parámetro libre que podemos estimar.

En este caso, la función de valor y el agregador correspondientes están dados por:

$$V(c_t, s_t) = E_t \int_t^\infty f(c_\tau, V_\tau) d\tau, \quad (\text{B.36})$$

$$f(c, V(s), s) = \frac{\delta}{(1 - \psi)} \frac{z(s)^{1-\psi} c^{1-\psi} - [(1 - \gamma)v(s)]^{\frac{1-\psi}{1-\gamma}}}{[(1 - \gamma)v(s)]^{\frac{1-\psi}{1-\gamma} - 1}}. \quad (\text{B.37})$$

Donde  $z(s)$  es el shock de preferencias. En equilibrio, el hogar representativo consume tanto como los dividendos que recibe y enfrenta el siguiente proceso de dividendos:

$$dD(t) = D(t)[\mu_{D_{s_t}} dt + \sigma_{D_{s_t}} dW(t)].$$

La funcion de valor en terminos de los dividendos es:

$$J(D_t, s_t) = E_t \left[ \int_t^{\infty} f(D_\tau, J_\tau) d\tau \right].$$

el factor de descuento estocastico es:

$$M(D_t, s_t) = Y(D_t, s_t) f_c(c_t, J(D_t, s_t)), \quad (\text{B.38})$$

donde

$$Y(D_t, s_t) = e^{\int_0^t f_V(D_\tau, J(D_\tau, s_\tau)) d\tau}.$$

De aqui en mas omitimos el subindice t. El proceso  $M(s, D)$  se puede escribir como:

$$dM(s, D) = f_c(c, J(D, s)) dY(s) + Y(s) df_c(c, J(D, s)) + \langle Y(s) f_c(c, J(D, s)), ds \rangle. (\text{B.39})$$

conjeturamos la siguiente solucion para J

$$J(D, s) = \frac{[\phi(s)D]^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

En equilibrio  $c = D$  and  $dc = dD$ . Dividiendo la Eq. (B.39) por Eq. (B.38) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{M_i} &= \frac{dY_i}{Y_i} + \frac{df_{c_i}}{f_{c_i}} + h_i \left[ \frac{Y_j f_{c_j}}{Y_i f_{c_i}} - 1 \right] dt - \left[ \frac{Y_j f_{c_j}}{Y_i f_{c_i}} - 1 \right] dN_i, \\ &= \frac{dY_i}{Y_i} + \frac{df_{c_i}}{f_{c_i}} + h_i \left[ \frac{z_j^{1-\psi} \phi_j^{\psi-\gamma}}{z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma}} - 1 \right] dt - \left[ \frac{z_j^{1-\psi} \phi_j^{\psi-\gamma}}{z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma}} - 1 \right] dN_i, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Primero, para computar  $\frac{dY}{Y}$ , notar que:

$$f_{V_i} = \frac{\delta}{(1-\psi)} \left[ \frac{z_i^{1-\psi} D^{1-\psi}}{[(1-\gamma)J_i]^{\frac{1-\psi}{1-\gamma}}} (\psi - \gamma) + (\gamma - 1) \right] = \frac{\delta}{1-\psi} \left[ \frac{z_i^{1-\psi} (\psi - \gamma)}{\phi_i^{1-\psi}} + (\gamma - 1) \right]$$

Que no depende de D. Por otro lado,  $f_{V_i}$  puede depender del estado. Pero como

$Y_t = e^{(\int_0^t f_V(s_\tau) d\tau)}$ , un cambio de regimen no hace que  $Y_t$  salte. Por ende,

$$\begin{aligned}\frac{dY}{Y} &= f_V dt \\ &= \frac{\delta}{1-\psi} \left[ \frac{z_i^{1-\psi} (\psi - \gamma)}{\phi_i^{1-\psi}} + (\gamma - 1) \right] dt\end{aligned}$$

Para obtener  $\frac{df_c}{f_c}$  usamos que  $c = D$  en equilibrio, y tomamos derivadas con respecto a  $D$ . Usando la conjetura para  $J$ :

$$f_c(D, J(D, s)) = \frac{\delta z_i^{1-\psi} D^{-\psi}}{[(1-\gamma)J_i]^{\frac{1-\psi}{1-\gamma}-1}} = \frac{\delta z_i^{1-\psi} D^{-\gamma}}{\phi_i^{\gamma-\psi}} = \delta z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma} D^{-\gamma}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}df_c &= \frac{\partial f_c(D, J(D, s))}{\partial D} dD + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_c(D, J(D, s))}{\partial D^2} (dD)^2 \\ &= (-\gamma \mu_{st} + \frac{1}{2} \gamma (1 + \gamma) \sigma_{st}^2) f_c(D, J(D, s)) dt - \gamma \sigma_{st} f_c(D, J(D, s)) dW.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{df_c}{f_c} = (-\gamma \mu_{st} + \frac{1}{2} \gamma (1 + \gamma) \sigma_{st}^2) dt - \gamma \sigma_{st} dW$$

Por lo que que el factor de descuento estocastico satisface que:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{M} &= \left[ \frac{\delta}{1-\psi} \left[ \frac{z_i^{1-\psi} (\psi - \gamma)}{\phi_i^{1-\psi}} + (\gamma - 1) \right] + (-\gamma \mu_{st} + \frac{1}{2} \gamma (1 + \gamma) \sigma_{st}^2) \right] dt - \gamma \sigma_{st} dW \\ &+ h_i \left[ \frac{z_j^{1-\psi} \phi_j^{\psi-\gamma}}{z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma}} - 1 \right] dt - \left[ \frac{z_j^{1-\psi} \phi_j^{\psi-\gamma}}{z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma}} - 1 \right] dN_i,\end{aligned}$$

Se observa que el precio del riesgo del cambio de régimen está dado por  $\Gamma_i = \frac{z_j^{1-\psi} \phi_j^{\psi-\gamma}}{z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma}}$ . Es inmediato que  $\Gamma_0 \Gamma_1 = 1$ . La expresión final para las tasas de interés libre de riesgo se puede obtener utilizando que  $r^f(s_t) dt = -E\left(\frac{dM(st)}{M(st)} | F_t, s_t\right)$  y las expresiones derivadas

anteriormente, resultando en:

$$r_i^f = -\delta \frac{1-\gamma}{1-\psi} \left[ \left( \frac{\psi-\gamma}{1-\gamma} \right) z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-1} - 1 \right] + \gamma \mu_i - \frac{1}{2} \gamma (1+\gamma) \sigma_i^2 - h_i \left[ \frac{z_j^{1-\psi} \phi_j^{\psi-\gamma}}{z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma}} - 1 \right] \quad (\text{B.41})$$

Resolvemos para  $\phi_0$  and  $\phi_1$  usando la ecuacion de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\sup_D \mathcal{D}J_i(D) + f(D, J_i) dt = 0 \quad (\text{B.42})$$

donde

$$\mathcal{D}J_i(D) = J_{D_i} \mathbf{E}_t[dD_i] + h_i(J_j - J_i) dt + \frac{1}{2} J_{DD_i} [dD_i]^2.$$

reemplazando las derivadas relevantes:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{1-\psi} [z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma} - \phi_i^{1-\gamma}] + h_i \left[ \frac{\phi_j^{1-\gamma} - \phi_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] + \phi_i^{1-\gamma} [\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \gamma] = 0 \\ & \delta \frac{1-\gamma}{1-\psi} z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma} + [(1-\gamma)\mu_i - \gamma(1-\gamma)\sigma_i^2 - \delta \frac{1-\gamma}{1-\psi}] \phi_i^{1-\gamma} + h_i [\phi_j^{1-\gamma} - \phi_i^{1-\gamma}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Como tenemos dos de estas ecuaciones (una para cada estado), debemos resolver un sistema de 2x2 para encontrar  $\phi_0, \phi_1$ . Este sistema refleja el resultado en [Chen \(2010\)](#) para dos estados. Es fácil ver que la solución del sistema es homogénea de grado 1 en  $z_0, z_1$ <sup>22</sup>. Aprovechamos esa propiedad para la calibración de  $\Gamma_i$ .

## Resolviendo los precios

Una vez que encontramos las soluciones en forma cerrada para la función de valor, podemos describir sus implicaciones para la determinación de precios de activos. Para obtener una expresión para el precio de las acciones en función de los estados y los dividendos,  $P(D_t, s_t)$ , utilizamos el hecho de que esos precios satisfacen la ecuación estándar de determinación de precios de activos:

$$0 = \frac{D_t}{P_t} dt + \mathbf{E}_t \left[ \frac{dM_t}{M_t} + \frac{dP_t}{P_t} + \frac{dM_t}{M_t} \frac{dP_t}{P_t} \right]. \quad (\text{B.44})$$

En lo que sigue en esta sección, omitimos los subíndices de tiempo. Para resolver la ecuación de determinación de precios, necesitamos una expresión para  $\frac{dM}{M}$ . Utilizando

<sup>22</sup>Tomemos  $z = (z_0, z_1)$  y la solución correspondiente  $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ . Ahora, escala  $z$  por un factor de  $\lambda$ . Usando [B.43](#), es fácil verificar la conjetura de que  $\lambda\phi^*$  es una solución al sistema.

las formas funcionales de  $M$ ,  $J$ ,  $f$  y aplicando el Lema de Ito, obtenemos (ver el Apéndice B para una derivación):

$$\frac{dM}{M} = -r^f s dt - \lambda s dW - (\Gamma_s - 1) dN, \quad (\text{B.45})$$

donde

$$\Gamma_i = \frac{z_j^{1-\psi} \phi^{\psi-\gamma j}}{z_i^{1-\psi} \phi^{\psi-\gamma i}}, \quad (\text{B.46})$$

$$r^f i = -\delta \frac{1-\gamma}{1-\psi} \left[ \left( \frac{\psi-\gamma}{1-\gamma} \right) z_i^{1-\psi} \phi^{\psi-1} i - 1 \right] + \gamma \mu i - \frac{1}{2} \gamma (1+\gamma) \sigma_i^2 - h_i [\Gamma_i - 1], \quad (\text{B.47})$$

$$\lambda_i = \gamma \sigma_i^2 \quad (\text{B.48})$$

Observa que los valores de  $\Gamma_i$  satisfacen la condición  $\Gamma_0 \Gamma_1 = 1$ . Utilizaremos esta restricción más adelante. El modelo proporciona fórmulas para la tasa de interés libre de riesgo dependiente del estado y los precios de los riesgos de difusión y cambio de régimen.

Sustituimos la ley de movimiento de  $\frac{dM}{M}$  en la ecuación de determinación de precios de activos en (B.44), y luego aplicamos el Lema de Ito (denotando  $P(D, s)$  como  $P_s$ , utilizaremos ambas notaciones de manera intercambiable) para encontrar que  $P(D, s)$  satisface:

$$\begin{aligned} r^f 0 P_0 &= D + [\mu_0 - \gamma \sigma_0^2] P_{0D} D + \frac{1}{2} \sigma_0^2 P_{0DD} D^2 + h_0 \Gamma_0 [P_1 - P_0], \\ r^f 1 P_1 &= D + [\mu_1 - \gamma \sigma_1^2] P_{1D} D + \frac{1}{2} \sigma_1^2 P_{1DD} D^2 + h_1 \Gamma_1 [P_0 - P_1], \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Adivinamos que la solución general tiene la siguiente forma funcional:

$$P(D, s) = k_s D + \sum_{v=1}^4 a_{s,v} D^{nv}, \quad (\text{B.50})$$

donde  $a_{s,v}$  para  $v = 1, 2, 3, 4$  son parámetros libres. El primer término es el valor fundamental de la acción, mientras que los términos no lineales corresponden a la burbuja intrínseca. A continuación, obtenemos expresiones para  $k_s$  y  $\lambda_i$  como funciones de los parámetros profundos del modelo.

## Solución fundamental

Para mayor claridad expositiva, centrémonos primero en el término fundamental de la Ec.(B.49). Con la ayuda del primer término de la solución postulada en(B.50), obtenemos expresiones para  $k_s$ . Tenemos que  $k_0, k_1$  satisfacen:

$$\begin{aligned} r^f 0 k_0 &= 1 + [\mu_0 - \gamma \sigma_0^2] k_0 + h_0 \Gamma_0 [k_1 - k_0], \\ r^f 1 k_1 &= 1 + [\mu_1 - \gamma \sigma_1^2] k_1 + h_1 \Gamma_1 [k_0 - k_1], \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Podemos resolver este sistema lineal para obtener  $(k_0, k_1)$  <sup>23</sup>

## Soluciones no fundamentales

Ahora pasamos a las soluciones no fundamentales (es decir, los términos de burbuja intrínseca).<sup>24</sup> Observa que la parte homogénea del sistema anterior corresponde a los términos derivados de  $E[d(M_t P_t)] = 0$ . Cualquier solución de esta ecuación puede verse como el precio de un activo que nunca paga flujos de efectivo. Es por eso que podemos pensar en ellos como burbujas: la única fuente de su precio es el hecho de que se espera que tengan un precio más alto en el futuro. Por lo tanto, los términos adicionales en  $P(D, s)$  deben resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} [\mu_0 - \gamma \sigma_0^2] P_{0D} D + \frac{1}{2} \sigma_0^2 P_{0DD} D^2 + h_0 \Gamma_0 [P_1 - P_0] &= r^f 0 P_0, \\ [\mu_1 - \gamma \sigma_1^2] P_{1D} D + \frac{1}{2} \sigma_1^2 P_{1DD} D^2 + h_1 \Gamma_1 [P_0 - P_1] &= r^f 1 P_1. \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Como dijimos antes, conjeturamos que las soluciones son de la forma  $P^B(D, s) = \mathbf{a}(s) D^\eta$ . Al utilizar esta suposición, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left( [\mu_0 - \gamma \sigma_0^2] \eta + \frac{1}{2} \sigma_0^2 \eta(\eta - 1) - h_0 \Gamma_0 - r^f 0 \right) \mathbf{a}(0) &= h_0 \Gamma_0 \mathbf{a}(1), \\ \left( [\mu_1 - \gamma \sigma_1^2] \eta + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \eta(\eta - 1) - h_1 \Gamma_1 - r^f 1 \right) \mathbf{a}(1) &= h_1 \Gamma_1 \mathbf{a}(0), \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Al multiplicar ambas ecuaciones, podemos eliminar los coeficientes de la burbuja y obtener:

$$G_0(\eta) G_1(\eta) = h_0 h_1, \quad (\text{B.54})$$

---

<sup>23</sup>Necesitamos que  $\left( r^f 0 - [\mu_0 - \gamma \sigma_0^2] + h_0 \Gamma_0 \right) \left( r^f 1 - [\mu_1 - \gamma \sigma_1^2] + h_1 \Gamma_1 \right) - h_0 h_1 > 0$  para obtener valores positivos de  $k_0$  y  $k_1$ .

<sup>24</sup>Los resultados teóricos sobre la posible existencia de burbujas en equilibrios secuenciales se han explorado en la literatura (ver [Kocherlakota \(1992\)](#), [Kocherlakota \(2008\)](#)).

donde  $G_i(\eta)$  está dado por

$$G_i(\eta) = (\mu_i - \gamma\sigma_i^2)\eta + \frac{1}{2}\sigma_i^2\eta(\eta - 1) - \eta\Gamma_i - r^f i \quad \text{para } i = 0, 1.$$

La ecuación (B.54) tiene cuatro raíces distintas, con  $\eta_1 > \eta_2 > 0$  y  $\eta_4 < \eta_3 < 0$ . Por lo tanto, la solución general para el sistema homogéneo es

$$\begin{aligned} P^B(D, s = 0) &= \sum_{v=1}^4 a_{0,v} D t^{\eta_v}, \\ P^B(D, s = 1) &= \sum_{v=1}^4 a_{1,v} D t^{\eta_v}. \end{aligned}$$

Como es práctica estándar, imponemos la condición límite de que  $\lim_{D \rightarrow 0^+} P(D, s) = 0$ . Por lo tanto,  $a_{i,3} = a_{i,4} = 0$  para  $i = 0, 1$ . A partir de ahora, solo escribiremos los dos términos correspondientes a las raíces positivas de la ecuación (B.54).

## Appendix C Detalles para precios de acciones dependientes del régimen

### Valoración de precios de acciones.

Siguiendo a [Cochrane \(2005\)](#), escribimos la versión de cambio de régimen de la ecuación de valoración de precios de acciones sin arbitraje de la siguiente manera:

$$0 = M_{s_t} D_t dt + E[d(M_{s_t} P(D_t, s_t))]. \quad (\text{C.1})$$

Al aplicar el lema de Ito, descomponemos el último término  $d(M(s_t)P(c_t, s_t))$ :

$$d(M(s_t)P(D_t, s_t)) = P(D_t, s_t)dM(s_t) + M(s_t)dP(D_t, s_t) + dM(s_t)dP(D_t, s_t). \quad (\text{C.2})$$

Siguiendo a [Bhamra et al. \(2010\)](#), [Chen \(2010\)](#) y [Dai & Singleton \(2003\)](#), escribimos  $dM(s_t)$  como:

$$dM(s_t) = -r^f s_t M(s_t) dt - \lambda s_t M(s_t) dZ_t - M(s_t)(\Gamma s_t - 1) dN_t \quad (\text{C.3})$$

donde  $r^f s_t$  es la tasa de rendimiento libre de riesgo,  $\lambda s_t$  es el precio de mercado (dependiente del régimen) del riesgo continuo (riesgo de difusión),  $\Gamma s_t$  es el precio de mercado de un cambio de régimen de  $s_t = j$  a  $i$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 0, 1$ ), y  $dZ_t$  es el incremento de un proceso de Wiener estándar.

Sustituyendo la ecuación (C.3) por  $dM$  en la ecuación (C.1), obtenemos la siguiente

expresión:

$$r^f P(D_t, s_t) dt = D_t dt + E[dP(D_t, s_t)] + E \left[ \frac{dM(s_t) dP(D_t, s_t)}{M(s_t)} \right]. \quad (C.4)$$

Para obtener el resultado final presentado en el texto, necesitamos determinar las expresiones para  $E[dP(D_t, s_t)]$  y  $E\left[\frac{dM(s_t)dP(D_t,s_t)}{M(s_t)}\right]$ .

(i) Derivación de  $E(dP(D_t, s_t))$ .

Sea  $P_i = P(D_t, s(t) = i)$  para  $i = 0, 1$  y  $P = (P_0, P_1)$  sea un vector fila  $2 \times 1$  que consiste en los elementos  $P_0, P_1$ . Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el operador de producto interno utilizado de la siguiente manera: Si  $x, y$  son vectores (columna) en  $\mathbb{R}^N$ , escribimos  $\langle x, y \rangle = x'y$  para su producto escalar (interno). Cuando  $x$  es una matriz y  $y$  es un vector (columna),  $\langle x, y \rangle = \text{diag}(xy)$  denota la matriz diagonal con el vector  $xy$  en su diagonal.

Luego, utilizando el lema de Ito para casos con cambios de régimen siguiendo la línea de [Elliott et al. \(1995\)](#), podemos expresar el cambio en el valor del proyecto respecto a  $dP = dP(D_t, s_t)$  como en [Shen & Elliott \(2015\)](#):

$$\begin{aligned} dP &= \langle dP, s \rangle + \langle P, ds \rangle \\ &= P_D(D_t, s_t) dc + \frac{1}{2} P_{DD}(D_t, s_t) (dD)^2 + \langle P, Hs_t dt \rangle + \langle P, dN \rangle, \\ &= \underbrace{\left( \mu_{s_t} P_D(D_t, s_t) D + \frac{1}{2} \sigma_{s_t}^2 P_{DD}(D_t, s_t) D^2 \right) dt + \sigma_{s_t} P_D(D_t, s_t) D dW_t}_{\text{difusion}} \\ &\quad + \underbrace{\langle P, Hs_t dt \rangle + \langle P, dN \rangle}_{\text{cambios de regimen}} \end{aligned} \quad (C.5)$$

donde los subíndices  $D$  y  $DD$  denotan derivadas parciales de primer y segundo orden.

Podemos expresar  $\langle P, Hs_t dt \rangle = (h_0[P_1 - P_0] dt, h_1[P_0 - P_1] dt)'$  y, usando que  $dN = (dN_0, dN_1)$  y  $dN_0 = -dN_1$ , podemos escribir  $\langle P, dN \rangle = [P_0 - P_1] dN_0$ . Aplicando esta propiedad para  $s_t = 0$  o  $s_t = 1$ :

$$\begin{aligned} dP_0 &= (\mu_0 P_{0D} D + \frac{1}{2} \sigma_0^2 P_{0DD} D^2 + h_0[P_1 - P_0]) dt + \sigma_0 P_{0D} D dW + [P_0 - P_1] dN_0 \\ dP_1 &= (\mu_1 P_{1D} D + \frac{1}{2} \sigma_1^2 P_{1DD} D^2 + h_1[P_1 - P_2]) dt + \sigma_1 P_{1D} D dW + [P_1 - P_0] dN_1 \end{aligned} \quad (C.6)$$

Tomando esperanzas

$$\begin{aligned} E(dP_0) &= \left( \mu_0 P_{0D} D + \frac{1}{2} \sigma_0^2 P_{0DD} D^2 + h_0[P_1 - P_0] \right) dt, \\ E(dP_1) &= \left( \mu_1 P_{1D} D + \frac{1}{2} \sigma_1^2 P_{1DD} D^2 + h_1[P_0 - P_1] \right) dt. \end{aligned}$$

(ii) derivacion de  $E\left(\frac{dM(s_t)dP(D_t, s_t)}{M(s_t)}\right)$ .

Para obtener la solucion, usamos el lema de Ito en  $dM(s_t)dP(D_t, s_t)$ .

$$\begin{aligned}\frac{dM_0}{M_0}dP_0 &= -\lambda_0\sigma_0P_{0D}Ddt - (\Gamma_0 - 1)[P_0 - P_1]dN_0^2 \\ \frac{dM_1}{M_1}dP_1 &= -\lambda_1\sigma_1P_{1D}Ddt - (\Gamma_1 - 1)[P_1 - P_0]dN_1^2\end{aligned}\tag{C.7}$$

Nota que la expresion para  $(dN)^2$  se puede obtener usando los resultados presentados en el Lemma 1.3 del Apendice B de [Elliott et al. \(1995\)](#):

$$(dN)^2 = \text{diag}(Hs_t)dt - \text{diag}(s_t)H'dt - H \text{diag}(s_t)dt.$$

donde  $\text{diag}(x)$  denota la matriz diagonal con vector  $x$  en la diagonal. Esta expresion se simplifica a  $(dN)^2 = \text{diag}((h_1dt, h_2dt)')$ .

Sustituyendo en Eq. (C.7):

$$\begin{aligned}E\left(\frac{dM_0dP_0}{M_0}\right) &= -\lambda_0\sigma_0P_{0D}Ddt - (\Gamma_0 - 1)h_0[P_0 - P_1]dt, \\ E\left(\frac{dM_1dP_1}{M_1}\right) &= -\lambda_1\sigma_1P_{1D}Ddt - (\Gamma_1 - 1)h_1[P_1 - P_0]dt.\end{aligned}\tag{C.8}$$

Usando Eq. (C.8) em Eq. (C.4),

$$r_{s_t}^f P(D_t, s_t)dt = D_tdt + EdP(D_t, s_t) + E\frac{dM(s_t)dP(D_t, s_t)}{M(s_t)}.\tag{C.9}$$

nos da

$$\begin{aligned}r_0^f P_0 &= D + (\mu_0 - \lambda_0\sigma_0)P_{0D}D + \frac{1}{2}\sigma_0^2P_{0DD}D^2 + h_0(\Gamma_0 - 1)[P_1 - P_0] \\ r_1^f P_1 &= D + (\mu_1 - \lambda_1\sigma_1)P_{1D}D + \frac{1}{2}\sigma_1^2P_{1DD}D^2 + h_1(\Gamma_1 - 1)[P_0 - P_1]\end{aligned}\tag{C.10}$$

que es igual a la Eq. (B.49).

## Appendix D Prima de riesgo y cambio de regimen

### D.1 Cambios de Regímenes

En este apéndice, mostramos cómo derivar los rendimientos de retención excesivos cuando hay cambios de régimen. Estas derivaciones son válidas cuando se utiliza una función de utilidad recursiva o de potencia.<sup>25</sup> La única diferencia sería las expresiones exactas

<sup>25</sup>Esto se debe a que la última es un caso particular de la primera

de  $r_i^f$ ,  $\Gamma_i$ ,  $\lambda_i$ , y otros parámetros como función de los parámetros profundos del modelo: estos cambiarán dependiendo de la especificación de la función de utilidad. Por ejemplo, en el caso de utilidad de potencia,  $r_i^f = \delta + \gamma\mu_{ci} - \frac{1}{2}\gamma(\gamma + 1)(\sigma_{ci})^2 - h_i(\Gamma_i - 1)$ , mientras que en el caso de utilidad recursiva,  $r_i^f$  está dado por (B.41). Comenzamos observando que permitir cambios de régimen en los parámetros de difusión y prima de riesgo da la siguiente ecuación de precios:

$$\frac{dP(D_t, s_t)}{P(D_t, s_t)} + \frac{D_t dt}{P(D_t, s_t)} = -\frac{dM(s_t)}{M(s_t)} - \frac{dM(s_t)}{M(s_t)} \frac{dP(D_t, s_t)}{P(D_t, s_t)}. \quad (D.11)$$

Luego, para obtener una expresión para el rendimiento excesivo, simplemente necesitamos derivar los resultados para los términos del lado derecho de la ecuación anterior. Estos términos se mostraron como:

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{M_0} &= -r^f dt - \lambda_0 dW - (\Gamma_0 - 1) dN_0, \\ \frac{dM_1}{M_1} &= -r^f dt - \lambda_1 dW - (\Gamma_1 - 1) dN_1 \\ \frac{dP_0}{P_0} &= \left( \mu_1 \frac{P_0 DD}{P_0} + \frac{1}{2} \sigma_0^2 \frac{P_0 DDD^2}{P_0} + h_0 \frac{P_1 - P_0}{P_0} \right) dt + \sigma_0 \frac{P_0 DD}{P_0} dW + \frac{P_0 - P_1}{P_0} dN_0 \\ \frac{dP_1}{P_1} &= \left( \mu_2 \frac{P_1 DD}{P_1} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{P_1 DDD^2}{P_1} + h_1 \frac{P_0 - P_1}{P_1} \right) dt + \sigma_1 \frac{P_1 DD}{P_1} dW + \frac{P_1 - P_0}{P_1} dN_1 \end{aligned}$$

Y multiplicando el crecimiento del factor de descuento por el crecimiento de los precios, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{M_0} \frac{dP_0}{P_0} &= \left( -\lambda_0 dW - (\Gamma_0 - 1) dN_0 \right) \left( \sigma_0 \frac{P_0 DD}{P_0} dW + \frac{P_0 - P_1}{P_0} dN_0 \right) \\ \frac{dM_1}{M_1} \frac{dP_1}{P_1} &= \left( -\lambda_1 dW - (\Gamma_1 - 1) dN_1 \right) \left( \sigma_1 \frac{P_1 DD}{P_1} dW + \frac{P_1 - P_0}{P_1} dN_1 \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. (D.11), obtenemos las ecuaciones del exceso de retorno. Observa que estas ecuaciones son válidas independientemente de la existencia de burbujas:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(D_t) + D_t dt}{P_0(D_t)} - r^f dt &= \lambda_0 dW + (\Gamma_0 - 1) dN_0 + \left( \lambda_0 dW + (\Gamma_0 - 1) dN_0 \right) \left( \sigma_0 \frac{P_0 DD}{P_0} dW + \frac{P_0 - P_1}{P_0} dN_0 \right) \\ \frac{dP_1(D_t) + D_t dt}{P_1(D_t)} - r^f dt &= \lambda_1 dW + (\Gamma_1 - 1) dN_1 + \left( \lambda_1 dW + (\Gamma_1 - 1) dN_1 \right) \left( \sigma_1 \frac{P_1 DD}{P_1} dW + \frac{P_1 - P_0}{P_1} dN_1 \right) \end{aligned}$$

que se simplifica a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\frac{dP_0 + Ddt}{P_0} - r^f dt &= \gamma\sigma_0^2 \frac{P_{0D}D}{P_0} dt + (\Gamma_0 - 1)h_0 \frac{P_0 - P_1}{P_0} dt + \gamma\sigma_0 dW + (\Gamma_0 - 1)dN_0 \\ \frac{dP_1 + Ddt}{P_1} - r^f dt &= \gamma\sigma_1^2 \frac{P_{1D}D}{P_1} dt + (\Gamma_1 - 1)h_1 \frac{P_1 - P_0}{P_1} dt + \gamma\sigma_1 dW + (\Gamma_1 - 1)dN_1\end{aligned}$$

A partir de estas expresiones, podemos derivar convenientemente los primas de riesgo con o sin burbujas simplemente usando el precio apropiado. Por ejemplo, si los precios de las acciones solo reflejan fundamentos, entonces las ecuaciones de precios dependientes del estado y sus derivadas son:  $P_0 = k_0D$ ,  $P_{0D} = k_0$ ,  $P_1 = k_1D$ ,  $P_{1D} = k_1$ . Observa que  $dN_0^2 = h_0dt$ ,  $dN_1^2 = h_1dt$  y  $\lambda_i = \gamma\sigma_i$ . Esto nos lleva a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\frac{P_{0D}D}{P_0} &= 1 \\ \frac{P_{1D}D}{P_1} &= 1 \\ \frac{P_0 - P_1}{P_0} &= \frac{(k_0 - k_1)}{k_0} \\ \frac{P_1 - P_0}{P_1} &= \frac{(k_1 - k_0)}{k_1}\end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a las expresiones finales para los rendimientos excesivos de tenencia:

$$\begin{aligned}\frac{dP_0 + D_t dt}{P_0} - r^f dt &= \left( \gamma\sigma_0^2 + h_0(\Gamma_0 - 1) \frac{k_0 - k_1}{k_0} \right) dt + \gamma\sigma_0 dW + (\Gamma_0 - 1)dN_0 \\ \frac{dP_1 + D_t dt}{P_1} - r^f dt &= \left( \gamma\sigma_1^2 + h_1(\Gamma_1 - 1) \frac{k_1 - k_0}{k_1} \right) dt + \gamma\sigma_1 dW + (\Gamma_1 - 1)dN_1\end{aligned}$$

No hace falta decir que si la economía no está sujeta a cambios abruptos en el régimen, las expresiones anteriores se simplifican a:

$$\frac{dP + Ddt}{P} - r^f dt = \gamma\sigma^2 dt + \gamma\sigma dW$$

Para calcular los rendimientos excesivos de tenencia cuando hay cambios de régimen y burbujas intrínsecas, simplemente necesitamos sustituir en la Ec.(B.50) las ecuaciones relevantes que determinan la evolución de los precios de las acciones, es decir:  $P_0 = k_0D + a_{0,1}D^{\eta_1} + a_{0,2}D^{\eta_2}$ ,  $P_1 = k_1D + a_{1,1}D^{\eta_1} + a_{1,2}D^{\eta_2}$ ,  $P_{0D} = k_0 + \eta_1 a_{0,1}D^{\eta_1-1} + \eta_2 a_{0,2}D^{\eta_2-1}$  y  $P_{1D} = k_1 + \eta_1 a_{1,1}D^{\eta_1-1} + \eta_2 a_{1,2}D^{\eta_2-1}$ . Al utilizar estas expresiones para  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_{0D}$ ,  $P_{1D}$ ,

se obtienen trivialmente las ecuaciones para  $\frac{P_{0D}D}{P_0}$ ,  $\frac{P_{1D}D}{P_1}$ ,  $\frac{P_0-P_1}{P_0}$  y  $\frac{P_1-P_0}{P_1}$ :

$$\begin{aligned}\frac{P_{0D}D}{P_0} &= \frac{k_0D + \eta_1\alpha_{0,1}D^{\eta_1} + \eta_2\alpha_{0,2}D^{\eta_2}}{k_0D + \alpha_{0,1}D^{\eta_1} + \alpha_{0,2}D^{\eta_2}}, \\ \frac{P_{1D}D}{P_1} &= \frac{k_1D + \eta_1\alpha_{1,1}D^{\eta_1} + \eta_2\alpha_{1,2}D^{\eta_2}}{k_1D + \alpha_{1,1}D^{\eta_1} + \alpha_{1,2}D^{\eta_2}}, \\ \frac{P_0 - P_1}{P_0} &= \frac{(k_0 - k_1)D + (\alpha_{0,1} - \alpha_{1,1})D^{\eta_1} + (\alpha_{0,2} - \alpha_{1,2})D^{\eta_2}}{k_0D + \alpha_{0,1}D^{\eta_1} + \alpha_{0,2}D^{\eta_2}}, \\ \frac{P_1 - P_0}{P_1} &= \frac{(k_1 - k_0)D + (\alpha_{1,1} - \alpha_{0,1})D^{\eta_1} + (\alpha_{1,2} - \alpha_{0,2})D^{\eta_2}}{k_1D + \alpha_{1,1}D^{\eta_1} + \alpha_{1,2}D^{\eta_2}}.\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores de nuevo en la Ec.(14), se obtienen los siguientes rendimientos excesivos de tenencia:

$$\begin{aligned}\frac{dP_0 + Ddt}{P_0} - r^f dt &= \left( \frac{k_0D + \eta_1\alpha_{0,1}D^{\eta_1} + \eta_2\alpha_{0,2}D^{\eta_2}}{k_0D + \alpha_{0,1}D^{\eta_1} + \alpha_{0,2}D^{\eta_2}} \right) \gamma\sigma_1^2 dt \\ &\quad + h_0(\Gamma_0 - 1) \frac{(k_0 - k_1)D + (\alpha_{0,1} - \alpha_{1,1})D^{\eta_1} + (\alpha_{0,2} - \alpha_{1,2})D^{\eta_2}}{k_0D + \alpha_{0,1}D^{\eta_1} + \alpha_{0,2}D^{\eta_2}} dt \\ &\quad + \gamma\sigma_0 dW + (\Gamma_0 - 1) dN_0, \\ \frac{dP_1 + Ddt}{P_1} - r^f dt &= \left( \frac{k_1D + \eta_1\alpha_{1,1}D^{\eta_1} + \eta_2\alpha_{1,2}D^{\eta_2}}{k_1D + \alpha_{1,1}D^{\eta_1} + \alpha_{1,2}D^{\eta_2}} \right) \gamma\sigma_1^2 dt \\ &\quad + h_1(\Gamma_1 - 1) \frac{(k_1 - k_0)D + (\alpha_{1,1} - \alpha_{0,1})D^{\eta_1} + (\alpha_{1,2} - \alpha_{0,2})D^{\eta_2}}{k_1D + \alpha_{1,1}D^{\eta_1} + \alpha_{1,2}D^{\eta_2}} dt \\ &\quad + \gamma\sigma_1 dW + (\Gamma_1 - 1) dN_1.\end{aligned}$$

Cuando no hay cambios en el régimen, estas expresiones se simplifican a la expresión de un solo régimen:

$$\frac{dP + Ddt}{P} - r^f dt = \left( \frac{kD + \eta_1\alpha_1D^{\eta_1}}{kD + \alpha_1D^{\eta_1}} \right) \gamma\sigma^2 dt + \gamma\sigma dW.$$

## Appendix E Construcción de la verosimilitud para el modelo general

Estimamos el modelo de cambio de régimen utilizando procedimientos idénticos a los descritos en [Hamilton \(1989, 1994\)](#), excepto que en este caso, la razón precio-dividendo, la ecuación de dividendos, la tasa de interés real y los rendimientos de las acciones dependen del estado. También hay que tener en cuenta que  $k_0$  y  $k_1$  satisfacen el sistema descrito en (12). La solución del sistema para  $\phi_0$  y  $\phi_1$ , que es consistente con la teoría, solo puede

resolverse numéricamente. El programa llama a una subrutina que resuelve las ecuaciones relevantes numéricamente, por lo que cada búsqueda en línea cumple con las condiciones impuestas por el modelo. Escribimos la densidad de los datos  $y_t$  condicional al estado  $s_t$  y al historial del sistema como:

$$\begin{aligned}
P(y_t|s_t, y_{t-1}, \dots, y_1) &= \frac{1}{(2\pi)^5 \sigma_{s_t}} \exp\left(-(\sigma_{s_t}^2)^{-1} \left(\Delta \log(D_t) - \left[\mu(s_t) - \frac{\sigma^2(s_t)}{2}\right]\right)^2\right) \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^5 \sigma_a(s_t)} \exp\left(-(\sigma_a(s_t)^2)^{-1} \left(\frac{P_t}{D_t} - [k_{s_t} + c_{s_t} D_t^{\lambda-1}]\right)^2\right) \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^5 \sigma_b(s_t)} \exp\left(-(\sigma_b(s_t)^2)^{-1} \left(r_t^S - R(D_t, s_t)\right)^2\right) \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^5 \sigma_c(s_t)} \exp\left(-(\sigma_c(s_t)^2)^{-1} \left(r_t^F - r^f(s_t)\right)^2\right),
\end{aligned}$$

donde  $y_t$  es un vector de tamaño  $5 \times 1$  que contiene:  $\Delta \log(D_t)$ , la tasa de crecimiento de los dividendos;  $\frac{P_t}{D_t}$ , la ratio precio-dividendo observada;  $D_t$ , dividendos reales;  $r_t^F$ , la tasa de interés real ex-ante y  $r_t^S$ , los rendimientos observados de las acciones después del pago de dividendos. La verosimilitud se maximiza con respecto a  $(\delta, \phi, \gamma, p, q, \mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_{a,0}, \sigma_{a,1}, \mathbf{a}1, 0, \mathbf{a}1, 1, \mathbf{a}2, 0, \mathbf{a}2, 1, \sigma_{b,0}, \sigma_{b,1}, \sigma_{c,0}, \sigma_{c,1}, z_0, z_1)$ .

Observa que el sistema a resolver es homogéneo de grado uno en  $(z_0, z_1)$ . Por lo tanto, normalizamos  $z_0 = 1$  y dejamos  $z_1$  como un parámetro libre a estimar. Luego, utilizando que  $\Gamma_i = \frac{z_j^{1-\psi} \phi_j^{\psi-\gamma}}{z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma}}$  (y que establecemos un  $z_j$  igual a uno), podemos parametrizar el modelo en términos de  $\Gamma_i$ , ya que existe una correspondencia biunívoca entre el valor de  $\Gamma_i$  y el valor de  $z_i$  dados todos los demás parámetros.

El filtro realiza los siguientes cálculos en cada búsqueda en línea del algoritmo de optimización numérica (dado los valores de los parámetros).

1. Calcular  $h_0$  y  $h_1$  utilizando que  $h_0 = \frac{q}{1-q}$  y  $h_1 = \frac{p}{1-p}$ .
2. Obtener los valores de  $\phi_0$  y  $\phi_1$  que resuelven

$$\frac{\delta}{1-\psi} \left[ z_i^{1-\psi} \phi_i^{\psi-\gamma} - \phi_i^{1-\gamma} \right] + h_i \left[ \frac{\phi_j^{1-\gamma} - \phi_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] + \phi_i^{1-\gamma} \left[ \mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \gamma \right] = 0, \quad i = 0, 1, j \neq i$$

numéricamente. Esto nos da  $(\phi_0, \phi_1)$  como función de los parámetros restantes. Utiliza esos valores para calcular  $\Gamma_i$  utilizando la ecuación (B.46).

3. Utilizando los valores de  $h_i$  y  $\Gamma_i$  obtenidos en los pasos anteriores junto con los parámetros restantes, calculamos las cuatro raíces de la ecuación (B.54). Nos quedamos solo con las dos raíces positivas.
4. Utilizando la ecuación (12), obtenemos  $(k_0, k_1)$ . Utiliza la ecuación (B.47) para calcular  $r^f(s_t)$  y la ecuación (14) para obtener la función  $R(D, s)$ .