

Los determinantes del tipo de cambio real en el largo plazo

Pedro Ignacio Brusco Lladó

Supervisor: Juan Pablo Nicolini

Tesis Maestría en Economía

Departamento de Economía

Abstract

Partiendo de un modelo simple de economía internacional, que plantea una relación entre el crecimiento de la productividad relativa entre dos países y el tipo de cambio real bilateral, este trabajo intenta explorar los movimientos de baja frecuencia de esta última variable. Capturar correctamente los movimientos de largo plazo de dicha variable es muy importante a la hora de realizar análisis de los movimientos de corto plazo y de identificar sus determinantes. Dada la dificultad metodológica y la disponibilidad de datos de la productividad por sector, a lo largo de este trabajo se van a plantear distintas formas de aproximar el crecimiento de la productividad. A partir de distintos tests de cointegración vamos a evaluar esta relación en el largo plazo. También, vamos a evaluar el comportamiento de la tendencia del tipo de cambio real en distintas variantes de modelos de economía abierta.

Keywords – Real Exchange Rate, Productivity, GDP, Harrod-Balassa-Samuelson

Índice

1. Introducción	1
2. Modelo	3
2.1. Setting del modelo	3
2.2. Solución del tipo de cambio real	5
3. Datos	8
3.1. Análisis de tendencia de las series	10
3.1.1. Filtro de Hoddrick - Prescott	10
3.1.2. Filtro lineal	12
3.1.3. Filtro cuadrático	15
3.2. Orden de integración de los datos	20
3.2.1. Persistencia y volatilidad de los datos	21
4. Tests de Cointegración	22
4.1. Introducción	22
4.2. Test de Engle y Granger	22
4.2.1. Resultados del test	23
4.2.2. Vectores de cointegración	23
4.3. Test de Wright	26
4.3.1. Vectores de cointegración	27
4.4. Volatilidades post <i>detrending</i>	29
5. Simulaciones	30
5.1. Introducción	30
5.2. Modelo descentralizado	30
5.3. Modelo BKK con dotaciones	32
5.4. Modelo BKK con trabajo	35
5.5. Modelo BKK con capital y trabajo	37
6. Conclusión	41
Referencias	42
Apéndice	44
A1. Datos utilizados	44
A1.1. Tipo de cambio real	44
A1.2. PBI per cápita relativo a Estados Unidos	44
A1.3. TFP relativa a Estados Unidos	45
A2. Asignaciones de equilibrio	45
A3. Robustez de los tests de cointegración	49
A3.1. Test de Johansen	49
A3.2. Test de Gregory-Hansen	50
A4. Datos de la Productividad Total de los Factores	52

Índice de figuras

3.1. Tipo de cambio real con base 1 en 1960	8
5.1. Simulación simplificada	33
5.2. Simulación con dotaciones	35
5.3. Simulación con trabajo	36
5.4. Simulación con capital y trabajo	40
A3.1. Test de Gregory-Hansen - Japón	51
A3.2. Test de Gregory-Hansen - Reino Unido	51
A3.3. Test de Gregory-Hansen - Alemania	52

Índice de cuadros

3.1. Filtro lineal - Japón	13
3.2. Filtro lineal - Reino Unido	14
3.3. Filtro lineal - Alemania	15
3.4. Filtro cuadrático - Japón	16
3.5. Filtro cuadrático - Reino Unido	17
3.6. Filtro cuadrático - Alemania	18
3.7. P-values - Augmented Dickey-Fuller Test	21
3.8. Persistencia y volatilidad	21
4.1. P-values - Test de Engle y Granger	23
4.2. Vector de cointegración de Engle y Granger - Japón	24
4.3. Vector de cointegración de Engle y Granger - Reino Unido	25
4.4. Vector de cointegración de Engle y Granger - Alemania	26
4.5. Vector de cointegración de Wright	27
4.6. Segundos Momentos del TCR usando distintos filtros de la tendencia	29
A3.1. Test de Johansen - Japón	49
A3.2. Test de Johansen - Reino Unido	50
A3.3. Test de Johansen - Alemania	50
A4.1. P-values - Augmented Dickey-Fuller Test incluyendo TFP	54
A4.2. Persistencia y volatilidad incluyendo TFP	54
A4.3. P-values - Test de Engle y Granger	55
A4.4. Segundos Momentos del TCR usando distintos filtros de la tendencia	55

1. Introducción

La relación entre el tipo de cambio real y el crecimiento económico parece ser un hecho estilizado en la literatura. Desde los trabajos de Samuelson (1964) y de Balassa (1964), algunos autores como Irandoust y Sjöo (2002), entre otros, han buscado verificar empíricamente esta relación, encontrando poca evidencia que la sustente. Una de las explicaciones de esto puede ser la persistencia de los residuos de la relación entre ambas variables y, por lo tanto, el problema que esto genera en la eficiencia de los tests de raíz unitaria. Por otro lado, otros autores, como Rodrik (2008) han investigado si hay un canal de causalidad del tipo de cambio real hacia el crecimiento económico, el cual no va a ser explorado en este trabajo, pero tendría implicancias relevantes en caso de existir.

Es importante destacar que las causas de la volatilidad del tipo de cambio real en el corto plazo están sujetas a mayor discusión y muchos trabajos han investigado este tópico con mayor profundidad, como Ayres, Hevia y Nicolini (2019). Por ello, tener una metodología adecuada para eliminar los movimientos de baja frecuencia de esta variable puede evitar llevar a conclusiones equivocadas a la hora de entender el origen de la volatilidad del tipo de cambio real y sus movimientos de alta frecuencia.

Los modelos a utilizar para expresar los movimientos de largo plazo del tipo de cambio real van a ser aquellos con múltiples sectores, con bienes intermedios y/o primarios transables y donde hay un bien final no transable, cuyo ratio de precios es el que define el tipo de cambio real.

En la sección 2 vamos a desarrollar el modelo utilizado en la mayor parte del trabajo, el cual consiste en un modelo simple de equilibrio general con 3 países en donde los hogares consumen un bien final no transable y donde tenemos 3 sectores productivos: bienes finales no transables, bienes intermedios transables y bienes primarios transables. Partiendo del supuesto de que en largo plazo la productividad es la única variable que no es constante, vamos a investigar la relación establecida en este modelo.

En la sección 3 vamos a presentar las principales características de los datos con

los que vamos a trabajar y las propiedades de integración.

En la cuarta sección vamos a presentar y discutir los resultados de distintos tests de cointegración para los datos utilizados.

Por último, en la sección 5, vamos a simular distintos senderos del tipo de cambio real en base a los modelos de *International Real Business Cycles*, iniciados por Backus, Kehoe y Kydland (1992).

2. Modelo

El modelo a desarrollar es similar al modelo desarrollado en Nicolini, Hevia y Ayres (2019). Este modelo se caracteriza por dos países y el resto del mundo¹, y por tener un sector de bienes finales no transables, un sector de bienes intermedios transables y bienes primarios transables. Este *setting* nos va a permitir expresar al tipo de cambio real bilateral entre dos países como una función de la productividad de ambos y de los precios de los bienes intermedios y commodities.

Las tecnologías de producción utilizadas van a ser Cobb-Douglas. Esto nos va a permitir obtener una relación lineal en logaritmos entre el tipo de cambio real y la productividad con coeficientes constantes, que va a prevalecer en el equilibrio de esta economía. A pesar de que estos supuestos pueden evitar que capturemos ciertos cambios estructurales en los sectores productivos, nos permiten expresar de manera suficientemente clara el comportamiento de largo plazo de las variables que nos interesan.

2.1. Setting del modelo

En este modelo el tiempo es discreto y va a estar indexado por $t = 0, 1, 2, \dots$. Vamos a tener una oferta inelástica de las dotaciones fijas de trabajo y de las dotaciones fijas de “recursos naturales” en los países 1 y 2, mientras que en el país 3 vamos a tener una oferta inelástica de dotaciones fijas de trabajo y dotaciones estocásticas de “recursos naturales”, lo cual no va a tener implicancias para nuestro análisis porque va a generar únicamente movimientos de corto plazo.

Otra de las simplificaciones de este modelo va a ser que inicialmente nos vamos a abstraer de la acumulación de capital y vamos a asumir que la balanza comercial está equilibrada. La implicancia más importante va a ser que las preferencias no van a jugar ningún rol en la determinación del tipo de cambio real.

El país $i = 1, 2$ produce un bien final no transable, Y_t^i , usando trabajo y dos

¹En el trabajo de Nicolini, Hevia y Ayres (2019) se utiliza a la tercer economía (resto del mundo) para generar shocks de exceso de demanda de commodities, lo cual en nuestro caso no va a tener relevancia.

bienes intermedios transables, uno de los cuales se produce en el país 1: Q_t^1 , y el otro en el país 2: Q_t^2 . La tecnología para producir el bien intermedio Q_t^i se compone de trabajo y tres bienes primarios. El país i produce dos de los tres bienes primarios, X_t^i y $X_{3,t}^i$, usando trabajo y dotaciones de un recurso natural (que es específico para cada bien primario). Cabe destacar que el supraíndice i indica el país y el subíndice t indica el tiempo. Para los bienes primarios el subíndice i indica el tipo de commodity.

Las funciones de producción de cada sector son las siguientes:

$$\begin{aligned} Y_t^i &= Z_t^i (q_{1,t}^i)^{\alpha_1^i} (q_{2,t}^i)^{\alpha_2^i} (n_{y,t}^i)^{\alpha_3^i} \\ Q_t^i &= Z_t^i (x_{1,t}^i)^{\beta_1^i} (x_{2,t}^i)^{\beta_2^i} (x_{3,t}^i)^{\beta_3^i} (n_{Q,t}^i)^{\beta_4^i} \\ X_{i,t}^i &= Z_t^i (e_{i,t}^i)^{1-\phi_i^i} (n_{X_{i,t}^i}^i)^{\phi_i^i} \\ X_{3,t}^i &= Z_t^i (e_{3,t}^i)^{1-\phi_3^i} (n_{X_{3,t}^i}^i)^{\phi_3^i} \end{aligned}$$

Donde Z_t^i denota la productividad total de los factores del país i . Es importante resaltar que estamos asumiendo la misma productividad para todos los sectores. $q_{1,t}^i$ y $q_{2,t}^i$ son los bienes intermedios que se utilizan como insumos en la producción del bien final; $x_{j,t}^i$ para $j = 1, 2, 3$ son los bienes primarios utilizados como insumos en la producción de bienes intermedios; $n_{y,t}^i$, $n_{q,t}^i$, $n_{x_i,t}^i$ son las horas de trabajo utilizadas en cada sector; $e_{1,t}^i$, $e_{3,t}^i$ son las dotaciones de recursos naturales utilizadas en la producción de cada commodity. Todas las funciones de producción tienen retornos constantes a escala.

Siguiendo al setting de Nicolini, Hevia y Ayres (2019), el país 3 tiene una estructura productiva más simple, en la cual recibe una dotación estocástica de los tres bienes primarios $X_{1,t}^3$, $X_{3,t}^3$, $X_{3,t}^3$, y produce un bien final no transable a partir de dichos commodities con la siguiente tecnología:

$$Y_t^3 = (x_{1,t}^3)^{\pi_1} (x_{2,t}^3)^{\pi_2} (x_{3,t}^3)^{\pi_3} (n_{y,t}^3)^{\pi_4}$$

donde $\pi_i > 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$, y $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$

Por último, vamos a definir los siguientes procesos AR(1), que van a ser muy

importantes a la hora de realizar las simulaciones y los análisis de cointegración, ya que va a justificar que dejemos de lado los movimientos de los commodities y bienes intermedios a la hora de entender los movimientos de largo plazo del tipo de cambio real:

$$\ln X_{1,t}^3 = (1 - \rho^{x_1^3}) \ln X_1^3 + \rho^{x_1^3} \ln X_{1,t-1}^3 + \epsilon_t^{x_1}$$

$$\ln X_{2,t}^3 = (1 - \rho^{x_2^3}) \ln X_2^3 + \rho^{x_2^3} \ln X_{2,t-1}^3 + \epsilon_t^{x_2}$$

$$\ln X_{3,t}^3 = (1 - \rho^{x_3^3}) \ln X_3^3 + \rho^{x_3^3} \ln X_{3,t-1}^3 + \epsilon_t^{x_3}$$

donde el vector de innovaciones $[\epsilon_t^{x_1}, \epsilon_t^{x_2}, \epsilon_t^{x_3}]$ tiene una distribución normal con media cero y una matriz de covarianzas.

2.2. Solución del tipo de cambio real

A su vez, la solución para el tipo de cambio real es la desarrollada en Nicolini, Hevia y Ayres (2019), por lo que un análisis más correcto y detallado se puede encontrar en dicho trabajo. Notemos que, dado que asumimos una balanza comercial equilibrada, la solución del equilibrio consiste en resolver un problema estático. Normalizamos $P_t^{x_3} = 1$ y resolvemos los problemas de cada una de las firmas. Para encontrar el equilibrio vamos a resolver el problema de las firmas de cada sector dados los precios del resto de los sectores (para ver el procedimiento de la solución de los precios y dotaciones de equilibrio ver el apéndice A2).

Dadas las funciones de producción Cobb-Douglas y el supuesto de competencia perfecta, la expresión para los precios que surge del problema de minimización de costos las firmas es el siguiente:

$$P_t^{y1} = \frac{1}{Z_t^1} \left(\frac{P_t^{q1}}{\alpha_1^1} \right)^{\alpha_1^1} \left(\frac{P_t^{q2}}{\alpha_2^1} \right)^{\alpha_2^1} \left(\frac{W_t^1}{\alpha_3^1} \right)^{\alpha_3^1} \quad (2.1)$$

$$P_t^{y2} = \frac{1}{Z_t^2} \left(\frac{P_t^{q1}}{\alpha_1^2} \right)^{\alpha_1^2} \left(\frac{P_t^{q2}}{\alpha_2^2} \right)^{\alpha_2^2} \left(\frac{W_t^1}{\alpha_3^2} \right)^{\alpha_3^2} \quad (2.2)$$

$$P_t^{q1} = \frac{1}{Z_t^1} \left(\frac{P_t^{x1}}{\beta_1^1} \right)^{\beta_1^1} \left(\frac{P_t^{x2}}{\beta_2^1} \right)^{\beta_2^1} \left(\frac{P_t^{x3}}{\beta_3^1} \right)^{\beta_3^1} \left(\frac{W_t^1}{\beta_4^1} \right)^{\beta_4^1} \quad (2.3)$$

$$P_t^{q2} = \frac{1}{Z_t^2} \left(\frac{P_t^{x2}}{\beta_1^2} \right)^{\beta_1^2} \left(\frac{P_t^{x2}}{\beta_2^2} \right)^{\beta_2^2} \left(\frac{P_t^{x3}}{\beta_3^2} \right)^{\beta_3^2} \left(\frac{W_t^1}{\beta_4^2} \right)^{\beta_4^2} \quad (2.4)$$

$$P_t^{x1} = \frac{1}{Z_t^1} \left(\frac{P_t^{e1}}{1 - \phi_1^1} \right)^{1 - \phi_1^1} \left(\frac{W_t^1}{\phi_1^1} \right)^{\phi_1^1} \quad (2.5)$$

$$P_t^{x2} = \frac{1}{Z_t^2} \left(\frac{P_t^{e2}}{1 - \phi_2^2} \right)^{1 - \phi_2^2} \left(\frac{W_t^2}{\phi_2^2} \right)^{\phi_2^2} \quad (2.6)$$

$$P_t^{x3} = \left(\frac{P_t^{e3}}{1 - \phi_3^1} \right)^{1 - \phi_3^1} \left(\frac{W_t^1}{\phi_3^1} \right)^{\phi_3^1} \quad (2.7)$$

$$P_t^{x3} = \left(\frac{P_t^{e3}}{1 - \phi_3^2} \right)^{1 - \phi_3^2} \left(\frac{W_t^2}{\phi_3^2} \right)^{\phi_3^2} \quad (2.8)$$

$$P_t^{x3} = \left(\frac{P_t^{e3}}{1 - \phi_3^3} \right)^{1 - \phi_3^3} \left(\frac{W_t^3}{\phi_3^3} \right)^{\phi_3^3} \quad (2.9)$$

El tipo de cambio real bilateral lo vamos a definir como $\left(\frac{P_t^{y1} E_t^{1,2}}{P_t^{y2}} \right)$, donde $E_t^{1,2}$ es el tipo de cambio nominal, que transforma las unidades de cuenta del país 1 a las unidades de cuenta del país 2. Llamemos ξ_t al logaritmo del tipo de cambio real. Combinando las ecuaciones 2.1 y 2.2 nos queda:

$$\xi_t = z_t^2 - z_t^1 + (\alpha_1^1 - \alpha_1^2)p_t^{q1} + (\alpha_2^1 - \alpha_2^2)p_t^{q2} + \alpha_3^1 w_t^1 - \alpha_3^2 w_t^2 \quad (2.10)$$

donde las variables en minúscula representan el logaritmos de dichas variables.

Reemplazando por las ecuaciones 2.3 y 2.4 nos queda la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \xi_t = & (1 - (\alpha_2^1 - \alpha_2^2)) z_t^2 - (1 - (\alpha_1^1 - \alpha_1^2)) z_t^1 + ((\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_1^1 + (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)\beta_1^2) p_t^{x_1} \\ & + ((\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_2^1 + (\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_2^2) p_t^{x_2} + ((\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_3^1 + (\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_3^2) p_t^{x_3} \\ & + ((\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_4^1 + \alpha_3^1) w_t^1 + ((\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_4^2 + \alpha_3^2) w_t^2 \quad (2.11) \end{aligned}$$

Por último, reemplazando las ecuaciones 2.5, 2.6 y 2.7, nos queda el tipo de cambio real expresado en función de la productividad, el precio de los commodities y el precio de los recursos naturales:

$$\begin{aligned} \xi_t = & \left(1 - (\alpha_2^1 - \alpha_2^2) + \frac{(\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_4^2 - \alpha_3^2}{\phi_2^2}\right) z_t^2 - \left(1 + (\alpha_1^1 - \alpha_1^2) - \frac{(\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_4^1 + \alpha_3^1}{\phi_1^1}\right) z_t^1 \\ & - \frac{1 - \phi_1^1}{\phi_1^1} ((\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_4^2 + \alpha_3^1) p_t^{e_1} - \frac{1 - \phi_2^2}{\phi_2^2} ((\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_4^2 + \alpha_3^2) p_t^{e_2} \\ & + \left((\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_1^1 + (\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_1^2 + \frac{(\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_4^1 + \alpha_3^1}{\phi_1^1}\right) p_t^{x_1} + \left((\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_2^1 + (\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_2^2 + \frac{(\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_4^2 + \alpha_3^2}{\phi_2^2}\right) p_t^{x_2} \\ & + ((\alpha_1^1 - \alpha_1^2)\beta_3^1 + (\alpha_2^1 - \alpha_2^2)\beta_3^2) p_t^{x_3} \quad (2.12) \end{aligned}$$

Por último, asumiendo simetría en las estructuras productivas de ambos países, tenemos que: $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = \alpha_1$, $\alpha_2^1 = \alpha_2^2 = \alpha_2$, $\alpha_3^1 = \alpha_3^2 = \alpha_3$, $\beta_4^1 = \beta_4^2 = \beta_4$, y $\phi_1^1 = \phi_2^2 = \phi$. Si asumimos que los precios de los commodities y los recursos naturales son estacionarios, nos queda la siguiente expresión para el tipo de cambio real de largo plazo, cuyos movimientos de baja frecuencia vamos a tratar de indentificar en este trabajo:

$$\xi_t = \delta_z (z_t^2 - z_t^1) + \epsilon_t \quad (2.13)$$

donde $\delta_z = \left(1 - \frac{\alpha_3}{\phi}\right)$ y ϵ_t representa las fluctuaciones generadas por los movimientos de los precios de los commodities y recursos naturales.

En resumen, el desarrollo del modelo presentado en esta sección es para encontrar una expresión del tipo de cambio real y poder enfocarnos en realizar una estimación razonable δ_z .

3. Datos

En este trabajo vamos a utilizar los datos de productividad, índice de precios, tipo de cambio nominal y PBI per cápita de la FRED de St. Louis. En el Apéndice A1 se puede encontrar una descripción más detallada de los datos.

Vamos a definir como medida del tipo de cambio real al ratio del índice de precios entre Estados Unidos y el país que queremos analizar, multiplicado por el tipo de cambio de nominal entre el dólar estadounidense y la moneda de dicho país.

Adicionalmente, vamos a mostrar los resultados del mismo análisis usando datos de la productividad total de los factores. Sin embargo, debido a la calidad de los datos preferimos incluirlos en el Apéndice A4.

A modo de introducción, en la Figura 3.1 presentamos la evolución del tipo de cambio real desde 1960 para los tres países en los cuales vamos a focalizar nuestro trabajo.

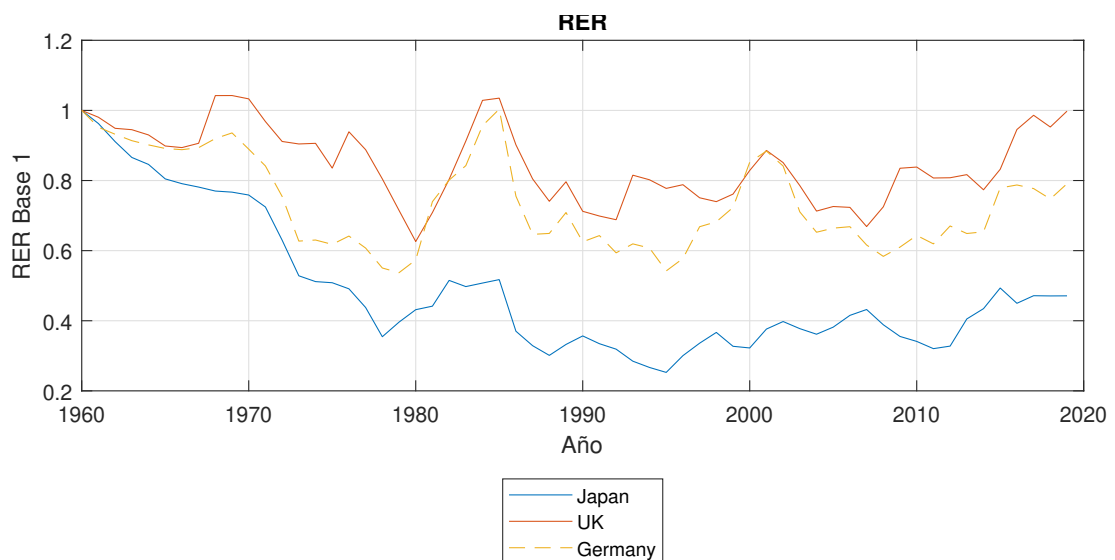
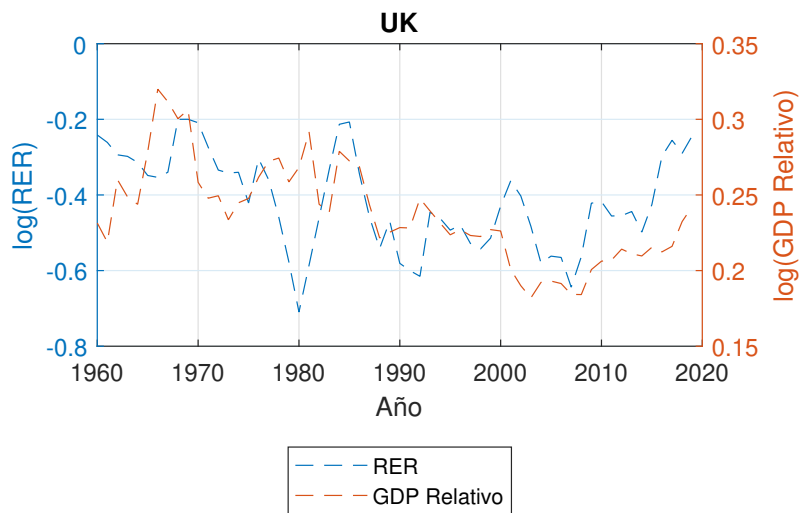
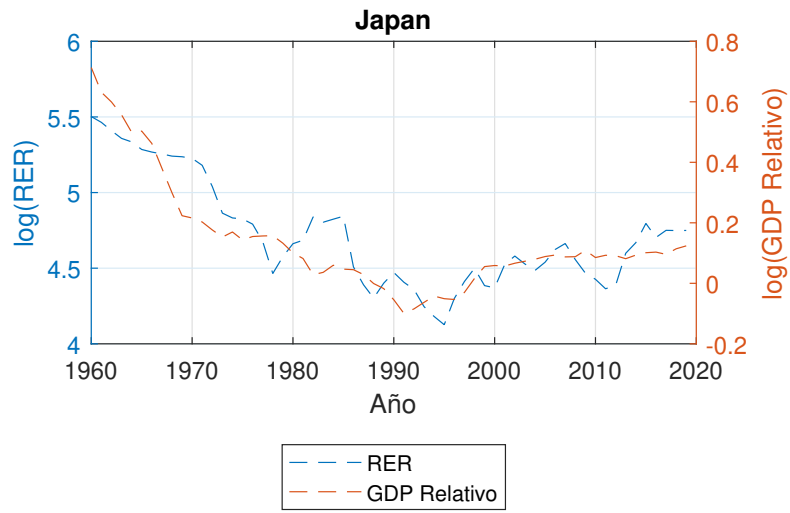
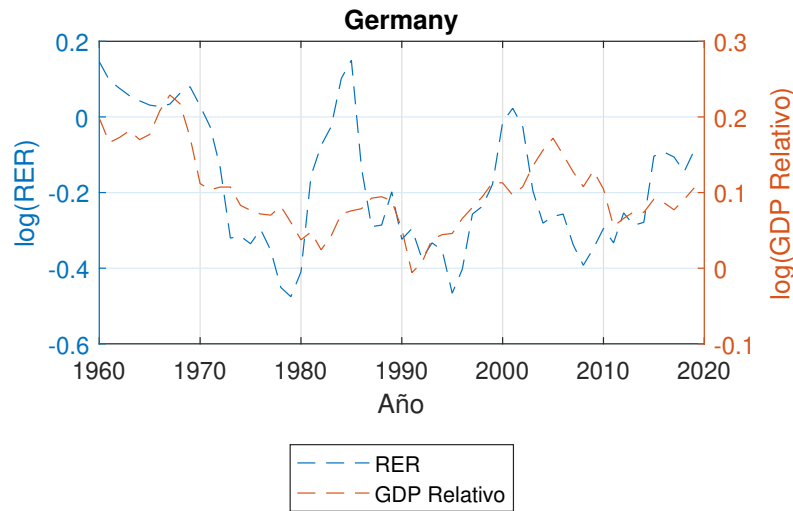


Figura 3.1: Tipo de cambio real con base 1 en 1960

Nuestro enfoque va a consistir, en un primer caso, en utilizar al logaritmo del ratio del PBI per capita entre USA y el país i como proxy de la productividad. En las siguientes figuras se puede ver la evolución de ambas variables.





3.1. Análisis de tendencia de las series

Al momento de realizar análisis de la volatilidad del tipo de cambio real, el método más usual para eliminar la tendencia es, justamente, estimar la tendencia estadística temporal de dichos datos. En esta sección vamos a presentar los resultados de los distintos filtros aplicados a las series de tipo de cambio real.

Dichos resultados luego los vamos a comparar con los tests de cointegración y simulaciones que vamos a realizar, evaluando la volatilidad resultante de aplicar esta serie de filtros de la tendencia.

3.1.1. Filtro de Hodrick - Prescott

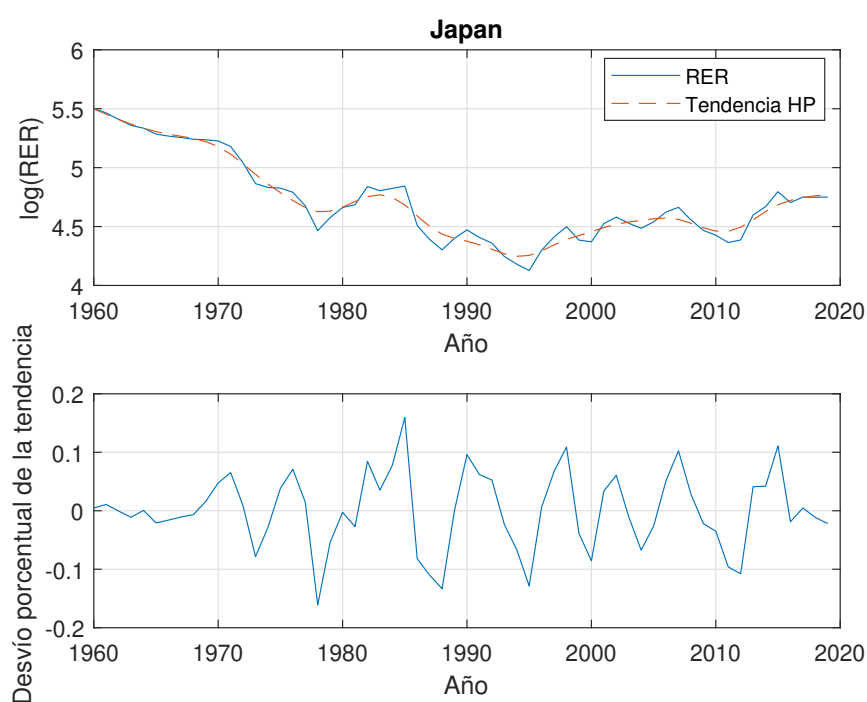
Aquí vamos a evaluar los resultados de aplicar el filtro de Hodrick-Prescott para quitar la tendencia del tipo de cambio real bilateral entre USA y los tres países ya mencionados.

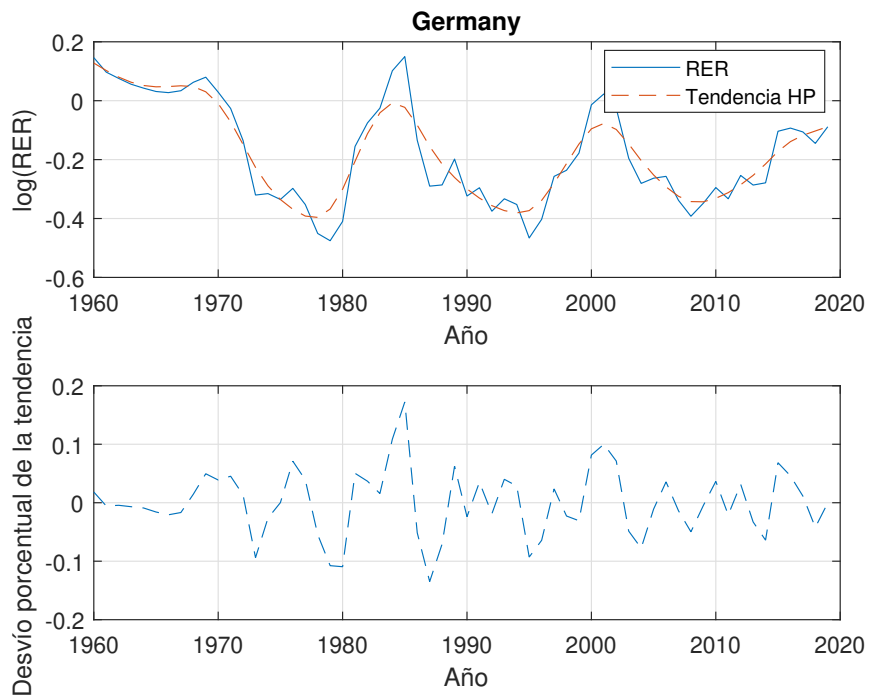
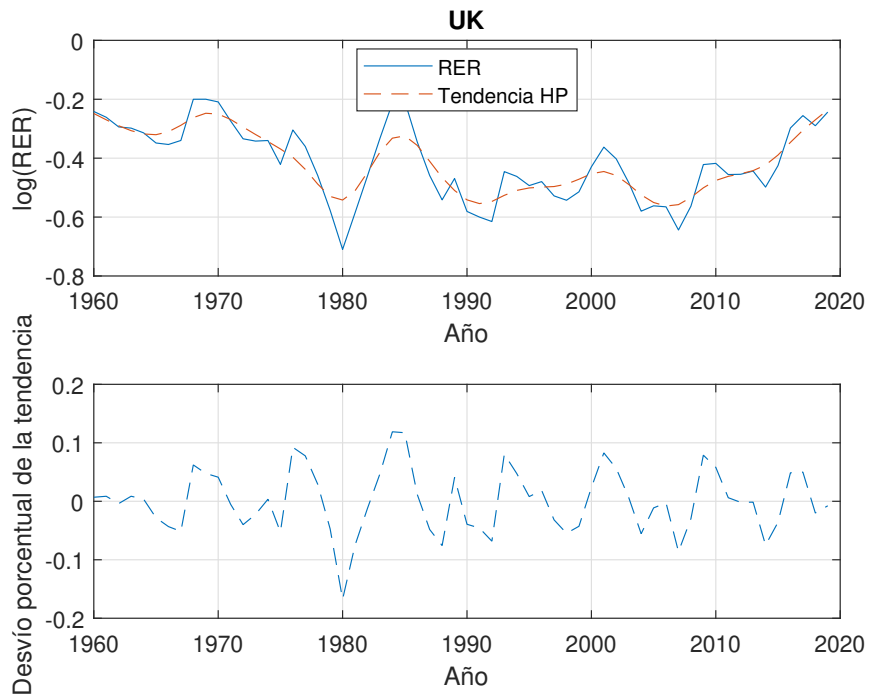
Recordando que el problema a resolver para estimar los componentes de la tendencia es el

siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{mín} \sum_{t=1}^T (\xi_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \\ & \text{sujeto a: } \sum_{t=1}^T (\xi_t - \tau_t) = 0 \end{aligned}$$

donde recordemos que ξ_t es el tipo de cambio real τ_t es la tendencia. Dado que estamos usando datos anuales, siguiendo a Ravn y Uhlig (2002) elegimos un valor de $\lambda = 6,25$. A continuación presentamos los resultados para cada una de las series:





3.1.2. Filtro lineal

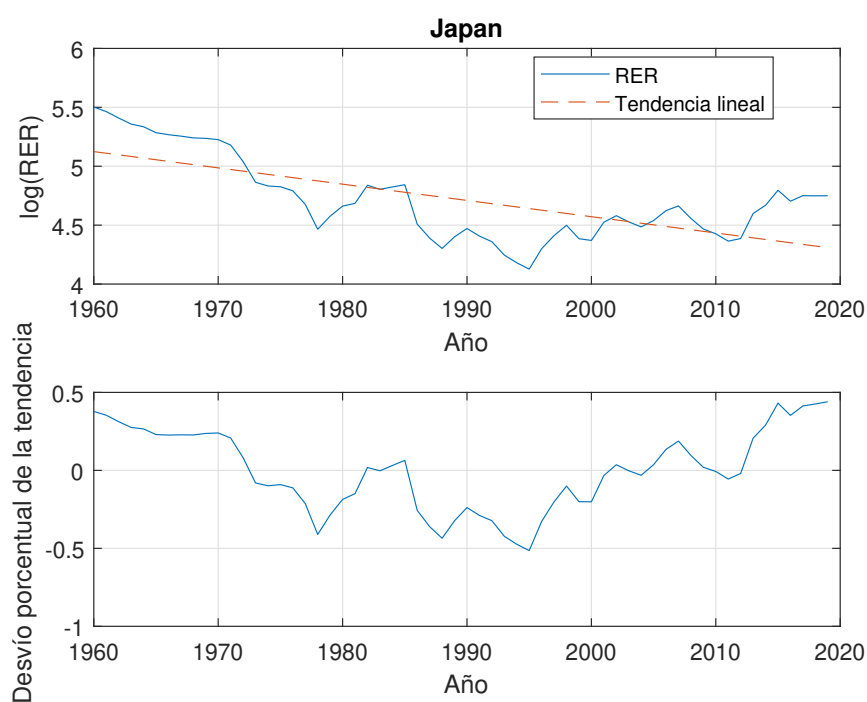
Para estimar el filtro lineal realizamos la siguiente regresión OLS:

$$\log(\text{RER}_{i,t}) = \alpha + \beta t + \epsilon_t$$

donde i es el país y t es el tiempo.

Japón

$$\log(RER_{t,Jap}) = 5,14 - 0,014t + \epsilon_t$$

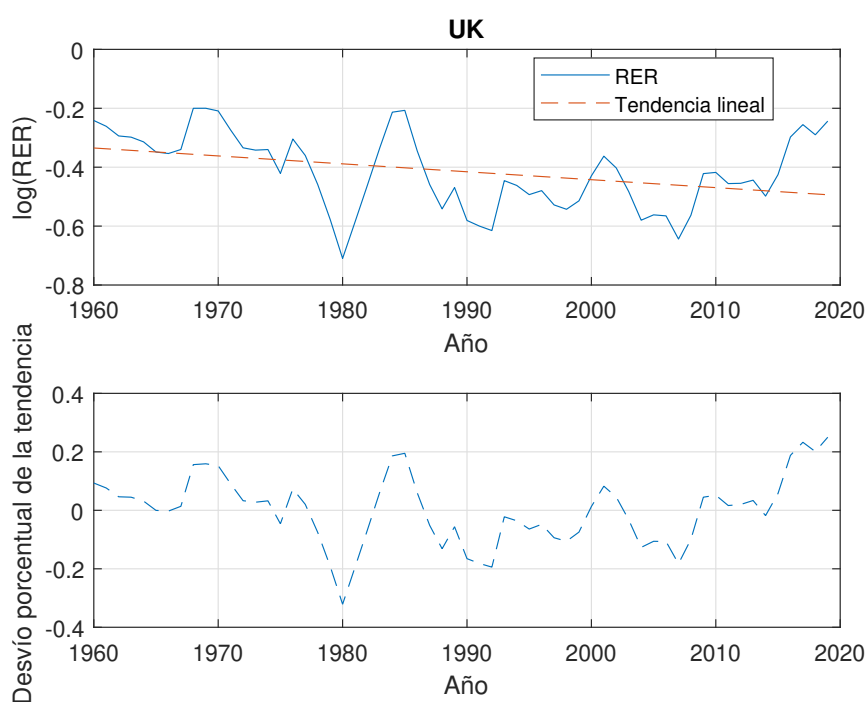


Cuadro 3.1: Filtro lineal - Japón

	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	5,1381	0,068	75,078	0,000	5,001	5,275
t	-0,0138	0,002	-7,079	0,000	-0,018	-0,10

Reino Unido

$$\log(RER_{t,UK}) = -0,33 - 0,003t + \epsilon_t$$

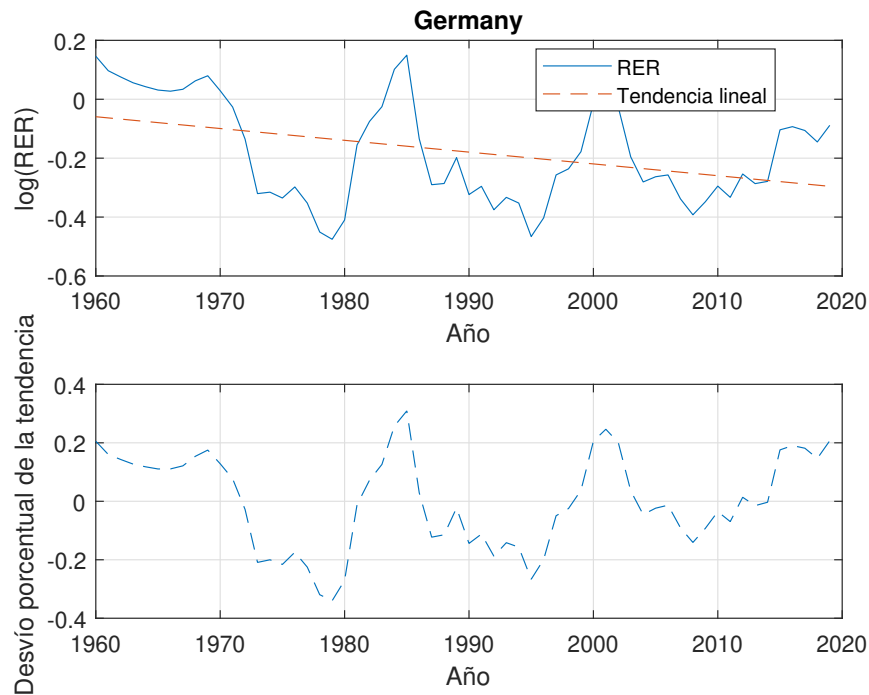


Cuadro 3.2: Filtro lineal - Reino Unido

	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	-0,3321	0,031	-10,622	0,000	-0,395	-0,270
t	-0,0027	0,001	-3,018	0,004	-0,004	-0,001

Alemania

$$\log(RER_{t,Ger}) = -0,0553 - 0,004t + \epsilon_t$$



Cuadro 3.3: Filtro lineal - Alemania

	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	-0,0553	0,043	-1,301	0,199	-0,140	0,030
t	-0,0040	0,001	-3,304	0,002	-0,006	-0,002

3.1.3. Filtro cuadrático

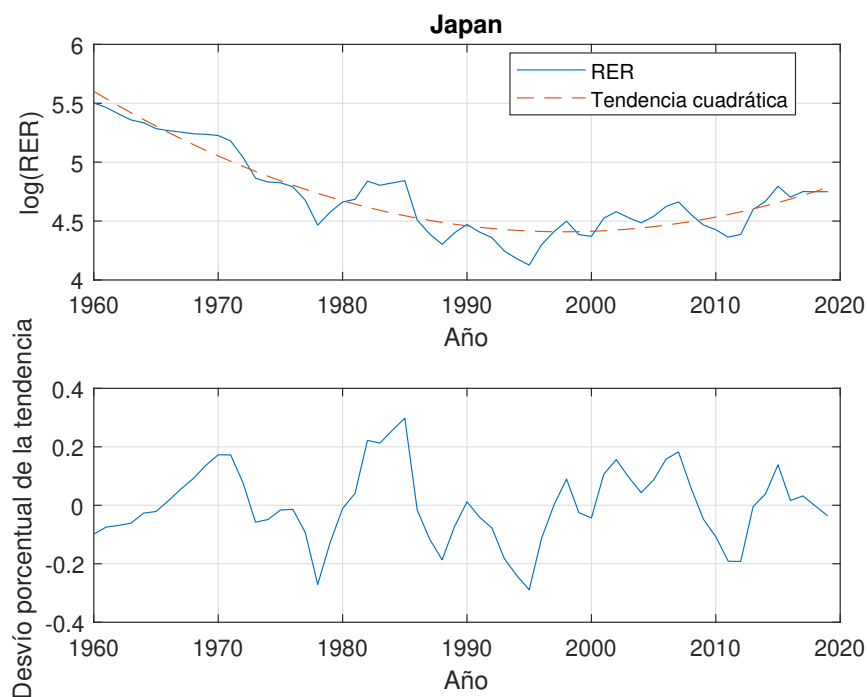
Para estimar el filtro cuadrático realizamos la siguiente regresión OLS:

$$\log(\text{RER}_{i,t}) = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \epsilon_t$$

donde i es el país y t es el tiempo.

Japón

$$\log(\text{RER}_{t,\text{Jap}}) = 5,665 - 0,0648t + 0,0008t^2 + \epsilon_t$$

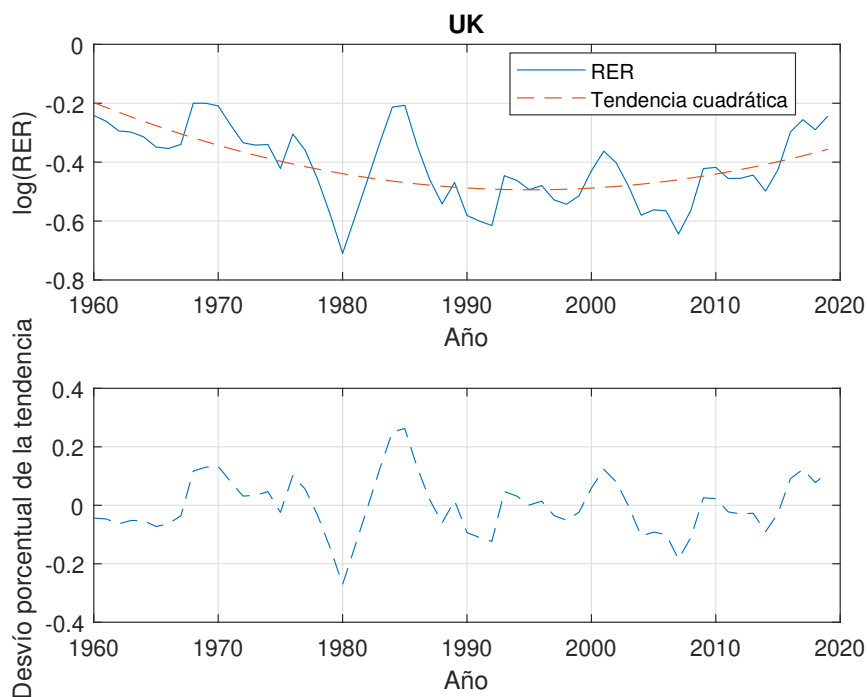


Cuadro 3.4: Filtro cuadrático - Japón

	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	5,6645	0,052	108,864	0,000	5,561	5,769
t	-0,0648	0,004	-16,459	0,000	-0,073	-0,57
t^2	0,0008	0,00006	-13,360	0,000	0,001	0,001

Reino Unido

$$\log(\text{RER}_{t,UK}) = -0,1805 - 0,0174t + 0,0002t^2 + \epsilon_t$$

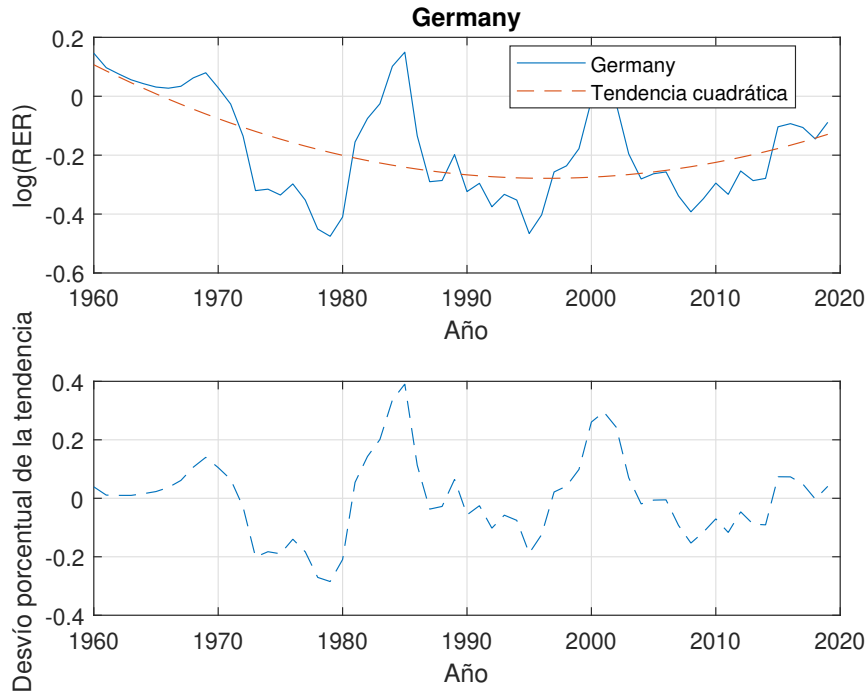


Cuadro 3.5: Filtro cuadrático - Reino Unido

	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	-0,1805	0,040	-4,468	0,000	-0,261	-0,100
t	-0,0174	0,003	-5,680	0,000	-0,023	-0,011
t^2	0,0002	0,00005	4,952	0,000	0,000	0,000

Alemania

$$\log(\text{RER}_{t, \text{Ger}}) = 0,1285 - 0,0218t + 0,0003t^2 + \epsilon_t$$



Cuadro 3.6: Filtro cuadrático - Alemania

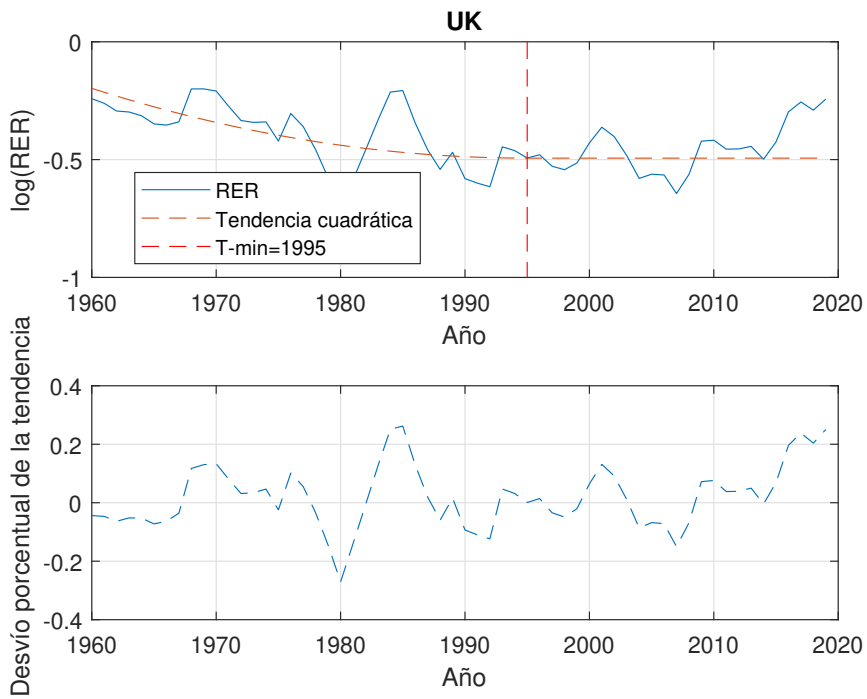
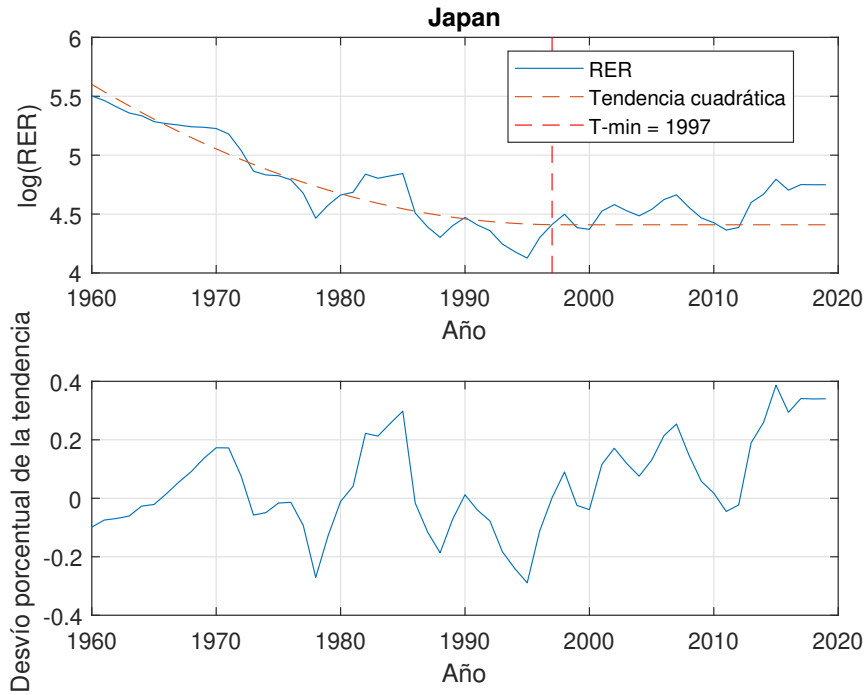
	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	0,1285	0,057	2,242	0,029	0,014	0,243
t	-0,0218	0,004	-5,026	0,002	-0,030	-0,013

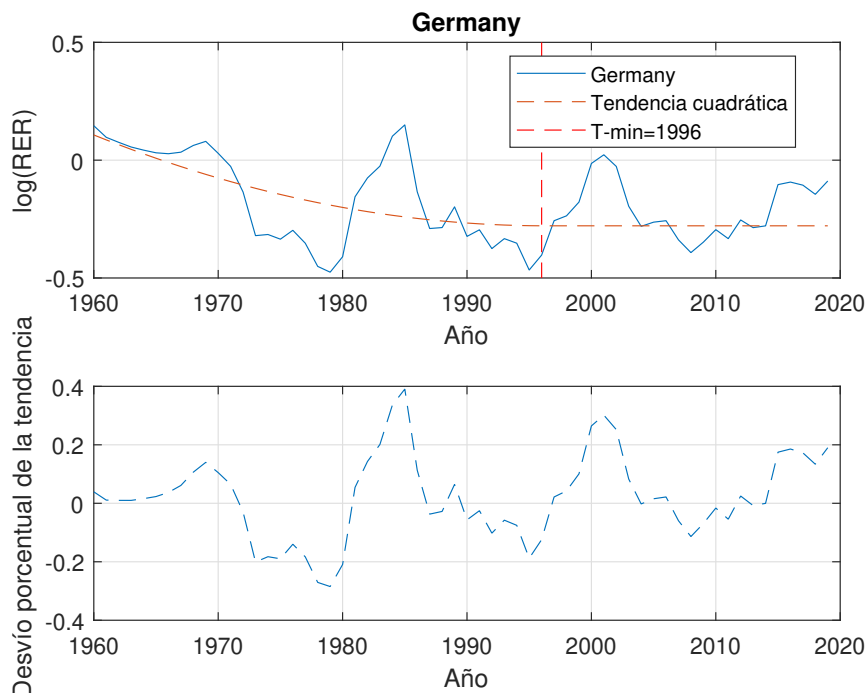
Filtro cuadrático con TCR constante en T

Por último, presentamos gráficamente la evolución de las series usando el resultado de la regresión contra la tendencia cuadrática, pero dejando constante el TCR en el valor del período (T) donde la tendencia cuadrática se hace igual a cero². La ecuación que caracteriza este filtro es la siguiente:

$$\ln(\text{RER}_{i,t}) = \begin{cases} \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 & \text{si } t \leq T \\ \alpha + \beta_1 T + \beta_2 T^2 & \text{si } t > T \end{cases}$$

²Se evaluaron otras metodologías para hacer este análisis, pero definían un período de “TCR constante” que comenzaba muy próximo al año donde comienza la serie.





3.2. Orden de integración de los datos

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos principales es identificar las relaciones de cointegración entre el tipo de cambio real y la productividad, es importante que investiguemos cuál es el orden de integración de nuestros datos, ya que ello va a estar íntimamente relacionado con la validez de los tests de cointegración.

En primer lugar, cabe mencionar que una condición necesaria para aplicar los métodos usuales de cointegración es que todas las series tengan una raíz unitaria. En este caso, vamos a ver que no parece haber suficiente evidencia de que todas las series cumplan con esta condición, lo cual va a motivar la utilización de otros métodos de cointegración.

En segundo lugar, hay que remarcar que las variables trabajadas están caracterizadas por ser muy persistentes. Dicha característica puede generar problemas en la potencia de los test de raíz unitaria, a la hora identificar si se trata de series no estacionarias o de series con mucha persistencia. En la Tabla A4.1 presentamos los resultados del test de Dickey-Fuller para las 3 variables de interés:

Cuadro 3.7: P-values - Augmented Dickey-Fuller Test

Serie	País	sin constante y sin tendencia	con constante y sin tendencia	con constante y con tendencia	con constante y tendencia cuadrática
$\ln RER_{i,t}$	Japón	0,3467	0,16066	0,71996	0,0177**
	Reino Unido	0,3281	0,0121**	0,05915	0,00585***
	Alemania	0,0551	0,01578**	0,06352	0,003626***
$\ln \frac{GDP_{US,t}}{GDP_{i,t}}$	Japón	0,0008***	0,0175**	0,4763	0,84395
	Reino Unido	0,5425	0,2822	0,1331	0,3489
	Alemania	0,1546	0,1605	0,6369	0,7388

Podemos ver que los tests realizados no son concluyentes en relación a si existe raíz unitaria en las series con las cuales estaremos trabajando. Adicionalmente, sabemos que al tener series muy persistentes, la validez de los test de raíz unitaria es menor, por lo que en la siguiente subsección presentamos datos de la persistencia de las variables.

De todos modos, podemos ver que en los casos en que incluimos constante y tendencia no rechazamos la hipótesis nula de raíz unitaria, considerando un nivel de significatividad del 5%, para ninguna de las series. Lo cual nos permitiría aplicar los tests de cointegración mas utilizados, como Johansen (1991) y Engle y Granger (1987), entre otros.

3.2.1. Persistencia y volatilidad de los datos

En la siguiente tabla presentamos la volatilidad y la persistencia de las series sin aplicar ningún tipo de filtro:

Cuadro 3.8: Persistencia y volatilidad

Serie	País	Volatilidad (σ_x)	Persistencia (ρ_x)
$\ln RER_{i,t}$	Japón	0,3543	0,9210
	Reino Unido	0,1275	0,8161
	Alemania	0,1757	0,8426
$\ln \frac{GDP_{US,t}}{GDP_{i,t}}$	Japón	0,1811	0,9008
	Reino Unido	0,0327	0,8677
	Alemania	0,0520	0,8849

Podemos ver que la persistencia es muy alta, tanto para el tipo de cambio real como para el PBI per cápita relativo a Estados Unidos.

4. Tests de Cointegración

4.1. Introducción

En esta sección vamos a presentar dos tests de cointegración con el objetivo de detectar si hay cointegración entre el tipo de cambio real y el PBI per cápita.

Antes de presentar los tests es importante aclarar que, al igual que en la sección anterior, si las series presentan mucha persistencia, la potencia de los tests de cointegración y de raíz unitaria es menor. Recordemos que justamente un test de cointegración consiste en gran parte en evaluar si los residuos de una relación de cointegración son estacionarios. Por ello, si estos residuos son muy persistentes, existirán mayores dificultades a la hora de detectar la cointegración (tendremos mayores probabilidades de cometer un error de tipo II).

Adicionalmente, el hecho de trabajar con muestras relativamente pequeñas (dado que estamos trabajando con series macro) agrega dificultad para sacar conclusiones de este tipo de tests.

Por último, a modo de robustez, en el Apéndice A3 se muestran otros tests de cointegración realizados.

4.2. Test de Engle y Granger

El test elaborado por Engle y Granger (1987) es usualmente utilizado para detectar cointegración, especialmente en los casos en los que hay solo dos variables. Además, creemos que es un test relativamente simple como para mostrar la intuición de los resultados que presentaremos.

Es importante resaltar que no tenemos total certidumbre de que las series con las que estamos trabajando estén integradas de orden uno, por lo cual, va a ser necesario

complementar estos resultados con otros tests alternativos que definen como hipótesis nula la existencia de cointegración, *e.g.* Wright (2000), entre otros.

4.2.1. Resultados del test

El procedimiento es relativamente simple y consiste en evaluar la estacionariedad de los residuos de la siguiente regresión:

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t + \epsilon_t \quad (4.1)$$

donde y_t es el logaritmo del tipo de cambio real bilateral con Estados Unidos y x_t es la productividad relativa a Estados Unidos del país que estamos analizando.

Dado que en el caso de que exista cointegración debería suceder que los residuos no sean estacionarios, y por ende, rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria en los residuos, el test de Engle y Granger parte de la hipótesis nula de que no existe cointegración. Por lo cual, en los casos en que encontremos *p-values* muy pequeños, significará que tenemos suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de que ambas series no están cointegradas.

Cuadro 4.1: P-values - Test de Engle y Granger

Proxy de $\ln\left(\frac{Z_{US,t}}{Z_{i,t}}\right)$	País	sin constante y sin tendencia	con constante y sin tendencia	con constante y con tendencia	con constante y con tendencia y cuadrática
$\ln \frac{GDP_{US,t}}{GDP_{i,t}}$	Japón	0,8288	0,0182**	0,0449*	0,0357*
	Reino Unido	0,0560	0,0072***	0,0468*	0,0043***
	Alemania	0,1121	0,00363***	0,01855**	0,0648

Nota: $Z_{i,t}$ representa la productividad del país i en el modelo utilizado.

Podemos ver que, asumiendo una especificación con constante, tenemos suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de no cointegración.

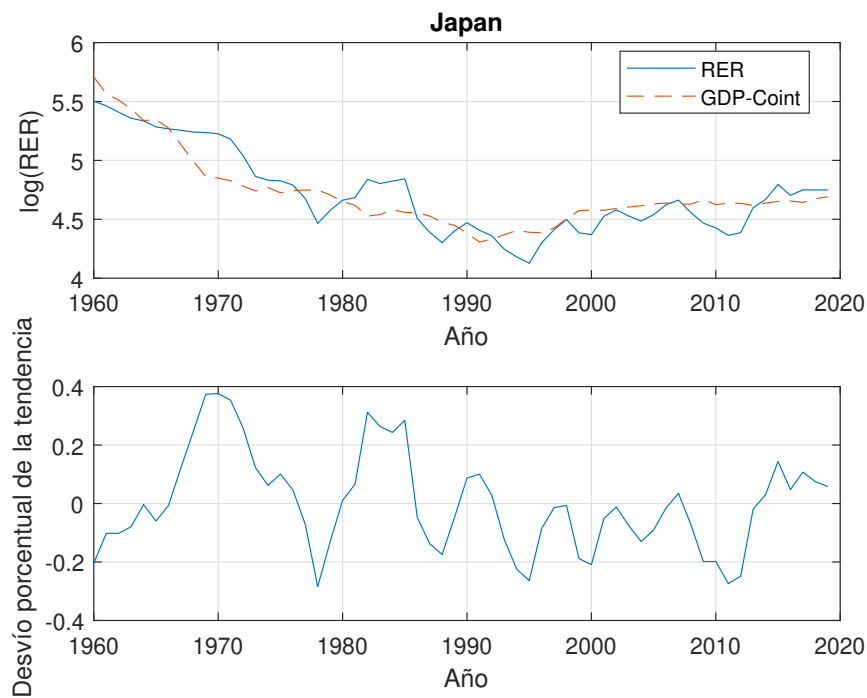
4.2.2. Vectores de cointegración

Parte de lo que buscamos en este trabajo es entender la relación entre el tipo de cambio real y la productividad en largo plazo, lo cual va a estar sujeto a cuán válidas consideremos las relaciones de cointegración entre estas variables. En esta sección vamos a presentar

los vectores de cointegración obtenidos con el test de Engle y Granger y los residuos de dichas regresiones.

A continuación presentamos los resultados de los vectores de cointegración usando el PBI per cápita relativo.

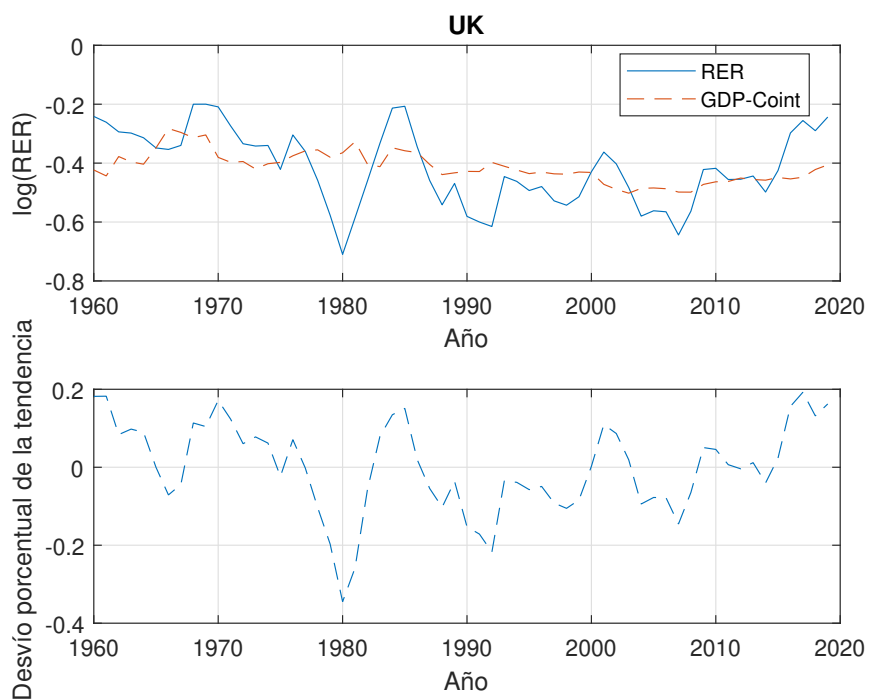
Japón



Cuadro 4.2: Vector de cointegración de Engle y Granger - Japón

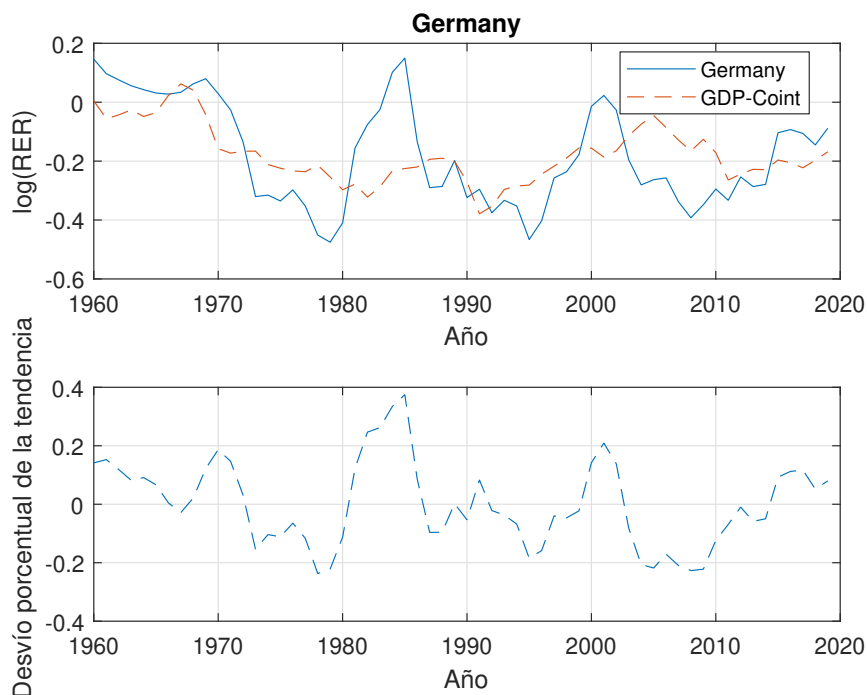
	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	4,4778	0,028	162,24	0,000	4,423	4,533
$\hat{\beta}$	1,7232	0,122	14,165	0,000	1,480	1,967

Reino Unido

**Cuadro 4.3:** Vector de cointegración de Engle y Granger - Reino Unido

	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	-0,7914	0,112	-7,074	0,000	-1,015	-0,567
$\hat{\beta}$	1,5904	0,467	3,403	0,001	0,655	2,526

Alemania



Cuadro 4.4: Vector de cointegración de Engle y Granger - Alemania

	Coefficientes	Errores estándar	t-student	$P > t $	[0,025	0,975]
Constante	-0,3677	0,042	-8,769	0,000	-0,452	-0,284
$\hat{\beta}$	1,8778	0,369	5,091	0,000	1,140	2,616

4.3. Test de Wright

Los métodos más utilizados para hacer inferencia en sistemas cointegrados requieren el supuesto de que todas las variables tienen raíces unitarias, y como ya mencionamos, no son robustos a pequeñas violaciones de este supuesto. Tanto la productividad como el tipo de cambio real están caracterizados por tener mucha persistencia y, por ende, no podemos estar seguros de la existencia de raíces unitarias.

El trabajo de Wright (2000) se basa en desarrollar un enfoque alternativo que permite realizar inferencia sobre la existencia de cointegración en casos donde la raíz unitaria de las variables involucradas no son exactamente uno. Este método consiste en testear la hipótesis de que el vector de cointegración toma un valor determinado testeando

la estacionariedad de los residuos asociados a ese vector.

En este trabajo, siguiendo la variante de dicho test desarrollada por Benati *et al.* (2016), vamos a estimar un VECM bajo la hipótesis nula de la existencia de un vector de cointegración. Luego, en base a esta estimación, computamos el VAR implícito en niveles, que va a tener por construcción un autovalor igual a 1. Finalmente, estimaremos la estacionariedad de los residuos de la regresión contra este VAR implícito.

Recordemos que este test se caracteriza por tener un hipótesis nula en la que se asume cointegración. Por lo cual, vamos a evaluar la estacionariedad de dichos residuos usando el test elaborado por Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (1992), donde la hipótesis nula es que no existe raíz unitaria. Adicionalmente, en las últimas dos columnas de la tabla 4.5 reportaremos el conjunto de coeficientes bajo el cual no podemos rechazar la hipótesis nula de cointegración. Cabe aclarar que la columna “Coeficientes” de dicha tabla, presenta los coeficientes estimados por la regresión entre el VAR implícito en niveles y el tipo de cambio real.

Cuadro 4.5: Vector de cointegración de Wright

País	Coeficientes	p-valor	límite inferior IC 10 %	límite superior IC 10 %
Japón	1,7931	0,350	[1,4216	2,4986]
Reino Unido	1,7875	0,304	[0,1038	2,9904]
Alemania	1,7345	0,595	[-0,561	4,6184]

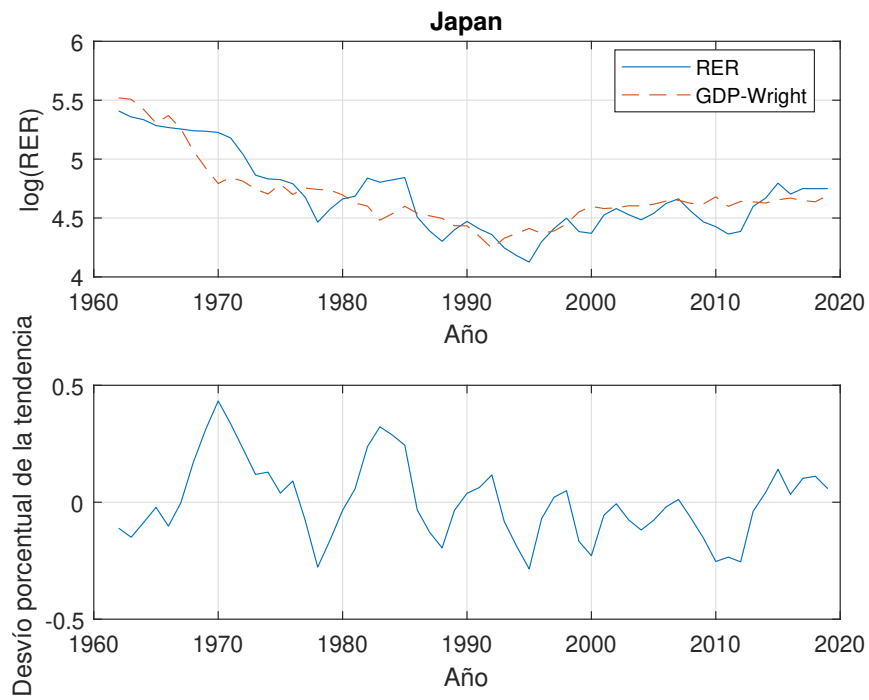
Nota: Para Alemania y Japón se realizó el test de KPSS considerando una constante y una tendencia determinística. En el caso de Reino Unido solo se consideró una constante.

Podemos ver, nuevamente, que encontramos evidencia a favor de la cointegración. En este caso, no podemos rechazar la hipótesis nula de cointegración para ninguno de los países. De todos modos, hay que remarcar que esta relación de cointegración parece ser más clara en el caso de Japón, ya que el conjunto de coeficientes para los cuales no rechazamos la hipótesis de cointegración es más acotado.

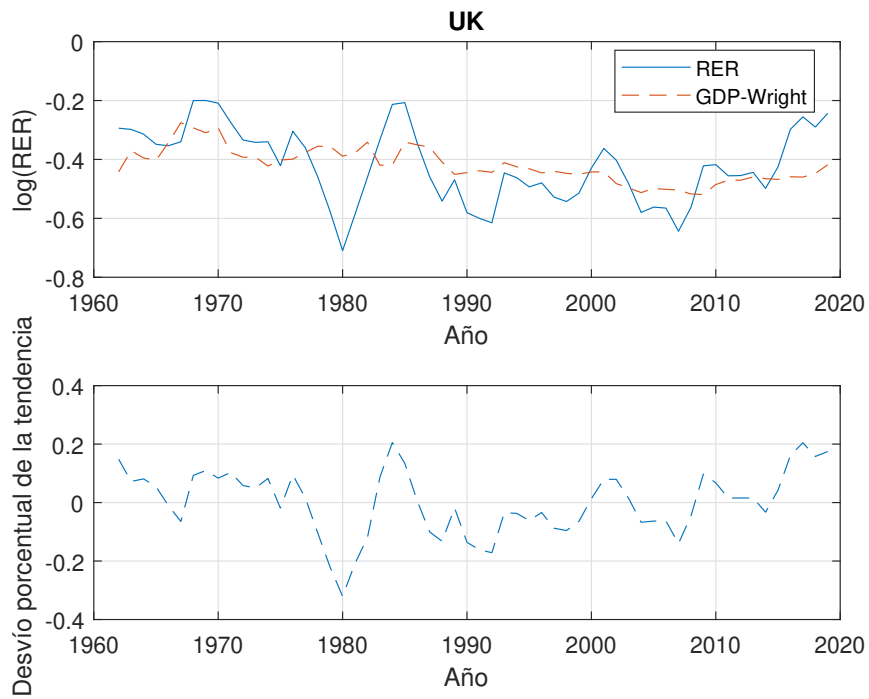
4.3.1. Vectores de cointegración

A continuación presentamos la evolución de la tendencia y los residuos usando el coeficiente estimado mediante el test de Wright:

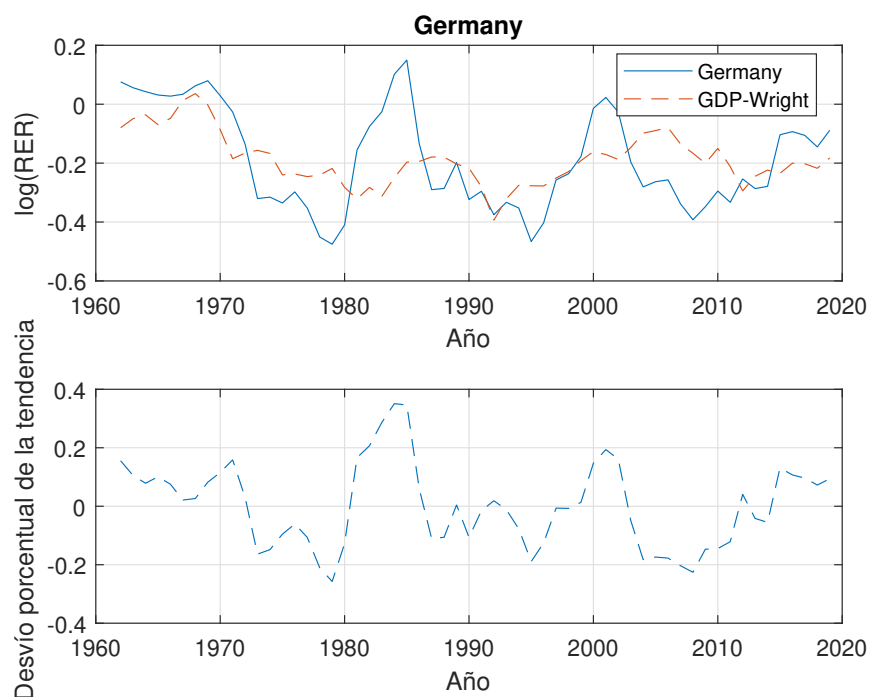
Japón



Reino Unido



Alemania

4.4. Volatilidades post *detrending*

A continuación presentamos las volatilidades y la persistencia de cada una de las series luego de aplicar los distintos filtros de tendencia.

Cuadro 4.6: Segundos Momentos del TCR usando distintos filtros de la tendencia

Países	Raw Series		Filtro Lineal		Filtro Cuadrático		Filtro Cuadrático con constante en T		GDP Cointegrado OLS			GDP Cointegrado Wright		
	σ_x	ρ_x	σ_x	ρ_x	σ_x	ρ_x	σ_x	ρ_x	β^{OLS}	σ_x	ρ_x	β^W	σ_x	ρ_x
Japón	0,354	0,92	0,2595	0,93	0,128	0,73	0,1596	0,84	1,723	0,1678	0,78	1,7931	0,1658	0,77
Reino Unido	0,128	0,82	0,1186	0,81	0,099	0,71	0,1087	0,78	1,59	0,1164	0,76	1,7875	0,1114	0,74
Alemania	0,176	0,84	0,1612	0,84	0,141	0,8	0,1445	0,82	1,878	0,1461	0,79	1,7345	0,1444	0,76

Podemos ver que, usando el test de Wright, la volatilidad de los residuos es menor que usando el Test de Engle y Granger (OLS). Además, usando el método de cointegración para eliminar la tendencia de la serie nos permite obtener una volatilidad menor que usando el filtro lineal, pero mayor que usando otros filtros no lineales (como el cuadrático o el de Hodrick-Prescott).

5. Simulaciones

5.1. Introducción

En esta sección vamos a explorar los resultados relacionados al comportamiento del tipo de cambio real en el largo plazo simulando distintas versiones de la familia de modelos *Two-world economy*. Las calibraciones se van a centrar en poder replicar las condiciones iniciales de estas economías en 1960, el primer año de la muestra con la que estamos trabajando, y entender como evoluciona el tipo de cambio real con una evolución de la productividad total de los factores del país i que converge al país j , el cual siempre va a ser Estados Unidos.

Nos vamos a basar en el modelo desarrollado por Backus, Kehoe y Kydland (1994), que consta de una economía con un bien final no transable (lo cual nos va a permitir expresar el tipo de cambio real como el ratio entre los precios de este bien) e incluye un sector productor de bienes intermedios transables. Este modelo no incluye un sector de bienes primarios. La función de producción de bien final es una función CES, por lo que el caso es más general que el de la Sección 2, donde teníamos una función Cobb-Douglass.

En la primera subsección vamos a encontrar la expresión para el tipo de cambio real usando directamente el sector productivo de la economía: la relación entre los precios de los bienes finales y los bienes intermedios. Luego, en la siguiente sección vamos a computar el tipo de cambio real de equilibrio para el caso más simple, donde no hay trabajo ni capital. Después, vamos a incluir trabajo y, posteriormente, capital. Finalmente, el objetivo es encontrar la evolución del tipo de cambio real para una evolución dada de la productividad.

5.2. Modelo descentralizado

Aquí mostraremos como computamos el tipo de cambio real en el modelo descentralizado. Llegaremos a una expresión que no va a ser la de equilibrio (porque dependerá de los precios de los bienes intermedios), pero el objetivo aquí es simplemente mostrar una primer

aproximación al problema.

La firma productora de bien final del país local (país 1) maximiza sus beneficios resolviendo:

$$\max_{a_{1t}, b_{1t}} P_{1t} [\omega a_{1t}^{-\rho} + (1 - \omega) b_{1t}^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} - q_{1t} a_{1t} - q_{2t} b_{1t}$$

Donde a_{1t} es el bien intermedio producido localmente y b_{1t} es el bien intermedio producido en el extranjero; ω es la preferencia por el bien local; $\frac{1}{1+\rho}$ es la elasticidad de sustitución entre bienes producidos localmente y producidos en el extranjero; q_{1t} y q_{2t} son los precios de dichos bienes intermedios.

Las condiciones de primer orden son:

$$\{a_{1t}\} : \frac{P_{1t} G_{1t} \omega a_{1t}^{-\rho-1}}{\omega a_{1t}^{-\rho} + (1 - \omega) b_{1t}^{-\rho}} = q_{1t} \quad (5.1)$$

$$\{b_{1t}\} : \frac{P_{1t} G_{1t} (1 - \omega) b_{1t}^{-\rho-1}}{\omega a_{1t}^{-\rho} + (1 - \omega) b_{1t}^{-\rho}} = q_{2t} \quad (5.2)$$

Notemos que, despejando las cantidades de bien intermedio y usando que $G_{1t} = [\omega a_{1t}^{-\rho} + (1 - \omega) b_{1t}^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$, ambas ecuaciones las podemos escribir como:

$$\frac{G_{1t} \omega^{\frac{1}{1+\rho}}}{\left(\frac{q_{1t}}{P_{1t}}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}} = a_{1t} \quad (5.3)$$

$$\frac{G_{1t} (1 - \omega)^{\frac{1}{1+\rho}}}{\left(\frac{q_{2t}}{P_{1t}}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}} = b_{1t} \quad (5.4)$$

Luego, reemplazando ambas ecuaciones en la función de producción del bien final nos queda la siguiente expresión para el deflactor de precios del país 1:

$$P_{1t} = \left[\omega^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} q_{1t}^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1 - \omega)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} q_{2t}^{\frac{\rho}{1+\rho}} \right]^{\frac{1+\rho}{\rho}} \quad (5.5)$$

Análogamente, para el país 2, tenemos el siguiente deflactor de precios:

$$P_{2t} = \left[\omega^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} q_{2t}^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1-\omega)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} q_{1t}^{\frac{\rho}{1+\rho}} \right]^{\frac{1+\rho}{\rho}} \quad (5.6)$$

Por lo que dividiendo el nivel de precios del país 2 sobre el nivel de precios del país 1 nos queda el tipo de cambio real expresado de la siguiente manera:

$$RER_t = \left[\frac{\omega^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} q_{2t}^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1-\omega)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} q_{1t}^{\frac{\rho}{1+\rho}}}{\omega^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} q_{1t}^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1-\omega)^{\frac{1-\rho}{1+\rho}} q_{2t}^{\frac{\rho}{1+\rho}}} \right]^{\frac{1+\rho}{\rho}} \quad (5.7)$$

Necesitamos que $\omega \neq 0,5$ para tener variaciones en el tipo de cambio real ante variaciones del resto de las variables del modelo.

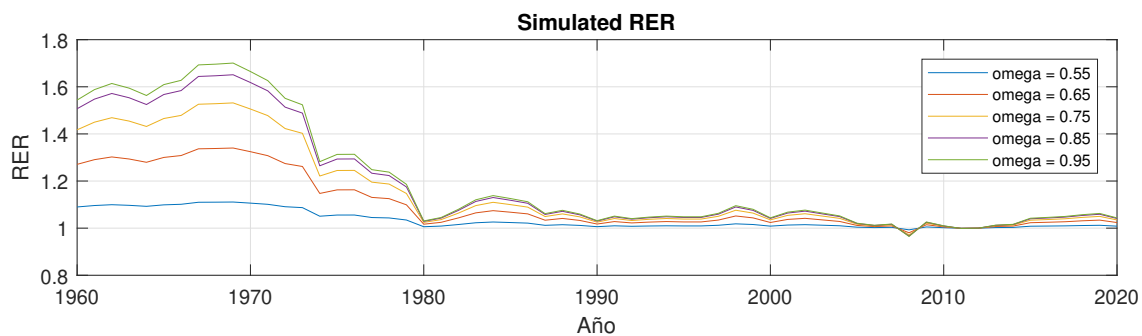
Notemos que q_{2t} es el precio de las exportaciones del País 2 y q_{1t} es el precio de las importaciones de ese país. Dado el setting del modelo podemos simular, de manera preliminar, el tipo de cambio real entre USA y otro país usando los precios de las importaciones y exportaciones.

Definimos a USA como el país 2 y a Japón como el país 1 (nótese que es para este caso irrelevante cuál es el país 1, ya que únicamente estamos usando datos de los precios de las exportaciones e importaciones de Estados Unidos). Podemos ver que los datos indican una convergencia del tipo de cambio real, según la expresión encontrada.

5.3. Modelo BKK con dotaciones

En esta sección resolvemos primero una versión bien simplificada del modelo, donde hay una función CES para el bien final, pero para los bienes intermedios tenemos dotaciones. Asumimos que la dotación de bienes intermedios va a evolucionar de acuerdo a Lucas (2014):

$$Y_{1t+1} = Y_{1t} \frac{\left[1 + \sigma \left(\frac{Y_{2t}}{Y_{1t}} \right)^\alpha \right]}{1 + \sigma} \quad (5.8)$$

Figura 5.1: Simulación simplificada

El problema a resolver es el siguiente:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\psi U_{1t}(c_{1t}) + (1 - \psi)U_{2t}(c_{2t})]$$

$$\text{s.a. } c_{1t} = G(a_{1t}, b_{1t})$$

$$c_{2t} = G(a_{2t}, b_{2t})$$

$$a_{1t} + a_{2t} = Y_{1t}$$

$$b_{1t} + b_{2t} = Y_{2t}$$

Resolvemos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\psi U_{1t}(c_{1t}) + (1 - \psi)U_{2t}(c_{2t})]$$

$$- \lambda_{1t} [c_{1t} - G(a_{1t}, b_{1t})]$$

$$- \lambda_{2t} [c_{2t} - G(a_{2t}, b_{2t})]$$

$$- \eta_{1t} [a_{1t} + a_{2t} - Y_{1t}]$$

$$- \eta_{2t} [b_{1t} + b_{2t} - Y_{2t}]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\{c_{1t}\} : \psi U_{c_{1t}} = \lambda_{1t} \quad (5.9)$$

$$\{c_{2t}\} : (1 - \psi) U_{c_{2t}} = \lambda_{2t} \quad (5.10)$$

$$\{a_{1t}\} : \eta_{1t} = \lambda_{1t} G_{a_{1t}} \quad (5.11)$$

$$\{a_{2t}\} : \eta_{1t} = \lambda_{2t} G_{a_{2t}} \quad (5.12)$$

$$\{b_{1t}\} : \eta_{2t} = \lambda_{1t} G_{b_{1t}} \quad (5.13)$$

$$\{b_{2t}\} : \eta_{2t} = \lambda_{2t} G_{b_{2t}} \quad (5.14)$$

$$\{\lambda_{1t}\} : c_{1t} = G(a_{1t}, b_{1t}) \quad (5.15)$$

$$\{\lambda_{2t}\} : c_{2t} = G(a_{2t}, b_{2t}) \quad (5.16)$$

$$\{\eta_{1t}\} : a_{1t} + a_{2t} = Y_{1t} \quad (5.17)$$

$$\{\eta_{2t}\} : b_{1t} + b_{2t} = Y_{2t} \quad (5.18)$$

Por lo que nos queda un problema estático para resolver.

Para poder obtener el sendero del tipo de cambio real, primero tenemos que descentralizar la solución del planner.

Combinando (5.15) y (5.16) con (5.3) y (5.4) nos queda:

- $\lambda_{1t} = P_{1t}$
- $\lambda_{2t} = P_{2t}$
- $\eta_{1t} = q_{1t}$
- $\eta_{2t} = q_{2t}$

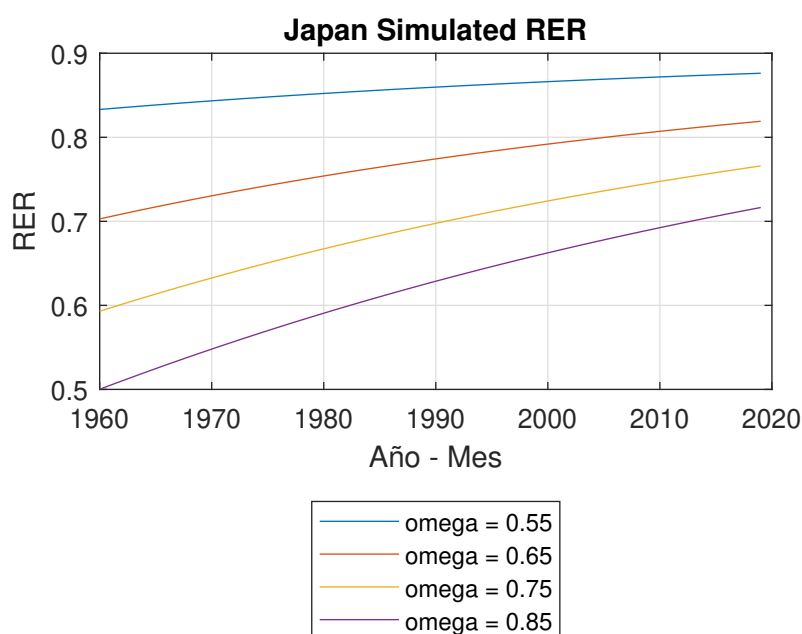
Utilizamos la siguiente calibración:

- $\rho = -1/3$. Misma calibración que en el trabajo original de Backus, Kehoe y Kydland.
- $Y_{1_0} = 0,49$. PBI per cápita relativo de Japón a USA en 1960.
- $\sigma = 0,02$. Calibración utilizada en Lucas (2014).
- $\alpha = 0,67$. Calibración utilizada en Lucas (2014).
- $Y_2 = 1$. Normalizamos el PBI per cápita de USA a 1.

- Definimos al tipo de cambio real de Japón como $\frac{P_{2t}}{P_{1t}}$

Notemos que, dada la estructura del modelo, cuanto mayor es la dotación de bienes intermedios, más se deprecia el tipo de cambio real. Este resultado se da porque a medida que aumenta la productividad (y la producción) de bienes intermedios en el país 1, aumenta la producción del bien final en mayor medida que en el país 2. Dado que tenemos la misma estructura de preferencias en ambos países y autarquía financiera, este aumento del producto relativo del país 1 genera una caída más rápida de la utilidad marginal en relación al país 2, generando una depreciación del tipo de cambio real. Podemos ver que tiene una tendencia mayor cuanto mayor es la preferencia por el bien local.

Figura 5.2: Simulación con dotaciones



5.4. Modelo BKK con trabajo

En esta sección pasamos a presentar los resultados para el modelo incluyendo la decisión de los hogares de cuántas horas trabajar. En este caso el *setting* nuevamente supone autarquía financiera, incluyendo un sector productivo de bienes intermedios, a través de trabajo.

Para evitar ahondar en repeticiones, presentamos directamente las condiciones de equilibrio del modelo. La solución va a estar caracterizada por un sistema no lineal de 4 ecuaciones y 4 incógnitas, del cual podremos obtener todas las asignaciones de equilibrio.

$$\mu G_{1t}^\rho (1 - \theta) A_{1t} n_{1t}^{-\theta} \omega a_{1t}^{-\rho-1} = \frac{1 - \mu}{1 - n_{1t}} \quad (5.19)$$

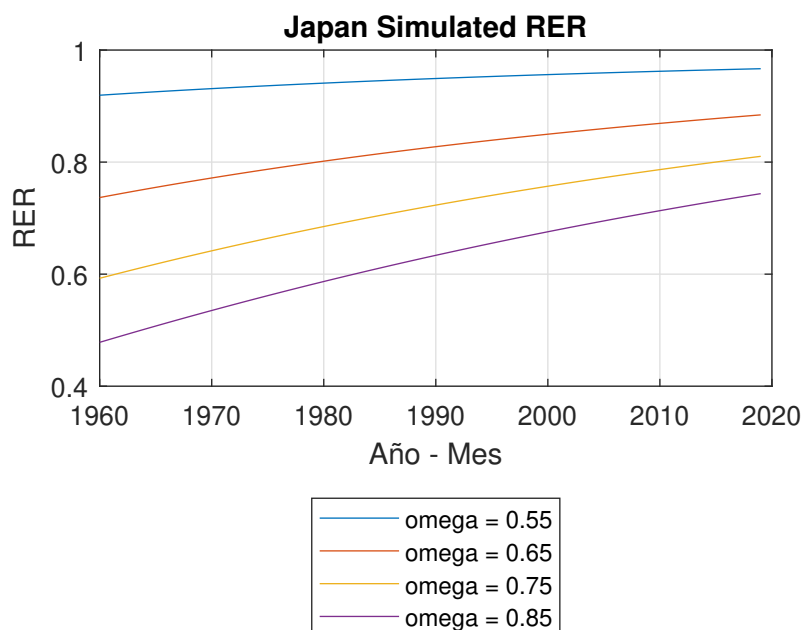
$$(1 - \psi)(1 - n_{2t})^{(1-\mu)\gamma} G_{2t}^{\mu\gamma+\rho} \mu (1 - \omega) a_{2t}^{-\rho-1} = \psi \frac{G_{1t}^{\mu\gamma} (1 - n_{1t})^{(1-\mu)\gamma-1}}{(1 - \theta) A_{1t} n_{1t}^{-\theta}} (1 - \mu) \quad (5.20)$$

$$\psi (1 - n_{1t})^{(1-\mu)\gamma} G_{1t}^{\mu\gamma+\rho} \mu (1 - \omega) b_{1t}^{-\rho-1} = (1 - \psi) \frac{G_{2t}^{\mu\gamma} (1 - n_{2t})^{(1-\mu)\gamma-1}}{A_{2t} (1 - \theta) n_{2t}^{-\theta}} (1 - \mu) \quad (5.21)$$

$$\mu G_{2t}^\rho (1 - \theta) A_{2t} n_{2t}^{-\theta} \omega b_{2t}^{-\rho-1} = \frac{(1 - \mu)}{1 - n_{2t}} \quad (5.22)$$

Donde $\theta = 0,36$, n_{it} son las horas trabajadas del agente representativo del país i en el período t , y G_{it} es la cantidad de bien final producida en el país i en el período t . En la figura 5.3 se puede ver la evolución del tipo de cambio real:

Figura 5.3: Simulación con trabajo



Nuevamente, podemos ver que la convergencia tiene una tendencia mayor cuanto mayor es la preferencia por el bien local.

5.5. Modelo BKK con capital y trabajo

En este caso nuevamente vamos a buscar la solución al problema de planificador y luego vamos a descentralizar la solución. Al incluir capital en el modelo eliminamos el supuesto de autarquía financiera, aunque seguimos manteniendo el supuesto de que los bienes finales no son transables.

Para esta simulación vamos a desviarnos de la ecuación propuesta por Lucas (2014), para así poder asegurar la convergencia de la solución. Además, vamos a definir los siguientes parámetros para la solución del modelo:

- $\gamma = -1$
- $\delta = 0,025$
- $\theta = 0,36$
- $\beta = 0,99$
- $\kappa_1^1 = \kappa_2^2 = 0,906$
- $\kappa_2^1 = 0,2$

El modelo a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\psi U_{1t}(c_{1t}, n_{1t}) + (1 - \psi) U_{2t}(c_{2t}, n_{2t})] \\ \text{s.a. } & c_{1t} + k_{1t+1} - (1 - \delta)k_{1t} = G(a_{1t}, b_{1t}) \\ & c_{2t} + k_{2t+1} - (1 - \delta)k_{2t} = G(a_{2t}, b_{2t}) \\ & a_{1t} + a_{2t} = F(k_{1t}, n_{1t}) \\ & b_{1t} + b_{2t} = F(k_{2t}, n_{2t}) \\ & \ln(A_{1t}) = \kappa_1^1 \ln(A_{1,t-1}) + \kappa_1^2 \ln(A_{2,t-1}) + \epsilon_{1t} \\ & \ln(A_{2t}) = \kappa_2^2 \ln(A_{2,t-1}) + \kappa_2^1 \ln(A_{1,t-1}) + \epsilon_{2t} \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{1t} k_{1t+1} = 0 \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{2t} k_{2t+1} = 0 \end{aligned}$$

donde:

- $U_{it}(c_{it}, n_{it}) = \frac{[c_{it}^\mu (1-n_{it})^{1-\mu}]^\gamma}{\gamma}$
- $G(a_{1t}, b_{1t}) = [\omega a_{1t}^{-\rho} + (1 - \omega) b_{1t}^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$
- $G(a_{2t}, b_{2t}) = [(1 - \omega) a_{2t}^{-\rho} + \omega b_{2t}^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$
- $F(k_{it}, n_{it}) = A_{it} k_{it}^\theta n_{it}^{1-\theta}$
- λ_{it} es el multiplicador de la restricción de bienes finales del país i , y η_{it} es la restricción de producción de bienes intermedios del país i

Las condiciones de primer orden son:

$$\{c_{1t}\} : \psi U_{c_{1t}} = \lambda_{1t} \quad (5.23)$$

$$\{c_{2t}\} : (1 - \psi)U_{c_{2t}} = \lambda_{2t} \quad (5.24)$$

$$\{n_{1t}\} : \psi U_{n_{1t}} = -\eta_{1t}F_{n_{1t}} \quad (5.25)$$

$$\{n_{2t}\} : (1 - \psi)U_{n_{2t}} = -\eta_{2t}F_{n_{2t}} \quad (5.26)$$

$$\{k_{1t+1}\} : -\lambda_{1t} + \beta\lambda_{1t+1}(1 - \delta) + \beta\eta_{1t+1}F_{k_{1t+1}} = 0 \quad (5.27)$$

$$\{k_{2t+1}\} : -\lambda_{2t} + \beta\lambda_{2t+1}(1 - \delta) + \beta\eta_{2t+1}F_{k_{2t+1}} = 0 \quad (5.28)$$

$$\{a_{1t}\} : \eta_{1t} = \lambda_{1t}G_{a_{1t}} \quad (5.29)$$

$$\{a_{2t}\} : \eta_{1t} = \lambda_{2t}G_{a_{2t}} \quad (5.30)$$

$$\{b_{1t}\} : \eta_{2t} = \lambda_{1t}G_{b_{1t}} \quad (5.31)$$

$$\{b_{2t}\} : \eta_{2t} = \lambda_{2t}G_{b_{2t}} \quad (5.32)$$

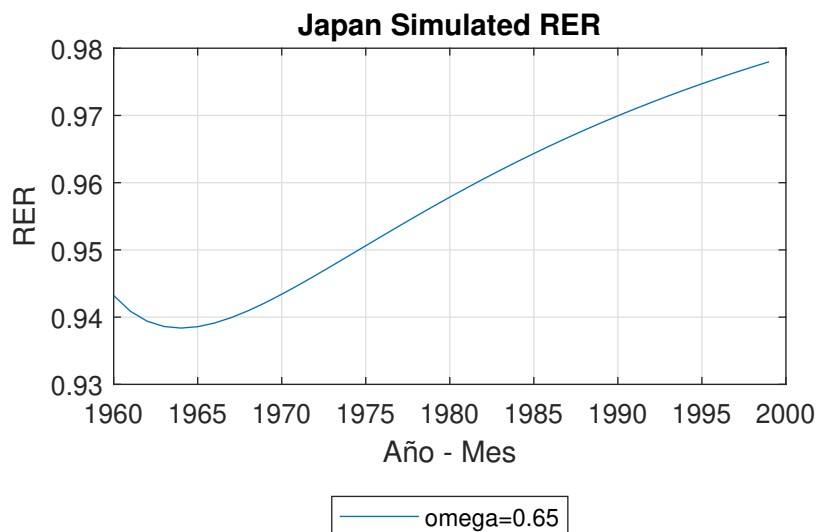
$$\{\lambda_{1t}\} : c_{1t} + k_{1t+1} - (1 - \delta)k_{1t} = G(a_{1t}, b_{1t}) \quad (5.33)$$

$$\{\lambda_{2t}\} : c_{2t} + k_{2t+1} - (1 - \delta)k_{2t} = G(a_{2t}, b_{2t}) \quad (5.34)$$

$$\{\eta_{1t}\} : a_{1t} + a_{2t} = F(k_{1t}, n_{1t}) \quad (5.35)$$

$$\{\eta_{2t}\} : b_{1t} + b_{2t} = F(k_{2t}, n_{2t}) \quad (5.36)$$

El procedimiento para evaluar el sendero del tipo de cambio real va a consistir en un shock positivo a la productividad de Estados Unidos (país 1), el cual va a generar un sendero de convergencia de la productividad de Japón (país 2). Vamos a computar una solución a la versión linealizada de las condiciones de equilibrio. En base a la evolución de las variables después de este shock, construiremos la evolución del tipo de cambio real.

Figura 5.4: Simulación con capital y trabajo

En este caso, podemos ver que al incluir capital el efecto inicial del *gap* de productividad es menor (también es porque planteamos un sendero de la productividad distinto), y pareciera converger más rápidamente el tipo de cambio real de estado estacionario.

6. Conclusión

Usando un modelo muy simple y realizando supuestos simplificadores en relación a los datos logramos detectar relaciones de cointegración entre el tipo de cambio real y el PBI per cápita en los 3 países analizados, cuyos senderos de convergencia al PBI de Estados Unidos tienen grandes diferencias en los 60 años considerados. También, parece interesante que el vector de cointegración oscile entre 1,5 y 2 para los 3 países, inclusive usando distintos tests de cointegración. Por lo cual, no solo estamos encontrando evidencia a favor de la relación de cointegración entre las dos variables analizadas, sino que también el comportamiento (o el vector de cointegración) parece ser similar entre los 3 países.

A su vez, estos resultados son parcialmente consistentes con las implicancias de los modelos de *two-world economy* presentados en el trabajo, que predicen una convergencia del tipo de cambio real, dada una convergencia de la productividad. Sin embargo, en los tests realizados no tuvimos en cuenta a las preferencias, que sí juegan un rol importante en los modelos simulados.

Este tipo de análisis tiene mucho espacio para ser profundizado, tanto con la utilización de modelos más complejos, como la extensión a otras economías y series temporales.

Referencias

- Asea, P. K. and Mendoza, E. G. (1994). The balassa-samuelson model: A general-equilibrium appraisal. *Review of International Economics*, 2, No. 3 (Octubre, 1994):244–267.
- Backus, David K. ; Kehoe, P. J. and Kydland, F. E. (1992). International real business cycles. *Journal of Political Economy*, 100(4):745–775.
- Backus, David K. ; Kehoe, P. J. and Kydland, F. E. (1994). Association dynamics of the trade balance and the terms of trade: The j-curve? *The American Economic Review*, 84(1):84–103.
- Balassa, B. (1964). The purchasing-power parity doctrine: A reappraisal. *Journal of Political Economy*, 72, No. 6 (Dec., 1964):584–596.
- Bordo, Michael D.; Choudhri, E. U. F. G. and MacDonald, R. (2017). The real exchange rate in the long run: Balassa-samuelson effects reconsidered. *Journal of International Money and Finance*.
- Chong, Yanping; Jordà, and Taylor, A. M. (2012). The harrod–balassa–samuelson hypothesis: Real exchange rates and their long run equilibrium. *International Economic Review*, 53, No. 2 (Mayo, 2012):609–634.
- Colacito, Ric; Croce, M. H. S. and Howard, P. (2018). Bkk the ez way: International long-run growth news and capital flows. *American Economic Review*, 108(11):3416–49.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49(4):1057–1072.
- Engle, R. F. and Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55 (2):251–276.
- Gregory, A. and Hansen, B. (1996). Residual-based tests for cointegration in models with regime shifts. *Journal of Econometrics*, 70(1):99–126.
- Hodrick, R. J. and Prescott, E. (1980). Postwar u.s. business cycles: an empirical investigation. *Pittsburgh: Carnegie-Mellon University*, Discussion Papers 451.
- Irandoust, M. and Sjöo, B. (2002). Productivity and real exchange rates: Some empirical examples. *Journal of Economic Integration*, 17, No. 3 (September 2002):527–553.
- Ito, Takatoshi; Isard, P. and Symansky, S. (1999). *Changes in Exchange Rates in Rapidly Development Countries: Theory, Practice, and Policy Issues*, volume 7.
- Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59(6):1551–1580.
- Kakkar, Vikas y Yan, I. (2012). Real exchange rates and productivity: Evidence from asia. *Journal of Money, Credit and Banking*, 44, No. 2/3 (March-April 2012):301–322.
- Kwiatkowski, D.; Phillips, P. C. B. S. P. and Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54 (1–3):159–178.
- Lucas, R. E. (2014). The wealth of nations in the 21st century. *Barcelona GSE Presentation*.

- Mussa, M. (1986). Nominal exchange rate regimes and the behavior of real exchange rates: Evidence and implications. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, pages 117–214.
- Nicolini, Juan Pablo; Ayres, J. and Hevia, C. (2019). Real exchange rates and primary commodity prices. *IDB Working Paper Series*, IDB-WP-1063.
- Nicolini, Juan Pablo; Lucas, R. E. W. W. and Benati, L. (2016). International evidence on long-run money demand. *Journal of Monetary Economics*, 117, January 2021:43–63.
- Rapetti, M. G. (2013). The real exchange rate and economic growth: Some observations on the possible channels. *University of Massachusetts Amherst, Economics Department Working Paper Series*. 167.
- Ravn, M. O. and Uhlig, H. (2002). On adjusting the hodrick-prescott filter for the frequency of observations. *Review of Economics and Statistics*, 84(2):371–375.
- Rodrik, D. (2008). The real exchange rate and economic growth. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2008(Fall, 2008):365–412.
- Samuelson, P. A. (1964). Theoretical notes on trade problems. *The Review of Economics and Statistics*, 46, No. 2 (May, 1964):145–154.
- Wright, J. H. (2000). Confidence sets for cointegrating coefficients based on stationarity tests. *Journal of Business Economic Statistics*, 18(2):211–222.

Apéndice

A1. Datos utilizados

Todos los datos utilizados en el trabajo fueron obtenidos de la Base de Datos de la Reserva Federal de St. Louis y están en frecuencia anual. Además, todos los análisis fueron realizados tomando los logaritmos de las variables.

A1.1. Tipo de cambio real

Continuando con lo explicado en las secciones 1 y 2, la serie de tipo de cambio real para cada uno de los 3 países fue construida tomando el índice de precios al consumidor de Estados Unidos, multiplicado por el tipo de cambio nominal anual promedio entre la moneda del país correspondiente y el dólar estadounidense, para luego ser dividido por el índice de precios del país correspondiente. Para el índice de precios se utilizó la serie *Consumer Price Index of All Items* con base en 2015³. Para el tipo de cambio nominal utilizamos la serie *National Currency to US Dollar Exchange Rate: Average of Daily Rates*⁴.

A1.2. PBI per cápita relativo a Estados Unidos

Para estimar el PBI per cápita usamos datos de la serie *Constant GDP per cápita*, medido en dólares de 2010⁵. Luego, para tomar el PBI per capita relativo tomamos la serie de

³La serie tiene frecuencia trimestral (menos en el caso de Estados Unidos), por lo que se tomaron promedios anuales:

- Estados Unidos: <https://fred.stlouisfed.org/series/CPALTT01USA661S>
- Japón: <https://fred.stlouisfed.org/series/JPNCPIALLQINMEI>
- Reino Unido: <https://fred.stlouisfed.org/series/GBRCPIALLQINMEI>
- Alemania: <https://fred.stlouisfed.org/series/DEUCPIALLQINMEI>

⁴En este caso los datos ya están en frecuencia anual:

- Japón: <https://fred.stlouisfed.org/series/CCUSMA02JPA661N>
- Reino Unido (en este caso, la *raw data* está en dólares por libra esterlina, pero fue convertida a la conversión correspondiente): <https://fred.stlouisfed.org/series/USUKFXUKA>
- Alemania: <https://fred.stlouisfed.org/series/CCUSMA02DEA618N>

⁵Los datos también están en frecuencia anual:

Estados Unidos y la dividimos por el país correspondiente.

A1.3. TFP relativa a Estados Unidos

Para los datos de la productividad total de los factores relativa a Estados Unidos tomamos la serie *Total Factor Productivity at Constant National Prices*⁶ para cada país, con base en 2017. Luego, dividimos la productividad de USA por la del país correspondiente.

A2. Asignaciones de equilibrio

Si bien el modelo presentado en la sección 2 tiene el objetivo de ilustrar una relación entre la productividad y el tipo de cambio real, en esta sección vamos a presentar el procedimiento para encontrar las asignaciones de equilibrio de dicho modelo. Dado que el modelo es similar al desarrollado por Nicolini, Hevia y Ayres (2019), el procedimiento va a ser similar al desarrollado en dicho trabajo.

Recordando que, dado que asumimos una balanza comercial equilibrada y no tenemos capital, dicho equilibrio se puede computar para cada período independiente.

Dado un vector de precios $[P_t^{x_1}, P_t^{x_2}, P_t^{q_1}, P_t^{q_2}]$ y normalizando $P_t^{x_3} = 1$, podemos encontrar todas las asignaciones de equilibrio en función de ese vector, y luego, encontrar los valores de equilibrio de dicho vector de precios. Del problema de minimización de costos del país 1, por competencia perfecta tenemos las siguientes expresiones:

-
- Estados Unidos: <https://fred.stlouisfed.org/series/NYGDPPCAPKDUSA>
 - Japón: <https://fred.stlouisfed.org/series/NYGDPPCAPKDJPN>
 - Reino Unido: <https://fred.stlouisfed.org/series/NYGDPPCAPKDGBR>
 - Alemania: <https://fred.stlouisfed.org/series/NYGDPPCAPKDDEU>

⁶Los datos están en frecuencia anual:

- Estados Unidos: <https://fred.stlouisfed.org/series/RTFPNAUSA632NRUG>
- Japón: <https://fred.stlouisfed.org/series/RTFPNAJPA632NRUG>
- Reino Unido: <https://fred.stlouisfed.org/series/RTFPNAGBA632NRUG>
- Alemania: <https://fred.stlouisfed.org/series/RTFPNADEA632NRUG>

$$P_t^{y1} = \frac{1}{Z_t^1} \left(\frac{P_t^{q1}}{\alpha_1^1} \right)^{\alpha_1^1} \left(\frac{P_t^{q2}}{\alpha_2^1} \right)^{\alpha_2^1} \left(\frac{W_t^1}{\alpha_3^1} \right)^{\alpha_3^1} \quad (.1)$$

$$P_t^{q1} = \frac{1}{Z_t^1} \left(\frac{P_t^{x1}}{\beta_1^1} \right)^{\beta_1^1} \left(\frac{P_t^{x2}}{\beta_2^1} \right)^{\beta_2^1} \left(\frac{P_t^{x3}}{\beta_3^1} \right)^{\beta_3^1} \left(\frac{W_t^1}{\beta_4^1} \right)^{\beta_4^1} \quad (.2)$$

$$P_t^{x1} = \frac{1}{Z_t^1} \left(\frac{P_t^{e1}}{1 - \phi_1^1} \right)^{1 - \phi_1^1} \left(\frac{W_t^1}{\phi_1^1} \right)^{\phi_1^1} \quad (.3)$$

$$P_t^{x3} = \frac{1}{Z_t^1} \left(\frac{P_t^{e3}}{1 - \phi_3^1} \right)^{1 - \phi_3^1} \left(\frac{W_t^1}{\phi_3^1} \right)^{\phi_3^1} \quad (.4)$$

De este sistema de ecuaciones podemos obtener los precios del país 1, dado el vector de precios $[P_t^{x1}, P_t^{x2}, P_t^{q1}, P_t^{q2}]$ y normalizando $P_t^{x3} = 1$.

Luego, el consumo se puede obtener de la restricción presupuestaria del hogar representativo:

$$C_t^1 = \frac{W_t^1}{P_t^{y1}} n^1 + \frac{P_t^{e1}}{P_t^{y1}} e_1^1 + \frac{P_t^{e3}}{P_t^{y1}} e_3^1 = Y_t^1 \quad (.5)$$

Del problema de la firma del bien final podemos obtener la demanda de bienes intermedios y trabajo asignado al bien final:

$$q_{1,t}^1 = \alpha_1^1 \frac{P_t^{y1} Y_t^1}{P_t^{q1}} \quad (.6)$$

$$q_{2,t}^1 = \alpha_2^1 \frac{P_t^{y1} Y_t^1}{P_t^{q2}} \quad (.7)$$

$$n_{y,t}^1 = \alpha_3^1 \frac{P_t^{y1} Y_t^1}{W_t^1} \quad (.8)$$

Del problema de la firma de bien intermedio (del país 1) podemos obtener la demanda de commodities y la producción del bien intermedio 1, dado $n_{q1,t}^1$:

$$Q_t^1 = \frac{W_t^1 n_{q_1,t}^1}{\beta_4^1 P_t^{q_1}} \quad (.9)$$

$$x_{1,t}^1 = \beta_1^1 \frac{P_t^{q_1} Q_t^1}{P_t^{x_1}} \quad (.10)$$

$$x_{2,t}^1 = \beta_2^1 \frac{P_t^{q_1} Q_t^1}{P_t^{x_2}} \quad (.11)$$

$$x_{3,t}^1 = \beta_3^1 \frac{P_t^{q_1} Q_t^1}{P_t^{x_3}} \quad (.12)$$

Luego, de los problemas de las firmas productoras de commodities podemos obtener la producción total de ambos commodities producidos en el país 1 y la demanda de trabajo en dicho sector:

$$X_{1,t}^1 = \frac{P_t^{e_1^1} e_1^1}{(1 - \phi_1^1) P_t^{x_1}} \quad (.13)$$

$$X_{3,t}^1 = \frac{P_t^{e_3^1} e_3^1}{(1 - \phi_3^1) P_t^{x_3}} \quad (.14)$$

$$n_{x_1,t}^1 = \phi_1^1 \frac{P_t^{x_1} X_{1,t}^1}{W_t^1} \quad (.15)$$

$$n_{x_3,t}^1 = \phi_3^1 \frac{P_t^{x_3} X_{3,t}^1}{W_t^1} \quad (.16)$$

Dado lo anterior, nos queda encontrar $n_{q_1,t}^1$ mediante el vaciamiento del mercado de trabajo:

$$n_{q_1,t}^1 = n^1 - n_{y_1,t}^1 - n_{x_1,t}^1 - n_{x_3,t}^1 \quad (.17)$$

Análogamente, se pueden encontrar las asignaciones del país 2.

Para el país 3, podemos obtener los precios del bien final del problema de la firma de dicho sector:

$$P_t^{y_3} = \frac{W_t^3 n_{y,t}^3}{Y_t^3 \pi_4} \quad (.18)$$

Usando la restricción presupuestaria del hogar representativo de dicho país obtenemos Y_t^3 :

$$C_t^3 = \frac{P_t^{x_1} X_{1,t}^3 + P_t^{x_2} X_{2,t}^3 + P_t^{x_3} X_{3,t}^3 + W_t^3 n_3}{P_t^{y_3}} = Y_t^3 \quad (.19)$$

Y toda la dotación de trabajo va a ser utilizada en la producción de dicho bien final:

$$n_{y,t}^3 = n^3.$$

Usando las 3 ecuaciones anteriores obtenemos la solución para los salarios:

$$W_t^3 = \left(\frac{\pi_4}{1 - \pi_4} \right) \frac{P_t^{x_1} X_{1,t}^3 + P_t^{x_2} X_{2,t}^3 + P_t^{x_3} X_{3,t}^3}{n^3} \quad (.20)$$

De la minimización de costos de la firma de bien final:

$$P_t^{y_3} = \left(\frac{P_t^{x_1}}{\pi_1} \right)^{\pi_1} \left(\frac{P_t^{x_2}}{\pi_2} \right)^{\pi_2} \left(\frac{P_t^{x_3}}{\pi_3} \right)^{\pi_3} \left(\frac{W_t^3}{\pi_4} \right)^{\pi_4} \quad (.21)$$

Volviendo a utilizar la ecuación .18, una vez que obtuvimos W_t^3 y $P_t^{y_3}$, la producción de bien final del país 3 queda expresada por:

$$Y_t^3 = \frac{W_t^3 n^3}{\pi_4 P_t^{y_3}} \quad (.22)$$

Luego, del problema de la firma de bien final, obtenemos la demanda del país 3 de cada commodity:

$$x_{1,t}^3 = \pi_1 \frac{P_t^{y_3} Y_t^3}{P_t^{x_1}} \quad (.23)$$

$$x_{2,t}^3 = \pi_2 \frac{P_t^{y_3} Y_t^3}{P_t^{x_2}} \quad (.24)$$

$$x_{3,t}^3 = \pi_3 \frac{P_t^{y_3} Y_t^3}{P_t^{x_3}} \quad (.25)$$

Dados todos los precios y cantidades encontrados anteriormente en función del vector $[P_t^{x_1}, P_t^{x_2}, P_t^{q_1}, P_t^{q_2}]$, podemos encontrar todos los precios y cantidades de equilibrio en función de los parámetros imponiendo las condiciones de vaciamiento de los mercados de bienes intermedios y commodities:

$$X_{1,t}^1 + X_{1,t}^3 = x_{1,t}^1 + x_{1,t}^2 + x_{1,t}^3 \quad (.26)$$

$$X_{3,t}^1 + X_{3,t}^2 + X_{3,t}^3 = x_{3,t}^1 + x_{3,t}^2 + x_{3,t}^3 \quad (.27)$$

$$Q_t^1 = q_{1,t}^1 + q_{1,t}^2 \quad (.28)$$

$$Q_t^2 = q_{2,t}^1 + q_{2,t}^2 \quad (.29)$$

Donde el vaciamiento de mercado del bien primario producido por el país 2 se cumple por la Ley de Walras.

Por lo tanto, si sumamos todas las condiciones de equilibrio de los 3 países tenemos un sistema de 45 ecuaciones y 45 incógnitas.

A3. Robustez de los tests de cointegración

En esta subsección del apéndice presentamos los resultados de otros tests de cointegración realizados.

A3.1. Test de Johansen

En primer lugar, vamos a presentar los resultados del test de Johansen (1991), comúnmente utilizado para detectar relaciones de cointegración. En este caso vamos a ver que, tanto utilizando *trace test* como el *maximal eigenvalue test*, hay evidencia para rechazar la hipótesis nula de no cointegración.

En base a los resultados de los Criterios de Información de Akaike, evaluamos la relación de cointegración entre el PBI per cápita y el tipo de cambio real para los 3 países con uno y cero lags.

Japón

Test de cointegración entre GDP relativo y TCR

Cuadro A3.1: Test de Johansen - Japón

Lags	0 Lags			1 Lag		
Critical Values	90 %	95 %	99 %	90 %	95 %	99 %
Max-Eigenvalues critical values	12,3	14,27	18,52	2,7	3,84	6,63
Max Eigenvalue	16,52			9,54		
Trace-Statistic critical values	13,43	15,49	19,93	2,7	3,84	6,63
Trace Statistic	26,06			9,54		

Bajo estos resultados podemos rechazar la hipótesis nula de no cointegración con un nivel de confianza del 95 %.

Reino Unido

Test de cointegración entre GDP relativo y TCR

Cuadro A3.2: Test de Johansen - Reino Unido

Lags	0 Lags			1 Lag		
Critical Values	90 %	95 %	99 %	90 %	95 %	99 %
Max-Eigenvalues critical values	12,3	14,27	18,52	2,7	3,84	6,63
Max Eigenvalue	15,5			4,09		
Trace-Statistic critical values	13,43	15,49	19,93	2,7	3,84	6,63
Trace Statistic	19,59			4,09		

Nuevamente, podemos rechazar la hipótesis nula de no cointegración con un nivel de confianza del 95 %.

Alemania

Test de cointegración entre GDP relativo y TCR

Cuadro A3.3: Test de Johansen - Alemania

Lags	0 Lags			1 Lag		
Critical Values	90 %	95 %	99 %	90 %	95 %	99 %
Max-Eigenvalues critical values	12,3	14,27	18,52	2,7	3,84	6,63
Max Eigenvalue	19,93			5,63		
Trace-Statistic critical values	13,43	15,49	19,93	2,7	3,84	6,63
Trace Statistic	25,56			5,63		

Por lo cual, podemos rechazar la hipótesis nula de no cointegración con un nivel de confianza del 95 % en el caso de un solo lag, y al 99 % en el caso de 0 lags.

A3.2. Test de Gregory-Hansen

En segundo lugar, ante la posibilidad de que las series contengan cambios estructurales, lo cual es razonable si tenemos en cuenta las diferencias en la volatilidad del tipo de cambio real entre el período de Bretton Woods y el período posterior, realizaremos el test de Gregory-Hansen (1996). Dicho test permite evaluar si hay cointegración en tres casos de quiebre estructural: quiebre en el nivel de la serie, quiebre en el nivel con tendencia y,

quiebre en el nivel de la serie junto a un quiebre en la tendencia. Teniendo en cuenta el comportamiento de los datos nos vamos a centrar en el caso de quiebre en el nivel de la serie.

En resumen, dicho test es similar al de Johansen pero permitiendo que las series tengan quiebres estructurales.

Japón

```
. ghansen Japan GDPJapan, break(level) lagmethod(aic)
```

Gregory-Hansen Test for Cointegration with Regime Shifts

```
Model: Change in Level          Number of obs =   60
Lags = 1 chosen by Akaike criterion  Maximum Lags =   2
```

	Test Statistic	Breakpoint	Date	Asymptotic Critical Values		
				1%	5%	10%
ADF	-4.39	29	29	-5.13	-4.61	-4.34
Zt	-4.14	15	15	-5.13	-4.61	-4.34
Za	-23.35	15	15	-50.07	-40.48	-36.19

Figura A3.1: Test de Gregory-Hansen - Japón

Podemos rechazar la hipótesis nula de no cointegración con un nivel de confianza del 90%.

El test estima un quiebre en el año 1989.

Reino Unido

```
. ghansen UK GDPUK, break(level) lagmethod(aic)
```

Gregory-Hansen Test for Cointegration with Regime Shifts

```
Model: Change in Level          Number of obs =   60
Lags = 1 chosen by Akaike criterion  Maximum Lags =   2
```

	Test Statistic	Breakpoint	Date	Asymptotic Critical Values		
				1%	5%	10%
ADF	-4.65	15	15	-5.13	-4.61	-4.34
Zt	-4.29	16	16	-5.13	-4.61	-4.34
Za	-23.79	16	16	-50.07	-40.48	-36.19

Figura A3.2: Test de Gregory-Hansen - Reino Unido

Podemos rechazar la hipótesis nula de no cointegración con un nivel de confianza del 95%.

El test estima un quiebre en el año 1975.

Alemania

```
. gphansen Germany GDPGermany, break(level) lagmethod(aic)
```

Gregory-Hansen Test for Cointegration with Regime Shifts
Model: Change in Level Number of obs = 60
Lags = 1 chosen by Akaike criterion Maximum Lags = 2

	Test Statistic	Breakpoint	Date	Asymptotic Critical Values		
				1%	5%	10%
ADF	-4.55	30	30	-5.13	-4.61	-4.34
Zt	-3.93	9	9	-5.13	-4.61	-4.34
Za	-19.92	9	9	-50.07	-40.48	-36.19

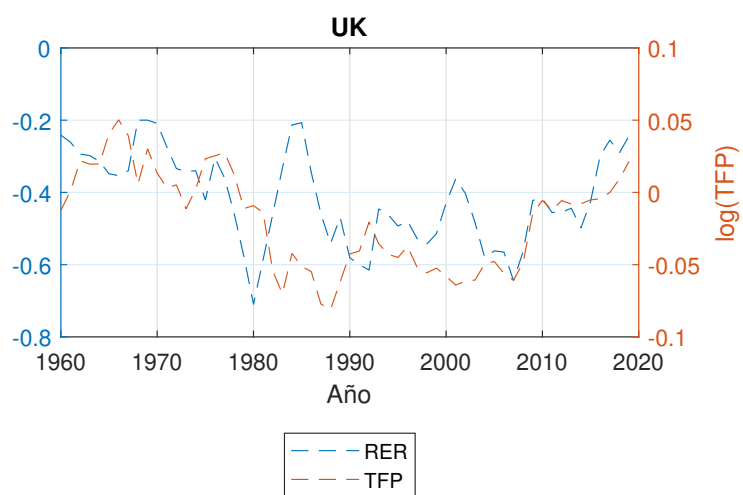
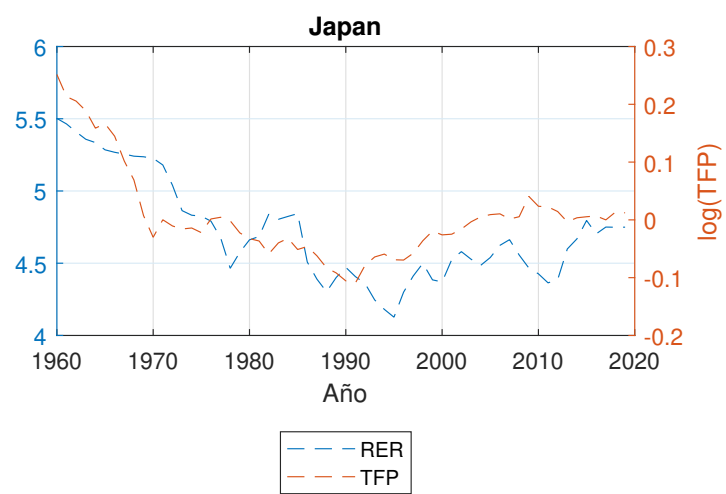
Figura A3.3: Test de Gregory-Hansen - Alemania

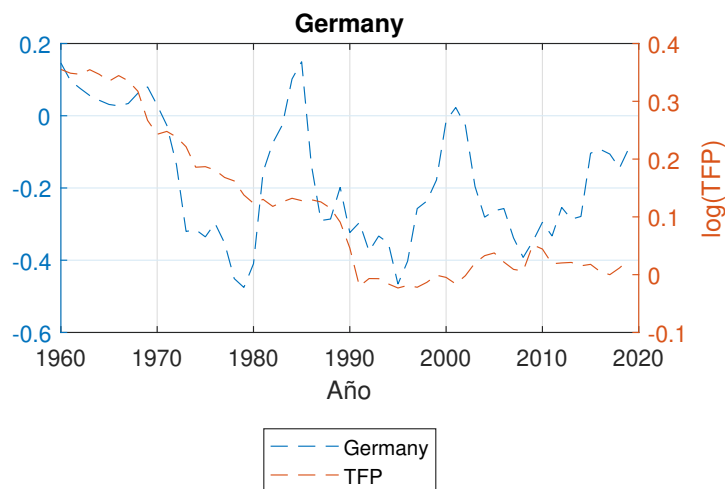
Podemos rechazar la hipótesis nula de no cointegración con un nivel de confianza del 90%. El test estima un quiebre en el año 1990.

A4. Datos de la Productividad Total de los Factores

En esta sección presentamos la reproducción de algunos ejercicios de las secciones 3 y 4 usando datos de la TFP relativo, en vez del PBI per Capita relativo.

En primer lugar, mostramos gráficamente la relación entre el tipo de cambio real y la productividad usando datos de la productividad total de los factores relativa a Estados Unidos.





En segundo lugar, replicamos la tabla A4.1 incluyendo datos del TFP relativo:

Cuadro A4.1: P-values - Augmented Dickey-Fuller Test incluyendo TFP

Serie	País	sin constante y sin tendencia	con constante y sin tendencia	con constante y con tendencia	con constante y tendencia cuadrática
$\ln RER_{i,t}$	Japón	0,3467	0,16066	0,71996	0,0177**
	Reino Unido	0,3281	0,0121**	0,05915	0,00585***
	Alemania	0,0551	0,01578**	0,06352	0,003626***
$\ln \frac{GDP_{US,t}}{GDP_{i,t}}$	Japón	0,0008***	0,0175**	0,4763	0,84395
	Reino Unido	0,5425	0,2822	0,1331	0,3489
	Alemania	0,1546	0,1605	0,6369	0,7388
$\ln \frac{TFP_{US,t}}{TFP_{i,t}}$	Japón	0,0000***	0,0009***	0,1646	0,9112
	Reino Unido	0,1259	0,4559	0,9647	0,3892
	Alemania	0,0093***	0,3026	0,9366	0,1258

También, reproducimos la tabla A4.2 con datos del TFP:

Cuadro A4.2: Persistencia y volatilidad incluyendo TFP

Serie	País	Volatilidad (σ_x)	Persistencia (ρ_x)
$\ln RER_{i,t}$	Japón	0,3543	0,921
	Reino Unido	0,1275	0,8161
	Alemania	0,1757	0,8426
$\ln \frac{GDP_{US,t}}{GDP_{i,t}}$	Japón	0,1811	0,9008
	Reino Unido	0,0327	0,8677
	Alemania	0,0520	0,8849
$\ln \frac{TFP_{US,t}}{TFP_{i,t}}$	Japón	0,0787	0,8884
	Reino Unido	0,0341	0,9218
	Alemania	0,1253	0,9623

Reproducimos la tabla A4.3 incluyendo los resultados usando los datos del TFP relativo para cada uno de los países.

Cuadro A4.3: P-values - Test de Engle y Granger

Proxy de $\ln\left(\frac{Z_{US,t}}{Z_{i,t}}\right)$	País	sin constante y sin tendencia	con constante y sin tendencia	con constante y con tendencia	con constante y tendencia cuadrática
$\ln \frac{GDP_{US,t}}{GDP_{i,t}}$	Japón	0,8288	0,0182**	0,0449*	0,0357*
	Reino Unido	0,0560	0,0072***	0,0468*	0,0043***
	Alemania	0,1121	0,00363***	0,01855**	0,0648
$\ln \frac{TFP_{US,t}}{TFP_{i,t}}$	Japón	0,9464	0,1821	0,1652	0,0679
	Reino Unido	0,687	0,00446***	0,0201**	0,0102**
	Alemania	0,2241	0,03397*	0,0511	0,13622

Nota: Z_i, t representa la productividad del país i en el modelo utilizado.

Luego, también presentamos las volatilidades de las series usando como filtro la cointegración entre el tipo de cambio real y el TFP relativo entre Estados Unidos y cada país. Para ello reproducimos la tabla 4.6 incluyendo el TFP relativo:

Cuadro A4.4: Segundos Momentos del TCR usando distintos filtros de la tendencia

Países	Raw Series		Filtro Lineal		Filtro Cuadrático		Filtro Cuadrático con constante en T		TFP relativo a USA			GDP Cointegrado OLS			GDP Cointegrado Wright		
	σ_x	ρ_x	σ_x	ρ_x	σ_x	ρ_x	σ_x	ρ_x	β^{OLS}	σ_x	ρ_x	β^{OLS}	σ_x	ρ_x	β^W	σ_x	ρ_x
Japón	0,354	0,92	0,2595	0,93	0,128	0,73	0,1596	0,84	3,26	0,224	0,85	1,723	0,1678	0,78	1,7931	0,1658	0,77
Reino Unido	0,128	0,82	0,1186	0,81	0,099	0,71	0,1087	0,78	1,85	0,1115	0,72	1,59	0,1164	0,76	1,7875	0,1114	0,74
Alemania	0,176	0,84	0,1612	0,84	0,141	0,8	0,1445	0,82	1,115	0,147	0,81	1,878	0,1461	0,79	1,7345	0,1444	0,76