

Departamento de Economía
Maestría en Econometría

Análisis de modelos DGSE - Caso Japón un análisis del PBI y el
consumo

Autor: Felipe Uriburu

Tutor: Martín González Rozada

Junio 2019

Resumen

Este trabajo provee una herramienta para resolver modelos dinámicos, estocásticos de equilibrio general (DGSE). En la primera parte se resolverá un modelo de crecimiento estocástico neoclásico. En la segunda parte se resolverá un modelo de ciclos de economía real (RBC por sus siglas en inglés). Se resolverán mediante la construcción de las log-linealizaciones características necesarias del estado estacionario y la caracterización del equilibrio vía ley de equilibrio recursivo del movimiento. El primer modelo se resolverá mediante el método de coeficientes indeterminados y el segundo a través de la descomposición de Schur. Este método permite resolver modelos no lineales, dinámicos y estocásticos de forma más sencilla. La novedad del trabajo es el análisis posterior de la correlación entre el PBI y el consumo usando el filtro de Hodrick & Prescott (Filtro HP) con datos trimestrales de Japón desde 1994 a 2018 en diferentes rezagos en el tiempo y la comparación entre los resultados teóricos de ambos modelos con los datos empíricos.

ÍNDICE

Introducción	5
Parte I: Modelo de crecimiento estocástico neoclásico	7
I. Encontrar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio. Puntualmente las condiciones de primer orden.	8
II. Escoger parámetros y encontrar el estado estacionario	8
III. Log-linealizar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio del sistema para hacer las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario.	11
A) Para la ecuación del consumo	11
B) Para la ecuación del retorno.....	11
C) Para la ecuación del output.....	12
D) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):	12
E) Para la ecuación de la productividad de los factores	12
F) Resultados:.....	12
IV. Resolver vía la ley de equilibrio recursivo del movimiento mediante el método de coeficientes indeterminados.....	13
A) Para la ecuación del consumo	13
B) Para la ecuación del retorno.....	14
C) Para la ecuación del output.....	14
D) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):	14
E) Para la ecuación de la productividad de los factores	15
F) Resultados:.....	15
Parte II: Modelo de ciclo de economía real (RBC).....	17
I. Encontrar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio. Puntualmente las condiciones de primer orden.	18
II. Escoger parámetros y encontrar el estado estacionario	20
III. Log-linealizar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio del sistema para hacer las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario.	23
A) Para la ecuación de inversión	23
B) Para la ecuación de empleo	23
C) Para la ecuación del consumo	24
D) Para la ecuación del retorno.....	24

E) Para la ecuación del output	24
F) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):	25
G) Para la ecuación de la productividad de los factores	25
IV. Resolver el sistema de ecuaciones usando la representación recursiva de la solución estable del sistema lineal de ecuaciones diferenciales.....	25
Parte III: Análisis de la solución y resultados empíricos	29
I. Análisis de la solución a través de un análisis de impulso-respuesta y del filtro de HP.....	29
II. Resultados empíricos caso Japón	32
Conclusión.....	38
Anexo 1: Solución a las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario	39
A) Para la ecuación del consumo	39
B) Para la ecuación del retorno.....	40
C) Para la ecuación del output.....	42
D) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):	43
E) Para la ecuación de la productividad de los factores	44
F) Resultados:.....	45
Anexo 2: Resolución vía la ley de equilibrio recursivo del movimiento mediante el método de coeficientes indeterminados	46
A) Para la ecuación del consumo	46
B) Para la ecuación del retorno.....	47
C) Para la ecuación del output.....	47
D) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):	47
E) Para la ecuación de la productividad de los factores	50
F) Resultados:.....	50
Anexo 3: Solución a las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario del modelo RBC.....	52
A) Para la ecuación de inversión	52
B) Para la ecuación de empleo	52
C) Para la ecuación del consumo	53
D) Para la ecuación del retorno.....	54
E) Para la ecuación del output.....	56
F) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):	57
G) Para la ecuación de la productividad de los factores	58

H) Resultados:.....	58
Bibliografía	60

Introducción

El objetivo del presente trabajo es estudiar la solución de modelos no lineales, dinámicos y estocásticos construyendo ecuaciones log-lineales usando un modelo de crecimiento estocástico neoclásico y un modelo de Ciclos de economía Real (RBC por sus siglas en inglés). A su vez se busca comparar los modelos teóricos con datos trimestrales del PBI y consumo de Japón. Para resolver los modelos DGSE se usará como base la herramienta propuesta por Uhlig (1999).

En la primera parte, se presentará el modelo de crecimiento estocástico neoclásico. Luego, se seguirán los siguientes pasos para resolver el problema:

- I. Encontrar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio. Puntualmente las condiciones de primer orden.
- II. Escoger parámetros y encontrar el estado estacionario
- III. Log-linealizar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio del sistema para hacer las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario.
- IV. Resolver vía la ley de equilibrio recursivo del movimiento mediante el método de coeficientes indeterminados.

En la segunda parte, se expondrá el modelo de ciclos de economía real propuesto por Hansen (1986). Luego, se seguirán los siguientes pasos para resolver el problema:

- I. Encontrar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio. Puntualmente las condiciones de primer orden.
- II. Escoger parámetros y encontrar el estado estacionario
- III. Log-linealizar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio del sistema para hacer las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario.
- IV. Resolver el sistema de ecuaciones usando la representación recursiva de la solución estable del sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

En la tercera parte se analizarán las soluciones de los modelos a través de un análisis de impulso-respuesta y del filtro de Hodrick y Prescott¹ (1981) y se compararan los resultados con datos reales de Japón.

La herramienta propuesta por Uhlig (1999) presenta diversas ventajas, entre ellas simplifica y unifica enfoques existentes para hacer el conocimiento accesible a una audiencia más amplia. En efecto, muestra cómo se log-linealizan² ecuaciones no lineales sin la necesidad de hacer una diferenciación explícita y cómo utilizar el método de coeficientes indeterminado para modelos con un vector de variables

¹ Lo llamaremos filtro HP.

² El principio de la log-linealización es usar la aproximación de Taylor alrededor del estado estacionario para reemplazar todas las ecuaciones por aproximaciones que sean funciones lineales en el log-desvío de las variables

estado endógenas. En consecuencia permite resolver modelos no lineales, dinámicos y estocásticos de forma más sencilla.

Para el trabajo se presentará el marco teórico explicado y se analizará el modelo con los datos trimestrales de consumo y PBI de Japón desde el 1 de enero 1994 hasta el 1 de julio de 2018 obtenidos de la base de datos FRED³ desestacionalizados. Usaremos el filtro de Hodrick-Prescott para la descomposición de la serie temporal en un componente cíclico y otro tendencial. Por último se analizarán los desvíos del PBI y consumo al componente tendencial y se los comparará con los resultados teóricos del modelo de crecimiento estocástico neoclásico y de RBC en diferentes rezagos en el tiempo.

³ Los datos surgen de la base de datos FRED del Banco de la Reserva Federal de St. Louis. Para más información consultar <https://fred.stlouisfed.org/graph/?id=JPNGDP,#0> (última vez consultado 09/03/2019)

Parte I: Modelo de crecimiento estocástico neoclásico

El modelo estocástico neoclásico de crecimiento es un modelo dinámico, estocástico de equilibrio general (DGSE). Vamos a presentar el problema del consumidor y vamos a usar el método del planificador social para resolver el modelo. Esta metodología es típicamente usada para resolver el equilibrio competitivo en ciclos de economía real (RBC por sus siglas en inglés).

A continuación se detalla el *ambiente* del modelo:

1) Preferencias

$$U = E \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} \right] \quad (1)$$

En donde C_t es consumo⁴, $0 < \beta < 1$ es el factor de descuento y η es el coeficiente de aversión al riesgo.

2) Tecnologías: Asumimos una función de producción de Cobb-Douglas:

$$C_t + K_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} + (1-\delta)K_{t-1} \quad (2)$$

En donde K_t es el capital, N_t es trabajo, $0 < \rho < 1$ (cuota de capital) y $0 < \delta < 1$ (tasa de depreciación del capital) son parámetros y Z_t la productividad de los factores que es exógena y depende de:

$$\log(Z_t) = (1-\psi)\log(\bar{Z}) + \psi\log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (3)$$

En donde $0 < \psi < 1$ y \bar{Z} son parámetros

- 3) Dotación: En cada período el agente representativo es dotado de una unidad de tiempo $N_t = 1$. Además es dotado con K_{-1} en $t = 0$.
- 4) Información: C_t, N_t y K_t son elegidos en base a la información de \mathfrak{I}_t hasta el tiempo t .

El modelo se resuelve mediante la maximización del problema del planeador social:

$$\max_{(C_t, K_t)^\infty} E \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} \right] \quad (4)$$

s. a

$$K_{-1}, Z_0$$

$$C_t + K_t = Z_t K_{t-1}^\rho + (1-\delta)K_{t-1} \quad (2)$$

$$\log(Z_t) = (1-\psi)\log(\bar{Z}) + \psi\log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (3)$$

⁴Se usaran letras mayúsculas para indicar variables de "nivel" y minúsculas para denotar log-desviaciones

En la siguiente sección se calculan las condiciones necesarias de primer orden de optimalidad usando el *Lagrangeano*:

$$L = \max_{(C_t, K_t)^\infty} E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - \lambda_t [C_t + K_t - Z_t K_{t-1}^\rho - (1-\delta)K_{t-1}] \right\} \right\} \quad (4.1)$$

- I. *Encontrar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio. Puntualmente las condiciones de primer orden.*

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \right] : \beta^t [C_t + K_t - Z_t K_{t-1}^\rho - (1-\delta)K_{t-1}] = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \right] : C_t + K_t - Z_t K_{t-1}^\rho - (1-\delta)K_{t-1} = 0 \quad (5)$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial C_t} \right] : \beta^t \left[\frac{(1-\eta)C_t^{-\eta}}{1-\eta} - \lambda_t \right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial C_t} \right] : C_t^{-\eta} - \lambda_t = 0 \quad (6)$$

Para calcular $\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right]$ usaremos el siguiente truco:

$$\begin{aligned} L &= \max_{(C_t, K_t)^\infty} E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - \lambda_t [C_t + K_t - Z_t K_{t-1}^\rho - (1-\delta)K_{t-1}] \right\} \right\} \\ &= \max_{(C_t, K_t)^\infty} E \left\{ \dots + \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - \lambda_t [C_t + K_t - Z_t K_{t-1}^\rho - (1-\delta)K_{t-1}] \right\} \dots \right. \\ &\quad \left. + \beta^{t+1} \left\{ \frac{C_{t+1}^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - \lambda_{t+1} [C_{t+1} + K_{t+1} - Z_{t+1} K_t^\rho - (1-\delta)K_t] \right\} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Usamos la Esperanza E_t porque la información en $t + 1$ no es conocida en t , cuando se elige K_t

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta^t (-\lambda_t) + \beta^{t+1} E_t \left[-\lambda_{t+1} [-\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} - (1-\delta)] \right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta^t \left\{ -\lambda_t + \beta E_t \left[\lambda_{t+1} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} + (1-\delta)] \right] \right\} = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : -\lambda_t + \beta E_t \left[\lambda_{t+1} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} + (1-\delta)] \right] = 0 \quad (7)$$

- II. *Escoger parámetros y encontrar el estado estacionario*

Por (5) obtenemos

$$C_t = \rho Z_t K_{t-1}^\rho + (1 - \delta)K_{t-1} - K_t \quad (8)$$

De (6):

$$\lambda_t = C_t^{-\eta} \quad (9)$$

De (7)

$$\beta E_t [\lambda_{t+1} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} + (1 - \delta)]] = \lambda_t$$

Reemplazamos por $\lambda_t = C_t^{-\eta}$:

$$\beta E_t [C_{t+1}^{-\eta} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} + (1 - \delta)]] = C_t^{-\eta}$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} + (1 - \delta)] \right] = 1$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (10)$$

Tal que $R_{t+1} = \rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} + (1 - \delta)$

$$R_t = \rho Z_t K_{t-1}^{\rho-1} + (1 - \delta) \quad (11)$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho \quad (12)$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t, \varepsilon_t \text{ i. i. d } N(0, \sigma^2) \quad (3)$$

Por lo tanto estamos en condiciones de obtener el estado estacionario de las variables.

De (8) obtenemos

$$\bar{C} = \bar{Z} \bar{K}^\rho + (1 - \delta) \bar{K} - \bar{K}$$

De (11) obtenemos

$$\bar{R} = \rho \bar{Z} \bar{K}^{\rho-1} + (1 - \delta)$$

y

$$\left[\frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho \bar{Z}} \right]^{\frac{-1}{\rho-1}} = \bar{K}$$

$$\bar{K} = \left[\frac{\rho \bar{Z}}{\bar{R} - (1 - \delta)} \right]^{\frac{1}{\rho-1}}$$

De (10) obtenemos

$$1 = \beta \bar{R}$$

De (12) obtenemos

$$\bar{Y} = \bar{Z}\bar{K}^\rho$$

De (11) y (12) obtenemos

$$\bar{R} = \frac{\rho\bar{Y}}{\bar{K}} + (1 - \delta)$$

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho}$$

Con los resultados anteriores podemos probar que

$$\bar{C} = \bar{Z}\bar{K}^\rho + (1 - \delta)\bar{K} - \bar{K} = \bar{Z}\bar{K}^\rho + \bar{K} - \delta\bar{K} - \bar{K} = \bar{Z}\bar{K}^\rho - \delta\bar{K}$$

$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta\bar{K}$$

$$\bar{Y} = \bar{C} + \delta\bar{K}$$

Calibración:

Usamos los números calibrados por Uhlig (1998)

$$\bar{Z} = 1,000$$

$$\rho = 0,360$$

$$\delta = 0,025$$

$$\bar{R} = 1,010 \text{ 1\% Tasa de interés real por trimestre}$$

$$\eta = 1,000$$

$$\psi = 0,950$$

$$\sigma_\varepsilon = 0,712$$

$$\beta = 0,99$$

Obtenemos los estados estacionarios:

$$\bar{Y} = 3,710$$

$$\bar{K} = 38,161$$

$$\bar{C} = 2,756$$

III. *Log-linealizar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio del sistema para hacer las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario.*

A continuación vamos a Log-linealizar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio del sistema para hacer las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario.

La desviación logarítmica de C_t de su estado estacionario \bar{C} es:

$$c_t = \ln\left(\frac{C_t}{\bar{C}}\right)$$

$$c_t = \ln(C_t) - \ln(\bar{C})$$

$$C_t = e^{c_t + \ln(\bar{C})} = e^{c_t} e^{\ln(\bar{C})} = \bar{C} e^{c_t} \approx \bar{C}(1 + c_t)$$

Siguiendo este método se obtiene las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario (Ver al Anexo 1: Solución a las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario para mayor detalle).

A) Para la ecuación del consumo

De la ecuación (8):

$$C_t = +Z_t K_{t-1}^\rho + (1 - \delta)K_{t-1} - K_t \quad (8)$$

Se obtiene

$$0 \approx -\frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_t + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} + \left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t - c_t \quad (13)$$

Podemos ver que si la productividad z_t o el capital disponible k_{t-1} están por encima del estado estacionario la producción total es más elevada por lo que se puede afrontar un mayor consumo. Por el contrario si aumenta la inversión en la forma de mayor k_t el consumo disminuye ceteris paribus.

B) Para la ecuación del retorno

De la ecuación (11):

$$R_t = \rho Z_t K_{t-1}^{\rho-1} + (1 - \delta) \quad (11)$$

Se obtiene:

$$0 \approx -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t - r_t \quad (14)$$

C) Para la ecuación del output

De la ecuación (12):

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho \quad (12)$$

Se obtiene:

$$0 \approx -y_t + \rho k_{t-1} + z_t \quad (15)$$

D) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):

De la ecuación (10):

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (10)$$

Se obtiene:

$$-\eta c_t \approx E_t [-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (16)$$

Se observa que la desviación porcentual de la tasa marginal de sustitución dada por $\eta(c_t - c_{t+1})$ en su estado estacionario debe igualar al negativo de la expectativa tasa de interés r_{t+1} . Específicamente elevadas expectativas de tasa de interés coincide con baja tasas marginal de sustitución. Por ejemplo si se espera un aumento en el consumo solo una elevada tasa de interés puede prevenir a los agentes tomar préstamos contra el alza futura.

E) Para la ecuación de la productividad de los factores

De la ecuación (3):

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t \text{ tal que } \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (3)$$

Se obtiene:

$$z_t = \psi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (18)$$

F) Resultados:

Por lo tanto las ecuaciones:

$$C_t = +Z_t K_{t-1}^\rho + (1 - \delta)K_{t-1} - K_t \quad (8)$$

$$R_t = \rho Z_t K_{t-1}^{\rho-1} + (1 - \delta) \quad (11)$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho \quad (12)$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (10)$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (3)$$

Obtuvimos los log-desvíos del estado estacionario

$$0 \approx -\frac{\bar{K}}{\bar{C}} k_t + \frac{\bar{K}}{\beta \bar{C}} k_{t-1} + \left(1 + \delta \frac{\bar{K}}{\bar{C}} \right) z_t - c_t \quad (13)$$

$$0 \approx -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t - r_t \quad (14)$$

$$0 \approx -y_t + \rho k_{t-1} + z_t^5 \quad (15)$$

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (16)$$

$$z_t = \psi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (18)$$

IV. Resolver vía la ley de equilibrio recursivo del movimiento mediante el método de coeficientes indeterminados.

Los datos que tenemos en t son las variables estado k_{t-1} y z_t . Por lo tanto tenemos que encontrar k_t, y_t, r_t, c_t y z_t . Vamos a postular una ley de movimiento recursivo lineal⁶:

$$k_t = v_{kk} k_{t-1} + v_{kz} z_t \quad (19)$$

$$y_t = v_{yk} k_{t-1} + v_{yz} z_t \quad (20)$$

$$r_t = v_{rk} k_{t-1} + v_{rz} z_t \quad (21)$$

$$c_t = v_{ck} k_{t-1} + v_{cz} z_t \quad (22)$$

$$z_t = v_{zk} k_t + v_{zz} z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (23)$$

La idea es calcular $v_{kk}, v_{kz}, v_{yk}, v_{yz}, v_{rk}, v_{rz}, v_{ck}, v_{cz}, v_{zk}, v_{zz}$

A) Para la ecuación del consumo

⁵ La tercera ecuación es superflua para el cálculo de la dinámica del modelo. Sin embargo la agregamos para poder hacer los cálculos de las correlaciones con el producto (y_t)

⁶ Para mayor detalle en el proceso de solución de las ecuaciones mirar el Anexo 2: Resolución vía la ley de equilibrio recursivo del movimiento mediante el método de coeficientes indeterminados.

$$0 \approx -\frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_t + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} + \left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t - c_t \quad (13)$$

$$c_t = v_{ck}k_{t-1} + v_{cz}z_t \quad (22)$$

La solución es:

$$v_{ck} = \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\bar{K}}{\bar{C}} \quad (24)$$

$$v_{cz} = \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}}v_{kz} \quad (25)$$

B) Para la ecuación del retorno

$$0 \approx -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t - r_t \quad (14)$$

$$r_t = v_{rk}k_{t-1} + v_{rz}z_t \quad (21)$$

La solución es:

$$v_{rk} = -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) \quad (26)$$

$$v_{rz} = [1 - \beta(1 - \delta)] \quad (27)$$

C) Para la ecuación del output

$$0 \approx -y_t + \rho k_{t-1} + z_t \quad (15)$$

$$y_t = v_{yk}k_{t-1} + v_{yz}z_t \quad (20)$$

La solución es:

$$v_{yk} = \rho \quad (28)$$

$$v_{yz} = 1 \quad (29)$$

D) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (16)$$

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (18)$$

$$k_t = v_{kk}k_{t-1} + v_{kz}z_t \quad (19)$$

$$c_t = v_{ck}k_{t-1} + v_{cz}z_t \quad (22)$$

La solución es:

$$v_{kk} = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{4}{\beta}}}{2} \text{ tal que } \gamma = \left(\frac{\bar{C}}{\eta\bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) + \frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (30)$$

$$v_{kz} = \frac{\psi v_{rz} + \eta(1 - \psi) \frac{\bar{Y}}{\bar{C}}}{-v_{rk} + \eta v_{ck} + \eta(1 - \psi) \frac{\bar{K}}{\bar{C}}} \quad (31)$$

E) Para la ecuación de la productividad de los factores

$$z_t = \psi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

$$z_t = v_{zk} k_t + v_{zz} z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (23)$$

La solución es:

$$v_{zk} = 0 \quad (32)$$

$$v_{kz} = \psi \quad (33)$$

F) Resultados:

Entonces tenemos que:

$$v_{ck} = \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\bar{K}}{\bar{C}} \quad (24)$$

$$v_{cz} = \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}} v_{kz} \quad (25)$$

$$v_{rk} = -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) \quad (26)$$

$$v_{rz} = [1 - \beta(1 - \delta)] \quad (27)$$

$$v_{yk} = \rho \quad (28)$$

$$v_{yz} = 1 \quad (29)$$

$$v_{kk} = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{4}{\beta}}}{2} \text{ tal que } \gamma = \left(\frac{\bar{C}}{\eta \bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) + \frac{1}{\beta} + 1 \right) \quad (30)$$

$$v_{kz} = \frac{\psi v_{rz} + \eta(1 - \psi) \frac{\bar{Y}}{\bar{C}}}{-v_{rk} + \eta v_{ck} + \eta(1 - \psi) \frac{\bar{K}}{\bar{C}}} \quad (31)$$

$$v_{zk} = 0 \quad (32)$$

$$v_{kz} = \psi \quad (33)$$

La solución con los datos calibrados será:

$$k_t = 0,965 k_{t-1} + 0,075 z_t \quad (34)$$

$$z_{t+1} = 0,950 z_t + \varepsilon_t \quad (35)$$

$$y_t = 0,360 k_{t-1} + 1,000 z_t \quad (36)$$

$$c_t = 0,618 k_{t-1} + 0,305 z_t \quad (37)$$

$$r_t = -0,022 k_{t-1} + 0,035 z_t \quad (38)$$

Parte II: Modelo de ciclo de economía real (RBC)

El modelo de ciclo de economía real estocástico es un modelo dinámico, estocástico de equilibrio general (DGSE). Vamos a presentar el problema del consumidor y vamos a usar el método del planificador social para resolver el modelo. A diferencia de los modelos de crecimiento neoclásico estos modelos incorporan al análisis del equilibrio general las horas trabajadas por los individuos. Particularmente, para este trabajo vamos a tomar el modelo de Hansen (1985) que supone individuos libres que ajustan libremente las horas trabajadas y son individuos que si trabajan, siempre van a trabajar. Además supone que si el individuo trabaja será por jornada completa. Caso contrario no trabaja.

A continuación se detalla el *ambiente* del modelo:

1) Preferencias

$$U = E \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - AN_t \right] \quad (39)$$

En donde C_t es consumo⁷, $0 < \beta < 1$ es el factor de descuento y η es el coeficiente de aversión al riesgo.

2) Tecnologías: Asumimos una función de producción de Cobb-Douglas:

A partir de las siguientes igualdades:

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (40)$$

$$K_t = I_t + (1 - \delta)K_{t-1} \quad (41)$$

$$K_t - (1 - \delta)K_{t-1} = I_t \quad (41.1)$$

$$C_t + I_t = Y_t \quad (42)$$

Obtenemos:

$$C_t + I_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}$$

$$C_t + K_t - (1 - \delta)K_{t-1} = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}$$

$$C_t + K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (43)$$

Nótese que es la misma función de producción Cobb-Douglas asumida para el modelo de crecimiento estocástico neoclásica en donde K_t es el capital, N_t es trabajo, $0 < \rho < 1$ (cuota de capital) y $0 < \delta < 1$ (tasa de depreciación del capital) son parámetros y Z_t la productividad de los factores que es exógena y depende de:

⁷Se usaran letras mayúsculas para indicar variables de "nivel" y minúsculas para denotar log-desviaciones

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (44)$$

En donde $0 < \psi < 1$ y \bar{Z} son parámetros. A diferencia del modelo de crecimiento estocástico neoclásico en este modelo $nN_t > 0$.

- 3) Dotación: En cada período el agente representativo es dotado con K_{-1} en $t = 0$.
- 4) Información: C_t, N_t y K_t son elegidos en base a la información de \mathfrak{I}_t hasta el tiempo t .

El modelo se resuelve mediante la maximización del problema del planeador social:

$$\max_{(C_t, K_t)^\infty} E \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - AN_t \right] \quad (45)$$

s. a

$$C_t + K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (43)$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (44)$$

En la siguiente sección se calculan las condiciones necesarias de primer orden de optimalidad usando el *Lagrangeano*:

$$L = \max_{(C_t, K_t)^\infty} E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - AN_t - \lambda_t [C_t + K_t - (1 - \delta)K_{t-1} - Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}] \right\} \right\} \quad (46)$$

- I. *Encontrar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio. Puntualmente las condiciones de primer orden.*

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \right]: -\beta^t [C_t + K_t - (1 - \delta)K_{t-1} - Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}] = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \right]: -\beta^t [C_t + K_t - (1 - \delta)K_{t-1} - Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}] = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \right]: C_t + K_t - (1 - \delta)K_{t-1} = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (47^8)$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial C_t} \right]: \beta^t \left[\frac{(1 - \eta)C_t^{-\eta}}{1 - \eta} - \lambda_t \right] = 0$$

⁸ Nótese que es la ecuación (5) obtenida en el modelo de crecimiento estocástico neoclásico.

$$\left[\frac{\partial L}{\partial C_t} \right] : C_t^{-\eta} = \lambda_t \quad (48)^9$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial N_t} \right] : \beta^t [-A + \lambda_t(1 - \rho)Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{-\rho}] = 0$$

Cancelamos β^t y multiplicamos y dividimos por N_t

$$\left[\frac{\partial L}{\partial N_t} \right] : -A + \lambda_t(1 - \rho)Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{-\rho} \frac{N_t}{N_t} = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial N_t} \right] : -A + C_t^{-\eta}(1 - \rho) \frac{Y_t}{N_t} = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial N_t} \right] : A = C_t^{-\eta}(1 - \rho) \frac{Y_t}{N_t} \quad (49)$$

$$N_t = C_t^{-\eta}(1 - \rho) \frac{Y_t}{A} \quad (49.1)$$

Para calcular $\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right]$ usaremos el siguiente truco:

$$\begin{aligned} L &= \max_{(C_t, K_t)^\infty} E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - AN_t - \lambda_t [C_t + K_t - (1-\delta)K_{t-1} - Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}] \right\} \right\} \\ &= \max_{(C_t, K_t)^\infty} E \left\{ \dots + \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - AN_t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda_t [C_t + K_t - (1-\delta)K_{t-1} - Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}] \right\} \dots + \beta^{t+1} \left\{ \frac{C_{t+1}^{1-\eta} - 1}{1-\eta} - AN_{t+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda_{t+1} [C_{t+1} + K_{t+1} - (1-\delta)K_t - Z_{t+1} K_t^\rho N_{t+1}^{1-\rho}] \right\} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Usamos la Esperanza E_t porque la información en $t + 1$ no es conocida en t , cuando se elige K_t

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta^t (-\lambda_t) + \beta^{t+1} E_t \left[-\lambda_{t+1} [-\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} N_{t+1}^{1-\rho} - (1-\delta)] \right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta^t \left\{ -\lambda_t + \beta E_t \left[\lambda_{t+1} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} N_{t+1}^{1-\rho} + (1-\delta)] \right] \right\} = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : -\lambda_t + \beta E_t \left[\lambda_{t+1} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} N_{t+1}^{1-\rho} + (1-\delta)] \right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta E_t \left[\lambda_{t+1} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} N_{t+1}^{1-\rho} + (1-\delta)] \right] = \lambda_t$$

⁹ Nótese que es la ecuación (6) obtenida en el modelo de crecimiento estocástico neoclásico.

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} N_{t+1}^{1-\rho} + (1-\delta)] \right] = 1$$

Reemplazamos por la ecuación (48) $\left[\frac{\partial L}{\partial C_t} \right] : C_t^{-\eta} = \lambda_t$ (48)

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta E_t \left[\frac{C_{t+1}^{-\eta}}{C_t^{-\eta}} [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} N_{t+1}^{1-\rho} + (1-\delta)] \right] = 1$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta E_t \left[\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [\rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} N_{t+1}^{1-\rho} + (1-\delta)] \right] = 1$$

Llamamos $R_{t+1} = \rho Z_{t+1} K_t^{\rho-1} N_{t+1}^{1-\rho} + (1-\delta)$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial K_t} \right] : \beta E_t \left[\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta R_{t+1} \right] = 1 \quad (50)^{10}$$

Entonces,

$$R_t = \rho Z_t K_{t-1}^{\rho-1} N_t^{1-\rho} + (1-\delta)$$

$$R_t = \rho Z_t \frac{K_{t-1}^\rho}{K_{t-1}} N_t^{1-\rho} + (1-\delta)$$

Por la ecuación (40) $Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}$ tenemos,

$$R_t = \rho \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1-\delta) \quad (51)^{11}$$

La ecuación (50) es la ecuación de precios de activos (asset pricing equation) de Lucas (1978) que aparece típicamente en estos modelos.

II. Escoger parámetros y encontrar el estado estacionario

De (47) obtenemos

$$C_t = -K_t + (1-\delta)K_{t-1} + Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (52)$$

Además tenemos,

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (45)$$

$$\log(Z_t) = (1-\psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (44)$$

¹⁰ Nótese que es la ecuación (10) obtenida en el modelo de crecimiento estocástico neoclásico.

¹¹ Nótese que es la ecuación (11) obtenida en el modelo de crecimiento estocástico neoclásico pero en vez que $Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho$ en este caso $Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}$.

De (40) $Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho}$ obtenemos el siguiente estado estacionario:

$$\bar{Y} = \bar{Z} \bar{K}^\rho \bar{N}^{1-\rho}$$

De (41.1) $K_t = I_t + (1 - \delta)K_{t-1}$ obtenemos los siguientes estados estacionarios:

$$\bar{K} = \bar{I} + (1 - \delta)\bar{K}$$

$$\bar{I} = \bar{K} + \delta\bar{K} - \bar{K}$$

$$\bar{I} = \delta\bar{K}$$

De (49) $A = C_t^{-\eta} (1 - \rho) \frac{Y_t}{N_t}$ obtenemos los siguientes estados estacionarios:

$$A = \bar{C}^{-\eta} (1 - \rho) \frac{\bar{Y}}{\bar{N}}$$

$$\bar{N} = \bar{C}^{-\eta} (1 - \rho) \frac{\bar{Y}}{A}$$

De (50) $\beta E_t \left[\left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta R_{t+1} \right] = 1$ obtenemos el siguiente estado estacionario:

$$1 = \beta \bar{R}$$

De (51) $R_t = \rho \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1 - \delta)$ obtenemos los siguientes estados estacionarios:

$$\bar{R} = \frac{\rho \bar{Y}}{\bar{K}} + (1 - \delta)$$

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho}$$

$$\bar{Y} = \frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho} \bar{K}$$

Recordemos que $\bar{Y} = \bar{Z} \bar{K}^\rho \bar{N}^{1-\rho}$

$$\bar{R} = \frac{\rho \bar{Z} \bar{K}^\rho \bar{N}^{1-\rho}}{\bar{K}} + (1 - \delta)$$

$$\bar{R} - (1 - \delta) = \frac{\rho \bar{Z} \bar{K}^\rho \bar{N}^{1-\rho}}{\bar{K}}$$

$$\frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho \bar{Z} \bar{N}^{1-\rho}} = \frac{\bar{K}^\rho}{\bar{K}}$$

$$\frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho \bar{Z} \bar{N}^{1-\rho}} = \bar{K}^{\rho-1}$$

$$\left[\frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho \bar{Z} \bar{N}^{1-\rho}} \right]^{\frac{1}{\rho-1}} = \bar{K}$$

$$\left[\frac{\bar{Y}}{\bar{K} \bar{N}^{1-\rho}} \right]^{\frac{1}{\rho-1}} = \bar{K}$$

$$\left[\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} \right]^{\frac{1}{\rho-1}} (\bar{N}^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}} = \bar{K}$$

$$\bar{K} = \left[\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} \right]^{\frac{1}{\rho-1}} \bar{N}$$

Con los resultados anteriores podemos probar que

$$\bar{C} = \bar{Z} \bar{K}^\rho \bar{N}^{1-\rho} + (1 - \delta) \bar{K} - \bar{K} = \bar{Z} \bar{K}^\rho \bar{N}^{1-\rho} + \bar{K} - \delta \bar{K} - \bar{K} = \bar{Z} \bar{K}^\rho - \delta \bar{K}$$

$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta \bar{K}$$

$$\bar{Y} = \bar{C} + \delta \bar{K}$$

Calibración:

Usamos los números calibrados por Uhlig (1998)

$$\bar{Z} = 1,000$$

$$\bar{N} = \frac{1}{3}$$

$$\rho = 0,360$$

$$\delta = 0,025$$

$$\bar{R} = 1,010 \text{ 1\% Tasa de interés real por trimestre}$$

$$\eta = 1,000$$

$$\psi = 0,950$$

$$\sigma_\varepsilon = 0,712$$

$$\beta = 0,99$$

$$\beta = 1,783$$

$$A = 2,585$$

Obtenemos los estados estacionarios:

$$\bar{K} = 12,720$$

$$\bar{Y} = 1,237$$

$$\bar{C} = 0,919$$

$$\bar{I} = 0,318$$

III. *Log-linealizar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio del sistema para hacer las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario.*

A continuación, tal como hicimos con el modelo de crecimiento estocástico neoclásico vamos a Log-linealizar las ecuaciones necesarias caracterizando el equilibrio del sistema para hacer las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario.

Siguiendo el método de solución usado en el modelo de crecimiento estocástico neoclásico se obtiene las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario (Ver al Anexo 3: Solución a las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario del modelo RBC para mayor detalle)

A) Para la ecuación de inversión

De la desviación logarítmica de la inversión y la ecuación (41.1) tenemos:

$$I_t = \bar{I}e^{i_t} \approx \bar{I}(1 + i_t) \quad \text{Desviación logarítmica de la inversión}$$

$$I_t = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \quad (41.1)$$

Se obtiene:

$$k_t \approx \delta i_t + (1 - \delta)k_{t-1} \quad (53)$$

B) Para la ecuación de empleo

De la desviación logarítmica del empleo y la ecuación (49.1) tenemos:

$$N_t = \bar{N}e^{n_t} \approx \bar{N}(1 + n_t) \quad \text{Desviación logarítmica del empleo}$$

$$N_t = C_t^{-\eta}(1 - \rho)\frac{Y_t}{A} \quad (49.1)$$

Se obtiene:

$$0 \approx y_t - \eta c_t - n_t \quad (54)$$

C) Para la ecuación del consumo

De la desviación logarítmica del consumo, la ecuación (40) y la ecuación (52):

$$C_t = \bar{C}e^{c_t} \approx \bar{C}(1 + c_t) \quad \text{Desviación logarítmica del consumo}$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (4)$$

$$C_t = -K_t + (1 - \delta)K_{t-1} + Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (52)$$

Se obtiene:

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t - \bar{I}i_t \quad (55)$$

D) Para la ecuación del retorno

A partir de la desviación logarítmica del retorno, la ecuación (40) y la ecuación (51):

$$R_t = \bar{R}e^{r_t} \approx \bar{R}(1 + r_t) \quad \text{Desviación logarítmica del retorno}$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (40)$$

$$R_t = \rho \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1 - \delta) \quad (51)$$

Se obtiene:

$$0 \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} (y_t - k_{t-1}) - \bar{R}r_t \quad (56)$$

E) Para la ecuación del output

A partir de la desviación logarítmica del output y la ecuación (40):

$$Y_t = \bar{Y}e^{y_t} \approx \bar{Y}(1 + y_t) \quad \text{Desviación logarítmica del output}$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (40)$$

Se obtiene:

$$y_t \approx \rho k_{t-1} + z_t + n_t(1 - \rho) \quad (57)$$

$$0 \approx \rho k_{t-1} - y_t + n_t(1 - \rho) + z_t \quad (58)$$

F) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):

A partir de la desviación logarítmica del consumo, del retorno y de la ecuación (50):

$$C_t = \bar{C}e^{c_t} \approx \bar{C}(1 + c_t) \quad \text{Desviación logarítmica del consumo}$$

$$R_t = \bar{R}e^{r_t} \approx \bar{R}(1 + r_t) \quad \text{Desviación logarítmica del retorno}$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (50)$$

Se obtiene:

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (59)$$

G) Para la ecuación de la productividad de los factores

A partir de la desviación logarítmica de la productividad de los factores y de la ecuación (44):

$$Z_t = \bar{z}e^{z_t} \approx \bar{Z}(1 + z_t) \quad \text{Desviación logarítmica de la productividad de los factores}$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t \text{ tal que } \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (44)$$

Se obtiene:

$$z_t = \psi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (60)$$

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (61)$$

IV. *Resolver el sistema de ecuaciones usando la representación recursiva de la solución estable del sistema lineal de ecuaciones diferenciales*

De las ecuaciones:

$$C_t = -K_t + (1 - \delta)K_{t-1} + Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (52)$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (40)$$

$$N_t = C_t^{-\eta} (1 - \rho) \frac{Y_t}{A} \quad (49.1)$$

$$R_t = \rho \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1 - \delta) \quad (51)$$

$$I_t = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \quad (41.1)$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (50)$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t \text{ tal que } \varepsilon_t \sim i. i. d N(0, \sigma^2) \quad (44)$$

Obtuvimos los log-desvíos del estado estacionario

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t - \bar{I}i_t \quad (55)$$

$$0 \approx \rho k_{t-1} - y_t + n_t(1 - \rho) + z_t \quad (58)$$

$$0 \approx y_t - \eta c_t - n_t \quad (54)$$

$$0 \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} (y_t - k_{t-1}) - \bar{R}r_t \quad (56)$$

$$k_t \approx \delta i_t + (1 - \delta)k_{t-1} \quad (53)$$

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (59)$$

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (60)$$

Vamos a escribir el modelo como un vector diferencial de primer orden.

$$AE_t[Z_{t+1}] = BZ_t$$

En donde Z_t tiene todas las variables del modelo y A y B son matrices cuadradas:

$$Z_t = \begin{pmatrix} k_{t-1} \\ z_t \\ y_t \\ c_t \\ n_t \\ i_t \\ r_t \end{pmatrix} \quad Z_{t+1} = \begin{pmatrix} k_t \\ z_{t+1} \\ y_{t+1} \\ c_{t+1} \\ n_{t+1} \\ i_{t+1} \\ r_{t+1} \end{pmatrix}$$

Z_t está ordenada de la siguiente manera:

$$Z_t = \begin{bmatrix} \text{variable estado endógena } (k_{t-1}) \\ \text{variable estado exógena } (z_t) \\ \text{variables puente (resto de las variables)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{Y} & -\bar{C} & 0 & -\bar{I} & 0 \\ \rho & 1 & -1 & 0 & (1-\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\eta & -1 & 0 & 0 \\ -\rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} & 0 & \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} & 0 & 0 & 0 & -\bar{R} \\ (1-\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones vamos a usar la descomposición de Schur usada por Klein (2000) tal que

$Z_t = [k(t); u(t)]$ / $k(t)$ contiene las variables estado y $u(t)$ las variables puente

$$u(t) = F * k(t)$$

$$k(t) = P * k(t) + \epsilon$$

Para nuestro modelo es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ c_t \\ n_t \\ i_t \\ r_t \end{pmatrix} = F * \begin{pmatrix} k_{t-1} \\ z_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_t \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = P * \begin{pmatrix} k_{t-1} \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_t \end{pmatrix}$$

Usando el método de Klein (2000) se obtiene:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0,055 & 1,943 \\ 0,532 & 0,470 \\ -0,476 & 1,473 \\ -1,321 & 6,199 \\ -0,033 & 0,067 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,942 & 0,155 \\ 0,000 & 0,950 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto las *policy functions* son:

$$k_t = 0,942k_{t-1} + 0,155 z_t \quad (62)$$

$$z_{t+1} = 0,950 z_t + \varepsilon_t \quad (63)$$

$$y_t = 0,055k_{t-1} + 1,943 z_t \quad (64)$$

$$c_t = 0,532k_{t-1} + 0,470 z_t \quad (65)$$

$$n_t = -0,476k_{t-1} + 1,473 z_t \quad (66)$$

$$i_t = -1,321k_{t-1} + 6,199 z_t \quad (67)$$

$$r_t = -0,033k_{t-1} + 0,067 z_t \quad (68)$$

Parte III: Análisis de la solución y resultados empíricos

I. Análisis de la solución a través de un análisis de impulso-respuesta y del filtro de HP.

Un análisis de impulso respuesta muestra la reacción de las variables explicadas en el sistema ante cambio en los errores. Un cambio (shock) en una variable en el período t afectará directamente a la propia variable y se transmitirá al resto de las variables explicadas. En este modelo veremos qué pasa con las variables cuando $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_t = 0 \forall t \neq 0$. El análisis de impulso respuesta para el modelo de crecimiento estocástico neoclásico se muestra en la Ilustración 1 y para el modelo RBC en la Ilustración 2. El eje horizontal representa los trimestres posteriores al shock y el vertical, el porcentaje de desvío respecto al estado estacionario.

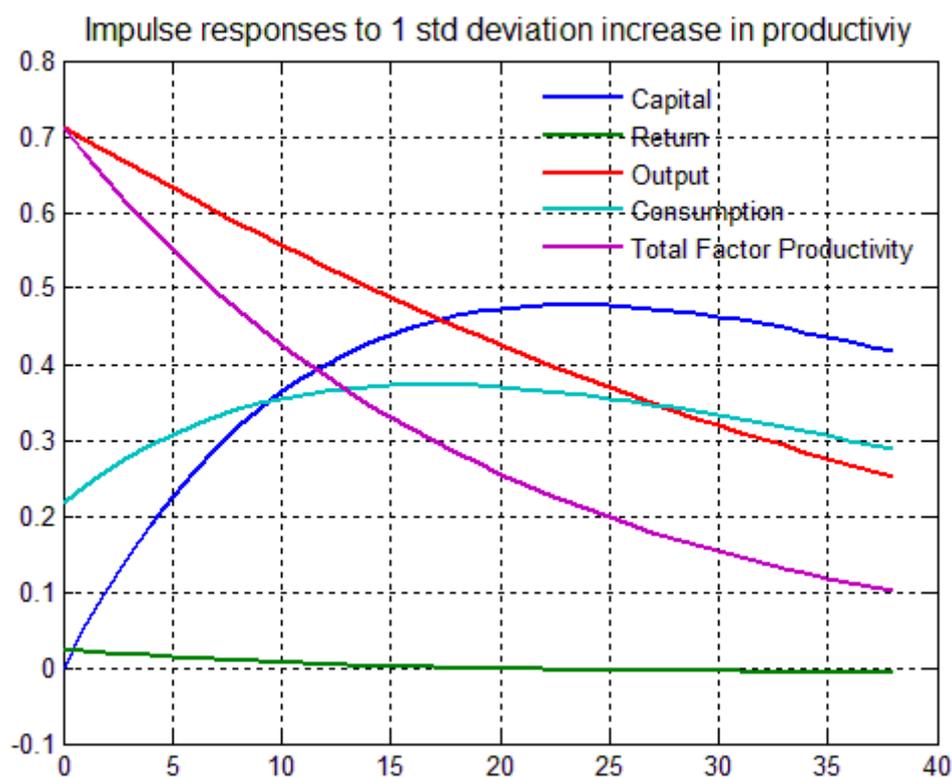


Ilustración 1 Función de Impulso respuesta para el modelo de crecimiento estocástico neoclásico

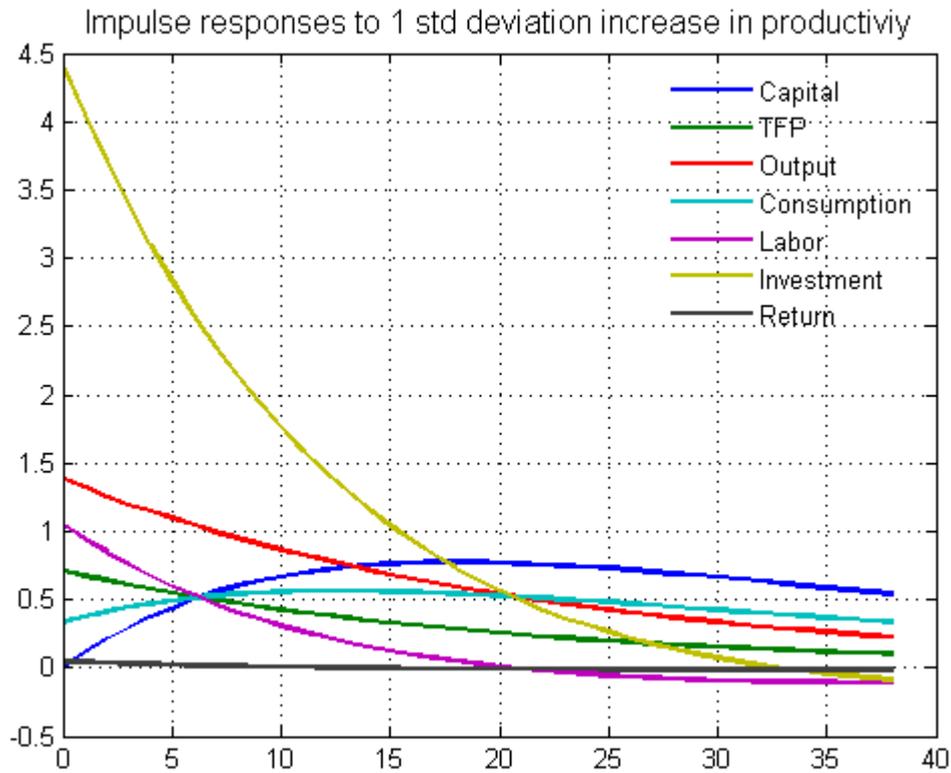


Ilustración 2 Función de Impulso respuesta para el modelo RBC

Para mostrar el comportamiento del componente de la tendencia en los modelos mencionados en el presente trabajo usaremos el Filtro de Hodrick-Prescott (HP)

El filtro HP asume que la serie temporal de interés x_t puede ser descompuesta entre el componente cíclico u_t y de tendencia z_t .

$$x_t = z_t + u_t \quad (69)$$

Para medir qué tan cerca el componente tendencial está de la serie original vamos a usar

$$\sum_{t=0}^t (x_t - z_t)^2 \quad (70)$$

Vamos a querer que la pendiente de la tendencia sea lo más suave posible por lo que se penalizará los cambios de la pendiente del componente tendencial. La penalidad va a ser definida como la suma del cambio al cuadrado en la pendiente del componente tendencial:

$$\sum_{t=0}^t [(z_{t+1} - z_t) - (z_t - z_{t-1})]^2 = \sum_{t=0}^t (z_{t+1} - 2z_t + z_{t-1})^2 \quad (71)$$

Para determinar qué tan importante es evitar cambios bruscos de la pendiente del componente tendencial vamos a multiplicar a la minimización el cambio de la pendiente del componente tendencial por una constante $\lambda > 0$ ¹² que será la penalidad en la variabilidad del componente tendencial (o de crecimiento) de la serie. Cuanta más alta sea la penalidad más suave será la solución de la serie.

Por lo tanto el componente tendencial del Filtro HP resuelve la siguiente optimización

$$\min_{\{z_t\}} \sum_{t=0}^t (x_t - z_t)^2 + \lambda \sum_{t=0}^t (z_{t+1} - 2z_t + z_{t-1})^2 \quad (72)$$

Para los datos generados por la simulación de los modelos presentados de las variables de consumo y de output tenemos la Ilustración 3 y la Ilustración 4:

Filtro-HP -Simulación del modelo neoclásico de crecimiento: PBI y consumo

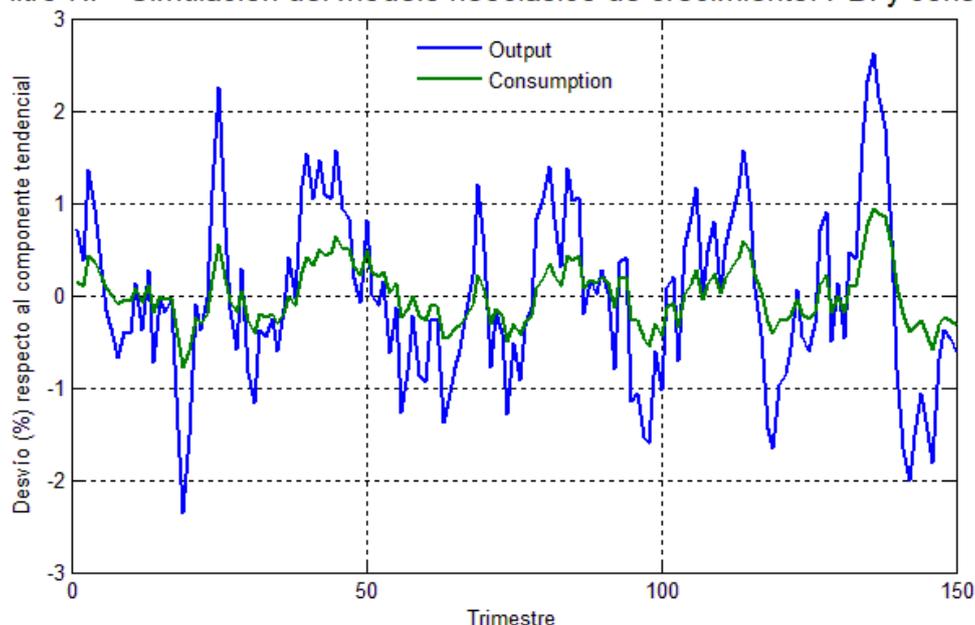
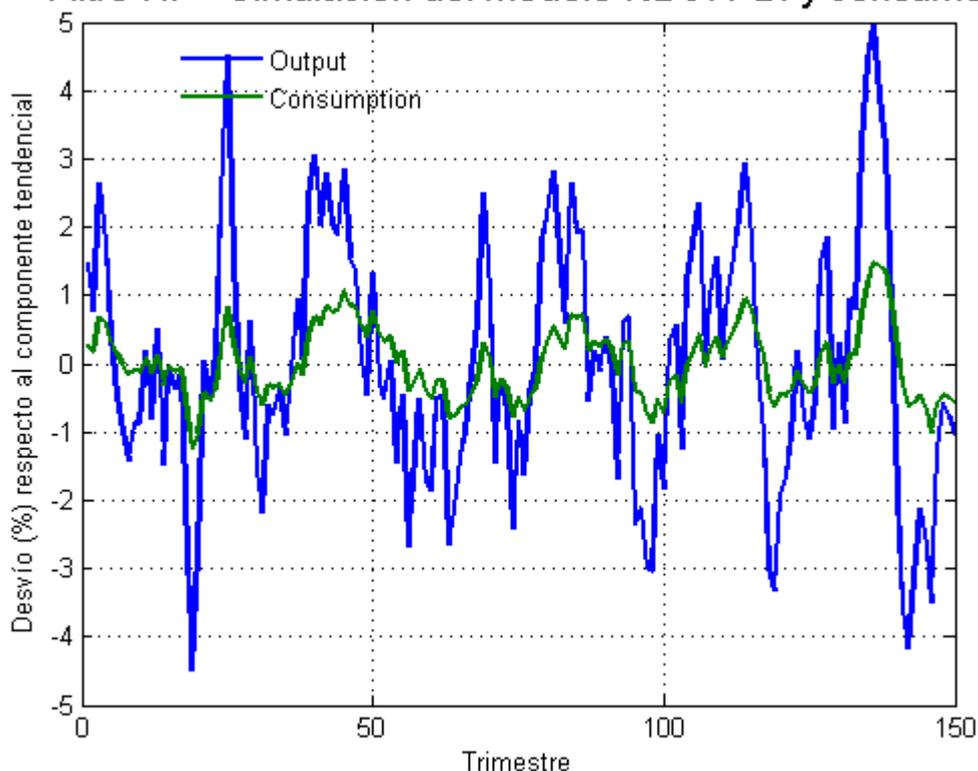


Ilustración 3 Desvío porcentual respecto al componente tendencial para el PBI y el consumo usando el filtro HP

Se observa que la variación del componente del consumo respecto al componente de la tendencia es menor que la del output y tienen una correlación positiva. En efecto el desvío estándar del Output y del consumo respecto al desvío porcentual del componente tendencial es de 0,926 y 0,317 respectivamente y la correlación es de 0,92.

¹² Para datos trimestrales Hodrick & Prescott (1981) proponen usar $\lambda = 1.600$

Filtro-HP - Simulación del modelo RBC: PBI y consumo



Al igual que el modelo de crecimiento estocástico neoclásicos se observa que la variación del componente del consumo respecto al componente de la tendencia es menor que la del output y tienen una correlación positiva. En efecto el desvío estándar del Output y del consumo respecto al desvío porcentual del componente tendencial es de 1,796 y 0,520 respectivamente y la correlación es de 0,87. En el modelo RBC el desvío estándar es mayor que en el modelo de crecimiento estocástico neoclásico y la correlación es más baja.

II. Resultados empíricos caso Japón

En esta sección analizamos la correlación entre el output y el consumo con diferentes rezagos en el tiempo. Tomamos los datos trimestrales del PBI y el consumo de Japón desde el 01/01/1994 y 01/07/2018¹³. Los datos tienen 99 trimestres para el análisis:

¹³ Los datos surgen de la base de datos FRED del Banco de la Reserva Federal de St. Louis. Para más información consultar <https://fred.stlouisfed.org/graph/?id=JPNNGDP,#0> (última vez consultado 09/03/2019)

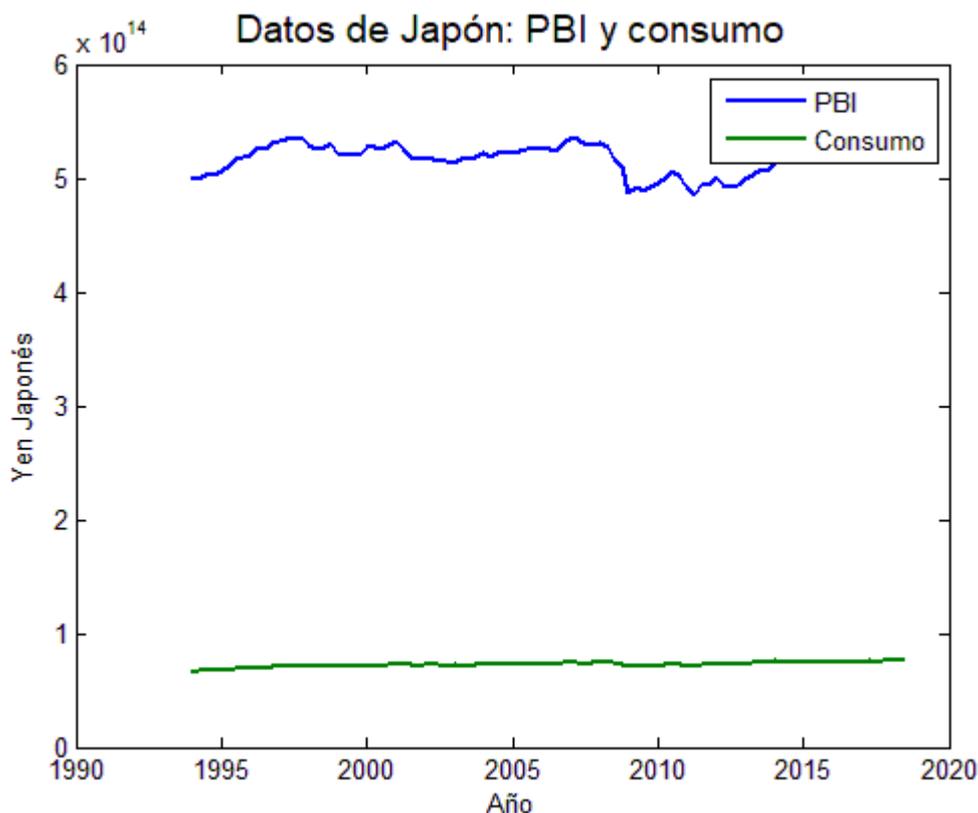


Ilustración 4 Datos trimestrales del PBI y consumo de Japón entre 1994 y 2018

Es posible ver que el consumo se mantiene mucho más estable que el PBI. De hecho pareciera que el PBI no tiene una tendencia creciente en el tiempo analizado mientras que el consumo muestra una leve pendiente de la tendencia positiva. Según algunos autores como Miyazawa (2012) o Hayashi & Prescott (2002) durante los noventa, Japón experimentó una década perdida ya que el PBI aumentó por año alrededor del 0,5% mientras que el de otros países como Estados Unidos aumentó en promedio un 2,6% cada año. Otros autores como KIM., Kyoji & Tasuji (2010) hablan de dos décadas perdidas. Puntualmente, KIM., Kyoji & Tasuji (2010) postulan que la economía japonesa se estancó durante unos 20 años desde el colapso de la "economía burbuja" en 1991. En efecto, según ellos el estancamiento prolongado no puede ser a causa del estallido de la burbuja o políticas fiscales y monetarias inadecuadas sino que pareciera ser por un problema estructural de más largo plazo.

En efecto, para Hayashi & Prescott (2002) las causas de la "década perdida" fueron en primer lugar, la caída en el crecimiento de la productividad total de factores que disminuyó la pendiente de crecimiento del estado estacionario del coeficiente capital/output. En segundo lugar, la reforma laboral de 1988 que llevó la jornada laboral de 44 horas semanales a 40 horas semanales para 1993. En el modelo RBC esto no afecta mucho porque las horas agregadas están en la función de utilidad, la baja en las horas trabajadas se compensa con el aumento del empleo, por lo tanto en el agregado no hay diferencias. Sin embargo en el modelo de crecimiento neoclásico esto hace que se reduzca el sendereo de crecimiento del estado estacionario del output. También pueden existir otras causas, por ejemplo KIM., Kyoji & Tasuji (2010)

suponen que la caída en el crecimiento de la productividad de los factores se debe a la baja tasa de natalidad que hizo que envejeciera la población económicamente activa y se redujera la tasa de crecimiento de la población en condiciones de trabajar.

Para que Japón escape del estancamiento del crecimiento del PBI KIM., Kyoji & Tasuji (2010) proponen que se debe desarrollar un superávit de cuenta corriente que sea sustentable para evitar apreciaciones del tipo de cambio y no enfocarse tanto en la estimulación de la inversión nacional.

Para analizar los datos aplicamos logaritmos y hacemos el Filtro HP:

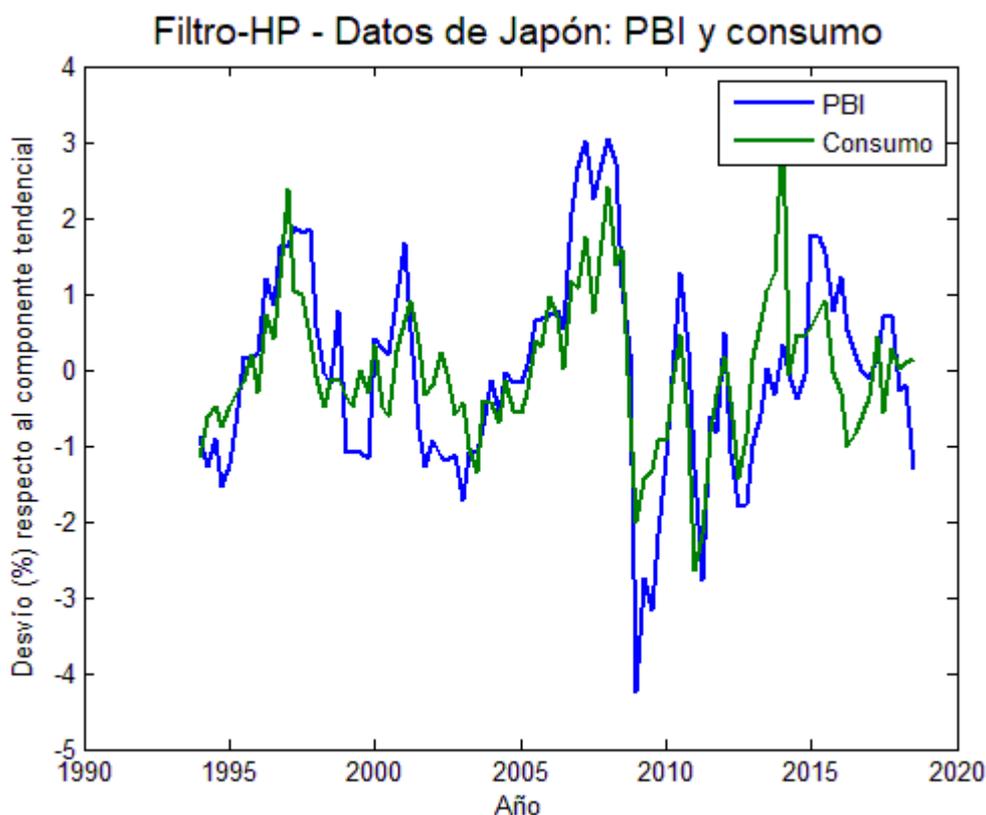


Ilustración 5 Desvío porcentual respecto al componente tendencial para el PBI y el consumo usando el filtro HP: Caso Japón – Modelo de crecimiento estocástico neoclásico

En la ilustración 5 el desvío respecto al componente tendencial del consumo varía menos que el del PBI. Puntualmente cuando el PBI entra en una fase contractiva, respecto de la tendencia, el consumo se contrae menos y cuando entra en una fase expansiva salvo en dos períodos puntuales (1996 y 2013-2014) el consumo se expande menos que el PBI. Hodrick & Prescott (1981) obtiene resultados similares para la economía de Estados Unidos luego de la Segunda Guerra Mundial. La intuición del gráfico es parecida al de la simulación del modelo neoclásico y RBC: la variancia del desvío porcentual del PBI respecto a su tendencia es mayor a la del consumo y la correlación es positiva. En efecto la variancia del desvío porcentual del PBI respecto a

su tendencia es 1,351 y la varianza del desvío porcentual del consumo respecto a su tendencia es 0,940. Mientras que la correlación es de 0,74.

En resumen,

Parámetros	Modelo Neoclásico estocástico de crecimiento	Modelo RBC	Datos empíricos
Varianza del desvío porcentual del Output respecto al componente tendencial	0,926	1,796	1,351
Varianza del desvío porcentual del consumo respecto al componente tendencial	0,317	0,520	0,940
Correlación entre output y consumo	0,92	0,87	0,74

Se observa que las varianzas del consumo y del output usando los datos reales de Japón son mayores a la del modelo neoclásico estocástico de crecimiento simulado. Mientras que para el modelo RBC la varianza del output es mayor que los datos empíricos y el consumo es menor.

El desvío porcentual del crecimiento del PBI respecto a su tendencia por debajo del desvío porcentual del consumo durante los años 2008, 2009 se debió a la crisis económica mundial ocurrida en 2008 conocida como la "Gran Recesión"

Por otro lado, el desvío porcentual del crecimiento del consumo respecto a su tendencia por encima del desvío porcentual de crecimiento del PBI durante los años 2013-2014 pudo ser producto de la política monetaria expansiva del Banco Central Japonés. John Hilsenrath, Phred Dvorak y Brian Blackstone (2013) afirman que la política monetaria de la FED y del Banco Central Japonés "*buscan reducir las tasas de interés de largo plazo y estimular a los consumidores y las empresas a que gasten e inviertan más*".¹⁴

Finalmente se analizan la correlación entre el PBI y el consumo con los modelos presentados simulados y los datos que tenemos de Japón y se comparan con distintos rezagos. En la ilustración 6 se muestran los resultados para el modelo de crecimiento estocástico neoclásico y en la Ilustración 7 para el RBC:

¹⁴ Para más información se destacan los artículos titulados "El banco de Japón aplica a su economía la receta de la Fed"; "Las medidas desatan una fiebre del oro" publicados los días 5 de abril y 11 de abril del 2013 por el diario La Nación.

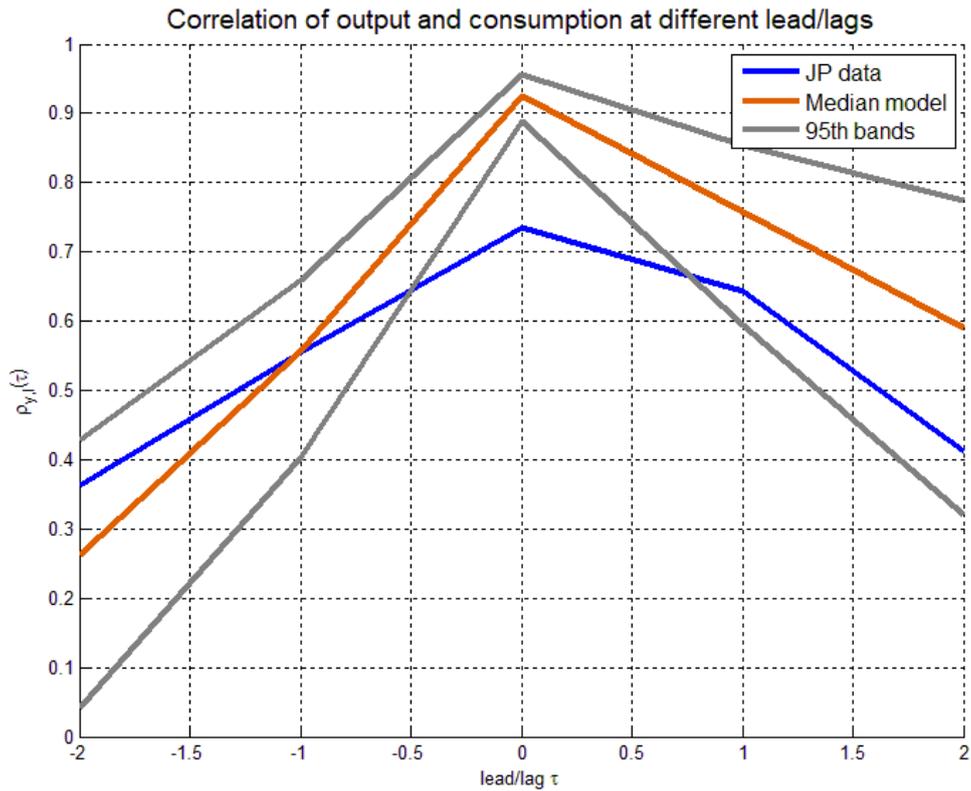


Ilustración 6 Correlación entre el PBI y el consumo del modelo de crecimiento estocástico neoclásico simulado y datos de Japón

De la Ilustración 6 se desprende que la correlación entre el consumo y el output cuando se compara en el mismo período es, tal como se mencionó anteriormente 0,92 para el modelo teórico y 0,74 para los datos empíricos. En efecto a medida que los rezagos aumentan/disminuyen ambas correlaciones disminuyen. Para los "rezagos futuros" (*leads*) pareciera que en ambos casos: modelo teórico y empírico la correlación disminuye a una tasa parecida. Sin embargo en los rezagos (*lags*) pareciera que la correlación del modelo teórico disminuye más rápido que la empírica a medida que nos alejamos del 0. En efecto, solo cuando se comparamos con un período de rezago ($\tau = -1$) la correlación coincide entre el modelo empírico y el modelo teórico de crecimiento estocástico neoclásico.

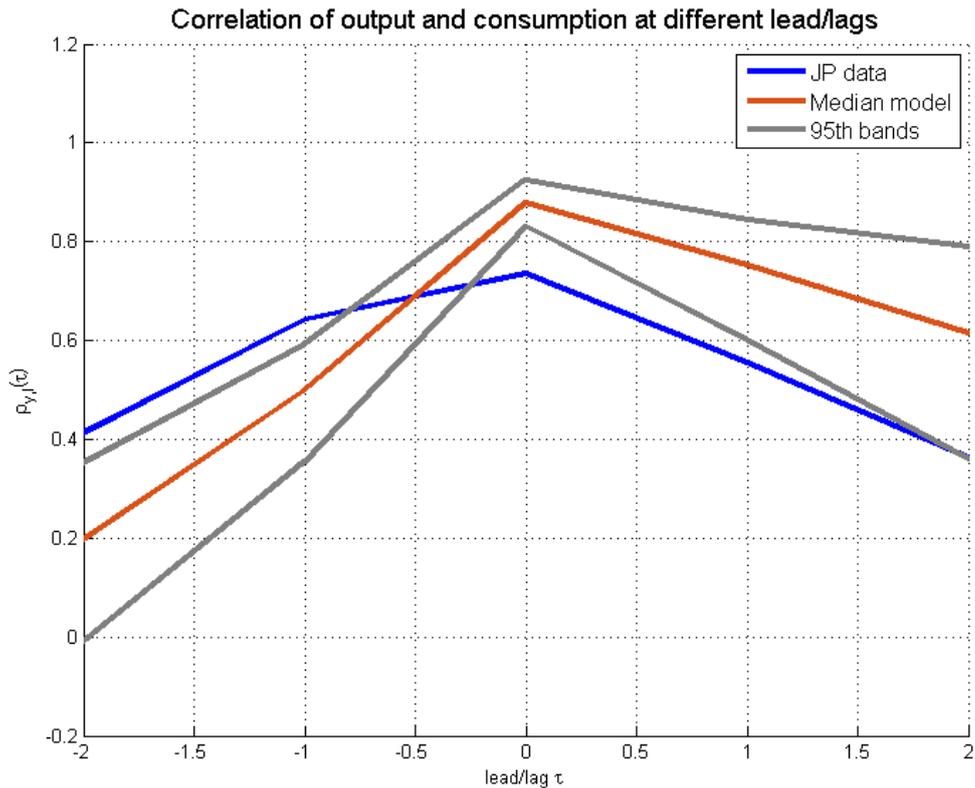


Ilustración 7 Correlación entre el PBI y el consumo del modelo RBC simulado y datos de Japón

De la Ilustración 7 se desprende que la correlación entre el consumo y el output cuando se compara en el mismo período es, tal como se mencionó anteriormente 0,87 para el modelo teórico y 0,74 para los datos empíricos. En efecto a medida que los rezagos aumentan/disminuyen ambas correlaciones disminuyen. Para los "rezagos futuros" (*leads*) pareciera que en ambos casos: modelo teórico y empírico la correlación disminuye a una tasa parecida. Sin embargo en los rezagos (*lags*) pareciera que la correlación del modelo teórico disminuye más rápido que la empírica a medida que nos alejamos del 0. En ningún periodo de tiempo coinciden las correlaciones. Sin embargo a partir de $\tau = -1$ hacia atrás la correlación de los datos empíricos es mayor a la del modelo RBC.

Conclusión

Para el desarrollo del análisis de los modelos DGSE presentados se han replicado las hechas por Uhlig (1999) explicando cada paso en la solución del modelo para que sea accesible a los lectores con algún conocimiento básico en estadística y análisis económico. Además se utilizó el caso de Japón el período 1994-2018 para ver si los datos empíricos se condicen con la solución teórica. Se argumentó que los datos empíricos podían diferir con las simulaciones teóricas del modelo porque se analiza un período de la economía japonesa que algunos autores dicen que se trató de dos décadas perdidas porque no hubo un crecimiento sostenido del PBI. Además en el período analizado ocurrió una de las peores crisis mundiales desde 1928 denominada la Gran Recesión.

Al analizar los dos 2 modelos teóricos propuestos es posible notar que el modelo de crecimiento estocásticos neoclásico subestima la varianza del consumo y el output con respecto a los datos empíricos. Por otro, lado el modelo RBC subestima la varianza del consumo y sobreestima la varianza del output. El primer modelo estima mejor la varianza del Output y el segundo la del consumo.

Con relación a la correlación entre el consumo y el output ambos modelos sobreestiman el valor. Según los datos empíricos hay menos correlación entre la varianza y el consumo que lo que postulan los modelos. Para este caso se argumentó que pude ser porque el Estado Japonés deliberadamente desarrolló políticas para aumentar el consumo en el año 2014.

Anexo 1: Solución a las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario

A) Para la ecuación del consumo

De la desviación logarítmica del consumo, la ecuación (8) y la ecuación (12):

$$C_t = \bar{C}e^{c_t} \approx \bar{C}(1 + c_t) \quad \text{Desviación logarítmica del consumo}$$

$$C_t = +Z_t K_{t-1}^\rho + (1 - \delta)K_{t-1} - K_t \quad (8)$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho \quad (12)$$

Podemos obtener:

$$C_t = +Y_t + (1 - \delta)K_{t-1} - K_t$$

$$\bar{C}e^{c_t} = +\bar{Y}e^{y_t} + (1 - \delta)\bar{K}e^{k_{t-1}} - \bar{K}e^{k_t}$$

$$\bar{C}(1 + c_t) \approx \bar{Y}(1 + y_t) + (1 - \delta)\bar{K}(1 + k_{t-1}) - \bar{K}(1 + k_t)$$

$$\bar{C} + \bar{C}c_t \approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)(\bar{K} + \bar{K}k_{t-1}) - \bar{K} - \bar{K}k_t$$

$$\bar{C} + \bar{C}c_t \approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K} + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K} - \bar{K}k_t$$

$$\bar{C} + \bar{C}c_t \approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + \bar{K} - \delta\bar{K} + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K} - \bar{K}k_t$$

$$\bar{C} + \delta\bar{K} + \bar{C}c_t \approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

Recordemos que $\bar{Y} = \bar{C} + \delta\bar{K}$

$$\bar{Y} + \bar{C}c_t \approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$\bar{C}c_t \approx \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$y_t \approx \rho k_{t-1} + z_t^{15}$$

$$\bar{Y} = \bar{Z}\bar{K}^\rho$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^\rho(\rho k_{t-1} + z_t) + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^\rho \rho k_{t-1} + \bar{Z}\bar{K}^\rho z_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^\rho z_t + (\bar{Z}\bar{K}^{\rho-1}\rho + 1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

¹⁵ Ir a la parte “ecuación del output” del presente anexo para ver la demostración de esta aproximación Ecuación (12)].

$$\bar{Z}\bar{K}^{\rho-1} = \frac{\bar{Z}\bar{K}^{\rho}}{\bar{K}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^{\rho}z_t + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{K}}\rho + 1 - \delta\right)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho}$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^{\rho}z_t + \left(\frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho}\rho + 1 - \delta\right)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^{\rho}z_t + \left(\frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho}\rho + 1 - \delta\right)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^{\rho}z_t + (\bar{R} - (1 - \delta) + 1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^{\rho}z_t + (\bar{R} - (1 - \delta) + 1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

$$\beta\bar{R} = 1 \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{\beta}$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Z}\bar{K}^{\rho}z_t + \frac{\bar{K}}{\beta}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

Recordemos que

$$\bar{Z}\bar{K}^{\rho} = \bar{Y} = \bar{C} + \delta\bar{K}$$

$$0 \approx -\bar{C}c_t + (\bar{C} + \delta\bar{K})z_t + \frac{\bar{K}}{\beta}k_{t-1} - \bar{K}k_t$$

Dividimos todo por \bar{C} y obtenemos:

$$\frac{0}{\bar{C}} \approx -\frac{\bar{C}}{\bar{C}}c_t + \frac{(\bar{C} + \delta\bar{K})}{\bar{C}}z_t + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_t$$

$$0 \approx -c_t + \left(1 + \frac{\delta\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_t$$

$$0 \approx -\frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_t + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} + \left(1 + \frac{\delta\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t - c_t \quad (13)$$

B) Para la ecuación del retorno

A partir de la desviación logarítmica del retorno, la ecuación (11) y la ecuación (12):

$R_t = \bar{R}e^{r_t} \approx \bar{C}(1 + r_t)$ *Desviación logarítmica del retorno*

$$R_t = \rho Z_t K_{t-1}^{\rho-1} + (1 - \delta) \quad (11)$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho \quad (12)$$

Podemos obtener:

$$R_t = \rho \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1 - \delta) y \frac{Y_t}{K_{t-1}} = \frac{R_t - (1 - \delta)}{\rho}$$

$$\bar{R}e^{r_t} = \rho \frac{\bar{Y}e^{y_t}}{\bar{K}e^{k_{t-1}}} + (1 - \delta)$$

$$\bar{R}e^{r_t} = \rho \frac{\bar{Y}e^{y_t}e^{-k_{t-1}}}{\bar{K}} + (1 - \delta)$$

$$\bar{R}(1 + r_t) \approx \rho \frac{\bar{Y}(1 + y_t)(1 - k_{t-1})}{\bar{K}} + (1 - \delta)$$

$$\bar{R} + \bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t - y_t k_{t-1}) + (1 - \delta)$$

Recordemos que los productos de números pequeños son cercanos a 0: $y_t k_{t-1} \approx 0$

$$\bar{R} + \bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t) + (1 - \delta)$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t) + (1 - \delta) - \bar{R}$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t) + \frac{\rho}{\rho}[(1 - \delta) - \bar{R}]$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t) - \frac{\rho}{\rho}[\bar{R} - (1 - \delta)]$$

Recordemos que

$$\beta \bar{R} = 1; \quad \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho}$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t - 1)$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(y_t - k_{t-1})$$

$$r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{R}\bar{K}} (y_t - k_{t-1})$$

$$\beta \bar{R} = 1 \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{\beta}$$

$$r_t \approx \beta \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} (y_t - k_{t-1})$$

$$y_t \approx \rho k_{t-1} + z_t$$

$$r_t \approx \beta \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} [(\rho k_{t-1} + z_t) - k_{t-1}]$$

$$r_t \approx \beta \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} [(\rho - 1)k_{t-1} + z_t]$$

Recordamos que

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho}$$

$$r_t \approx \beta \rho \frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho} [(\rho - 1)k_{t-1} + z_t]$$

$$r_t \approx \beta [\bar{R} - (1 - \delta)] [(\rho - 1)k_{t-1} + z_t]$$

$$\beta \bar{R} = 1 \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{\beta}$$

$$r_t \approx \beta \left[\frac{1}{\beta} - (1 - \delta) \right] [(\rho - 1)k_{t-1} + z_t]$$

$$r_t \approx [1 - \beta(1 - \delta)] [(\rho - 1)k_{t-1} + z_t]$$

$$r_t \approx [1 - \beta(1 - \delta)](\rho - 1)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t$$

$$r_t \approx -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t$$

$$0 \approx -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t - r_t \quad (14)$$

C) Para la ecuación del output

A partir de la desviación logarítmica del output y la ecuación (12):

$$Y_t = \bar{Y}e^{y_t} \approx \bar{Y}(1 + y_t) \quad \text{Desviación logarítmica del output}$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho \quad (12)$$

Podemos obtener:

$$\bar{Y} e^{y_t} = \bar{Z} e^{z_t} (\bar{K} e^{k_{t-1}})^\rho$$

$$\bar{Y}(1 + y_t) \approx \bar{Z}(1 + z_t) \bar{K}^\rho (1 + \rho k_{t-1})$$

$$\bar{Y}(1 + y_t) \approx \bar{Z} \bar{K}^\rho (1 + z_t)(1 + \rho k_{t-1})$$

Recordemos que $\bar{Y} = \bar{Z} \bar{K}^\rho$

$$\bar{Y}(1 + y_t) \approx \bar{Y}(1 + \rho k_{t-1} + z_t + z_t \rho k_{t-1})$$

$$1 + y_t \approx 1 + \rho k_{t-1} + z_t + z_t \rho k_{t-1}$$

Recordemos que aproximamos la multiplicación de números cercanos a cero a cero tal que:

$$z_t k_{t-1} \approx 0$$

$$y_t \approx \rho k_{t-1} + z_t$$

Finalmente, se obtiene:

$$0 \approx -y_t + \rho k_{t-1} + z_t \quad (15)$$

D) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):

A partir de la desviación logarítmica del consumo, del retorno y de la ecuación (10):

$$C_t = \bar{C} e^{c_t} \approx \bar{C}(1 + c_t) \quad \text{Desviación logarítmica del consumo}$$

$$R_t = \bar{R} e^{r_t} \approx \bar{R}(1 + r_t) \quad \text{Desviación logarítmica del retorno}$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (10)$$

Se obtiene

$$E_t \left[\beta \left(\frac{\bar{C} e^{c_t}}{\bar{C} e^{c_{t+1}}} \right)^\eta [\bar{R} e^{r_{t+1}}] \right] = 1$$

$$E_t [\beta (e^{c_t} e^{-c_{t+1}})^\eta [\bar{R} e^{r_{t+1}}]] = 1$$

$$E_t[\beta[(1 + \eta c_t)(1 - \eta c_{t+1})][\bar{R}(1 + r_{t+1})]] \approx 1$$

$$E_t[\beta \bar{R}(1 + \eta c_t)(1 - \eta c_{t+1})(1 + r_{t+1})] \approx 1$$

$$E_t[\beta \bar{R}(1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t - \eta c_{t+1} \eta c_t)(1 + r_{t+1})] \approx 1$$

$$E_t[\beta \bar{R}(1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t - \eta c_{t+1} \eta c_t + r_{t+1} - r_{t+1} \eta c_{t+1} + r_{t+1} \eta c_t - r_{t+1} \eta c_{t+1} \eta c_t)] \approx 1$$

Recordemos que aproximamos la multiplicación de números cercanos a cero es cero tal que:

$$c_{t+1} c_t \approx 0$$

$$r_{t+1} c_{t+1} \approx 0$$

$$r_{t+1} c_t \approx 0$$

Por lo tanto

$$E_t[\beta \bar{R}(1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t + r_{t+1})] \approx 1$$

Recordemos que $\beta \bar{R} = 1$

$$E_t[1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t + r_{t+1}] \approx 1$$

Aplicamos la propiedad de la linealidad de la esperanza para cancelar el 1

$$E_t[1 - 1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t + r_{t+1}] \approx 0$$

$$E_t[\eta(c_t - c_{t+1}) + r_{t+1}] \approx 0$$

Se obtiene:

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (16)$$

Se puede ver que la desviación porcentual de la tasa marginal de sustitución dada por $\eta(c_t - c_{t+1})$ en su estado estacionario debe igualar al negativo de la expectativa tasa de interés r_{t+1} . Específicamente elevadas expectativas de tasa de interés coincide con baja tasas marginal de sustitución. Por ejemplo si se espera un aumento en el consumo solo una elevada tasa de interés puede prevenir a los agentes tomar préstamos contra el alza futura.

E) Para la ecuación de la productividad de los factores

A partir de la desviación logarítmica de la productividad de los factores y de la ecuación (3):

$$Z_t = \bar{z}e^{z_t} \approx \bar{Z}(1 + z_t) \quad \text{Desviación logarítmica de la productividad de los factores}$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t \quad \text{tal que } \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (3)$$

Se obtiene

$$\log(\bar{Z}e^{z_t}) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(\bar{Z}e^{z_{t-1}}) + \varepsilon_t$$

$$\log(\bar{Z}) + \log(e^{z_t}) = \log(\bar{Z}) - \psi \log(\bar{Z}) + \psi \log(\bar{Z}) + \psi \log(e^{z_{t-1}}) + \varepsilon_t$$

Para simplificar vamos a suponer $\log(e^{z_t}) = \ln(e^{z_t}) = z_t$

$$z_t = \psi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

Se obtiene:

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (18)$$

F) Resultados:

Por lo tanto las ecuaciones:

$$C_t = Z_t K_{t-1}^\rho + (1 - \delta)K_{t-1} - K_t \quad (8)$$

$$R_t = \rho Z_t K_{t-1}^{\rho-1} + (1 - \delta) \quad (11)$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho \quad (12)$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (10)$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (3)$$

Obtuvimos

$$0 \approx -\frac{\bar{K}}{\bar{C}} k_t + \frac{\bar{K}}{\beta \bar{C}} k_{t-1} + \left(1 + \delta \frac{\bar{K}}{\bar{C}} \right) z_t - c_t \quad (13)$$

$$0 \approx -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t - r_t \quad (14)$$

$$0 \approx -y_t + \rho k_{t-1} + z_t^{16} \quad (15)$$

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (16)$$

$$z_t = \psi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

¹⁶ La tercera ecuación es superflua para el cálculo de la dinámica del modelo. Sin embargo la agregamos para poder hacer los cálculos de las correlaciones con el producto (y_t)

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (18)$$

Anexo 2: Resolución vía la ley de equilibrio recursivo del movimiento mediante el método de coeficientes indeterminados

Los datos que tenemos en t son las variables estado k_{t-1} y z_t . Por lo tanto tenemos que encontrar k_t, r_t y c_t . Vamos a postular una ley de movimiento recursivo lineal:

$$k_t = v_{kk}k_{t-1} + v_{kz} z_t \quad (19)$$

$$y_t = v_{yk}k_{t-1} + v_{yz} z_t \quad (20)$$

$$r_t = v_{rk}k_{t-1} + v_{rz} z_t \quad (21)$$

$$c_t = v_{ck}k_{t-1} + v_{cz} z_t \quad (22)$$

$$z_t = v_{zk}k_t + v_{zz} z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (23)$$

La idea es calcular $v_{kk}, v_{kz}, v_{yk}, v_{yz}, v_{rk}, v_{rz}, v_{ck}, v_{cz}, v_{zk}, v_{zz}$

A) Para la ecuación del consumo

$$0 \approx -\frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_t + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} + \left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t - c_t \quad (13)$$

$$c_t \approx -\frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_t + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} + \left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t$$

Por la ecuación (22) tenemos que:

$$v_{ck}k_{t-1} + v_{cz} z_t = -\frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_t + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} + \left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t$$

$$v_{ck}k_{t-1} + v_{cz} z_t = -\frac{\bar{K}}{\bar{C}}(v_{kk}k_{t-1} + v_{kz} z_t) + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} + \left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t$$

$$v_{ck}k_{t-1} + v_{cz} z_t = -\frac{\bar{K}v_{kk}}{\bar{C}}k_{t-1} + \frac{\bar{K}}{\beta\bar{C}}k_{t-1} + \left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right)z_t - \frac{\bar{K}}{\bar{C}}v_{kz} z_t$$

$$v_{ck}k_{t-1} + v_{cz} z_t = \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\bar{K}}{\bar{C}}k_{t-1} + \left[\left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right) - \frac{\bar{K}}{\bar{C}}v_{kz}\right] z_t$$

Recordemos que:

$$\bar{Y} = \bar{C} + \delta\bar{K} \Rightarrow \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} = \left(1 + \delta\frac{\bar{K}}{\bar{C}}\right) - \frac{\bar{K}}{\bar{C}}$$

$$v_{ck}k_{t-1} + v_{cz} z_t = \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\bar{K}}{\bar{C}} k_{t-1} + \left[\frac{\bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}} v_{kz}\right] z_t$$

Finalmente tenemos que

$$v_{ck} = \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\bar{K}}{\bar{C}} \quad (24)$$

$$v_{cz} = \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}} v_{kz} \quad (25)$$

B) Para la ecuación del retorno

$$0 \approx -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t - r_t \quad (14)$$

$$r_t \approx -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t$$

Por la ecuación (21) tenemos que

$$v_{rk}k_{t-1} + v_{rz} z_t = -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho)k_{t-1} + [1 - \beta(1 - \delta)]z_t$$

$$v_{rk} = -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) \quad (26)$$

$$v_{rz} = [1 - \beta(1 - \delta)] \quad (27)$$

C) Para la ecuación del output

$$0 \approx -y_t + \rho k_{t-1} + z_t \quad (15)$$

$$y_t \approx +\rho k_{t-1} + z_t$$

Por la ecuación (20) tenemos que

$$v_{yk}k_{t-1} + v_{yz} z_t = \rho k_{t-1} + z_t$$

$$v_{yk} = \rho \quad (28)$$

$$v_{yz} = 1 \quad (29)$$

D) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (16)$$

Por la ecuación (22) tenemos que:

$$-\eta(v_{ck}k_{t-1} + v_{cz} z_t) = E_t[-\eta(v_{ck}k_t + v_{cz} z_{t+1}) + v_{rk}k_t + v_{rz} z_{t+1}]$$

$$-\eta v_{ck}k_{t-1} - \eta v_{cz} z_t = E_t[-\eta v_{ck}k_t - \eta v_{cz} z_{t+1} + v_{rk}k_t + v_{rz} z_{t+1}]$$

$$-\eta v_{ck} k_{t-1} - \eta v_{cz} z_t = E_t [(v_{rk} - \eta v_{ck}) k_t + (v_{rz} - \eta v_{cz}) z_{t+1}]$$

$$-\eta v_{ck} k_{t-1} - \eta v_{cz} z_t = (v_{rk} - \eta v_{ck}) k_t + (v_{rz} - \eta v_{cz}) E_t [z_{t+1}]$$

Por la ecuación:

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (18)$$

Tenemos que

$$-\eta v_{ck} k_{t-1} - \eta v_{cz} z_t = (v_{rk} - \eta v_{ck}) k_t + (v_{rz} - \eta v_{cz}) \psi z_t$$

$$0 = (v_{rk} - \eta v_{ck}) k_t + (v_{rz} - \eta v_{cz}) \psi z_t + \eta v_{ck} k_{t-1} + \eta v_{cz} z_t$$

$$0 = (v_{rk} - \eta v_{ck}) k_t + [(v_{rz} - \eta v_{cz}) \psi + \eta v_{cz}] z_t + \eta v_{ck} k_{t-1}$$

Reemplazamos

$$k_t = v_{kk} k_{t-1} + v_{kz} z_t \quad (19)$$

Por lo tanto

$$0 = (v_{rk} - \eta v_{ck})(v_{kk} k_{t-1} + v_{kz} z_t) + [(v_{rz} - \eta v_{cz}) \psi + \eta v_{cz}] z_t + \eta v_{ck} k_{t-1}$$

$$0 = (v_{rk} - \eta v_{ck}) v_{kk} k_{t-1} + (v_{rk} - \eta v_{ck}) v_{kz} z_t + [(v_{rz} - \eta v_{cz}) \psi + \eta v_{cz}] z_t + \eta v_{ck} k_{t-1}$$

$$0 = [(v_{rk} - \eta v_{ck}) v_{kk} + \eta v_{ck}] k_{t-1} + [(v_{rk} - \eta v_{ck}) v_{kz} + (v_{rz} - \eta v_{cz}) \psi + \eta v_{cz}] z_t$$

Para cumplir con la igualdad tenemos que

$$0 = [(v_{rk} - \eta v_{ck}) v_{kk} + \eta v_{ck}]$$

$$0 = [(v_{rk} - \eta v_{ck}) v_{kz} + (v_{rz} - \eta v_{cz}) \psi + \eta v_{cz}]$$

Usando los resultados obtenidos anteriormente nos queda por un lado:

$$v_{ck} = \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\bar{K}}{\bar{C}} \quad (24)$$

$$v_{rk} = -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) \quad (26)$$

$$0 = [(v_{rk} - \eta v_{ck}) v_{kk} + \eta v_{ck}]$$

Reemplazamos v_{ck} y v_{rk} para obtener v_{kk}

$$0 = \left(-[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) - \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\eta \bar{K}}{\bar{C}}\right) v_{kk} + \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\eta \bar{K}}{\bar{C}}$$

Para simplificar dividimos todo por $\frac{\eta \bar{K}}{\bar{C}}$ entonces nos queda:

$$0 = \left(-\frac{\bar{C}}{\eta \bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) + v_{kk} - \frac{1}{\beta}\right) v_{kk} - v_{kk} + \frac{1}{\beta}$$

$$\begin{aligned}
0 &= v_{kk}^2 + \left(-\frac{\bar{C}}{\eta\bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) - \frac{1}{\beta} \right) v_{kk} - v_{kk} + \frac{1}{\beta} \\
0 &= v_{kk}^2 + \left(-\frac{\bar{C}}{\eta\bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) - \frac{1}{\beta} \right) v_{kk} - v_{kk} + \frac{1}{\beta} \\
0 &= v_{kk}^2 + \left(-\frac{\bar{C}}{\eta\bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) - \frac{1}{\beta} - 1 \right) v_{kk} + \frac{1}{\beta} \\
0 &= v_{kk}^2 - \left(\frac{\bar{C}}{\eta\bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) + \frac{1}{\beta} + 1 \right) v_{kk} + \frac{1}{\beta} \\
0 &= v_{kk}^2 - \gamma v_{kk} + \frac{1}{\beta} \text{ tal que } \gamma = \left(\frac{\bar{C}}{\eta\bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) + \frac{1}{\beta} + 1 \right)
\end{aligned}$$

Tenemos una ecuación cuadrática cuyas soluciones posibles se obtienen a partir de $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$v_{kk} \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{4}{\beta}}}{2}$$

Por propiedades de una ecuación cuadrática tenemos que $\frac{1}{\beta} = v_{kk1} * v_{kk2}$. Además queremos una solución estable por lo que $|v_{kk}| < 1$. Uhlig (1995) propone que usemos como solución la menor de las dos raíces. Por lo tanto

$$v_{kk} = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{4}{\beta}}}{2} \quad (30)$$

y por el otro,

$$v_{ck} = \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\bar{K}}{\bar{C}} \quad (24)$$

$$v_{rk} = -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) \quad (26)$$

$$v_{cz} = \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}} v_{kz} \quad (25)$$

$$v_{rz} = [1 - \beta(1 - \delta)] \quad (27)$$

$$0 = [(v_{rk} - \eta v_{ck})v_{kz} + (v_{rz} - \eta v_{cz})\psi + \eta v_{cz}]$$

Reemplazamos v_{cz} y v_{rz} para obtener v_{kz}

$$0 = \left[(v_{rk} - \eta v_{ck})v_{kz} + \left(v_{rz} - \eta \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} + \frac{\eta \bar{K}}{\bar{C}} v_{kz} \right) \psi + \eta \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}} v_{kz} \right) \right]$$

$$0 = (v_{rk} - \eta v_{ck})v_{kz} + \psi v_{rz} - \eta \frac{\psi \bar{Y}}{\bar{C}} + \frac{\psi \eta \bar{K}}{\bar{C}} v_{kz} + \frac{\eta \bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\eta \bar{K}}{\bar{C}} v_{kz}$$

$$0 = (v_{rk} - \eta v_{ck})v_{kz} + \psi v_{rz} - \eta \frac{\psi \bar{Y}}{\bar{C}} + \frac{\eta \bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\bar{K} \eta}{\bar{C}} (1 - \psi) v_{kz}$$

$$0 = \psi v_{rz} + \eta(-\psi + 1) \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} + \left((v_{rk} - \eta v_{ck}) - \frac{\bar{K} \eta}{\bar{C}} (1 - \psi) \right) v_{kz}$$

$$0 = \psi v_{rz} + \eta(-\psi + 1) \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} - \left(-(v_{rk} - \eta v_{ck}) + \frac{\bar{K} \eta}{\bar{C}} (1 - \psi) \right) v_{kz}$$

$$\left(-(v_{rk} - \eta v_{ck}) + \frac{\bar{K} \eta}{\bar{C}} (1 - \psi) \right) v_{kz} = \psi v_{rz} + \eta(-\psi + 1) \frac{\bar{Y}}{\bar{C}}$$

$$v_{kz} = \frac{\psi v_{rz} + \eta(-\psi + 1) \frac{\bar{Y}}{\bar{C}}}{-(v_{rk} - \eta v_{ck}) + \frac{\bar{K} \eta}{\bar{C}} (1 - \psi)}$$

$$v_{kz} = \frac{\psi v_{rz} + \eta(1 - \psi) \frac{\bar{Y}}{\bar{C}}}{-v_{rk} + \eta v_{ck} + \eta(1 - \psi) \frac{\bar{K}}{\bar{C}}} \quad (31)$$

E) Para la ecuación de la productividad de los factores

$$z_t = \psi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

$$z_t = v_{zk} k_t + v_{zz} z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (23)$$

La solución es:

$$v_{zk} = 0 \quad (32)$$

$$v_{kz} = \psi \quad (33)$$

F) Resultados:

Entonces tenemos que:

$$v_{ck} = \left(-v_{kk} + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\bar{K}}{\bar{C}} \quad (24)$$

$$v_{cz} = \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} - \frac{\bar{K}}{\bar{C}} v_{kz} \quad (25)$$

$$v_{rk} = -[1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) \quad (26)$$

$$v_{rz} = [1 - \beta(1 - \delta)] \quad (27)$$

$$v_{yk} = \rho \quad (28)$$

$$v_{yz} = 1 \quad (29)$$

$$v_{kk} = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{4}{\beta}}}{2} \text{ tal que } \gamma = \left(\frac{\bar{C}}{\eta \bar{K}} [1 - \beta(1 - \delta)](1 - \rho) + \frac{1}{\beta} + 1 \right) \quad (30)$$

$$v_{kz} = \frac{\psi v_{rz} + \eta(1 - \psi) \frac{\bar{Y}}{\bar{C}}}{-v_{rk} + \eta v_{ck} + \eta(1 - \psi) \frac{\bar{K}}{\bar{C}}} \quad (31)$$

$$v_{zk} = 0 \quad (32)$$

$$v_{kz} = \psi \quad (33)$$

Anexo 3: Solución a las ecuaciones aproximadamente lineales en los log-desvíos del estado estacionario del modelo RBC

A) Para la ecuación de inversión

De la desviación logarítmica de la inversión y la ecuación (41.1) tenemos:

$$I_t = \bar{I}e^{i_t} \approx \bar{I}(1 + i_t) \quad \text{Desviación logarítmica de la inversión}$$

$$I_t = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \quad (41.1)$$

Podemos obtener:

$$\bar{I}e^{i_t} = \bar{K}e^{k_t} - (1 - \delta)\bar{K}e^{k_{t-1}}$$

$$\bar{I}(1 + i_t) \approx \bar{K}(1 + k_t) - (1 - \delta)\bar{K}(1 + k_{t-1})$$

Recordemos que $\bar{I} = \delta\bar{K}$

$$\delta\bar{K}(1 + i_t) \approx \bar{K}[(1 + k_t) - (1 - \delta)(1 + k_{t-1})]$$

$$\delta(1 + i_t) \approx 1 + k_t - (1 - \delta)(1 + k_{t-1})$$

$$\delta(1 + i_t) \approx 1 + k_t - (1 - \delta) - (1 - \delta)k_{t-1}$$

$$\delta(1 + i_t) \approx 1 + k_t - 1 + \delta - (1 - \delta)k_{t-1}$$

$$\delta(1 + i_t) \approx k_t + \delta - (1 - \delta)k_{t-1}$$

$$(1 + i_t) \approx \frac{\delta}{\delta} + \frac{1}{\delta}[k_t - (1 - \delta)k_{t-1}]$$

$$i_t \approx \frac{1}{\delta}[k_t - (1 - \delta)k_{t-1}]$$

$$0 \approx \frac{1}{\delta}[k_t - (1 - \delta)k_{t-1}] - i_t \quad (15)$$

$$i_t \approx \frac{1}{\delta}[k_t - (1 - \delta)k_{t-1}]$$

$$k_t \approx \delta i_t + (1 - \delta)k_{t-1} \quad (53)$$

B) Para la ecuación de empleo

De la desviación logarítmica del empleo y la ecuación (49.1) tenemos:

$N_t = \bar{N}e^{n_t} \approx \bar{N}(1 + n_t)$ *Desviación logarítmica del empleo*

$$N_t = C_t^{-\eta}(1 - \rho) \frac{Y_t}{A} \quad (49.1)$$

Podemos obtener

$$\bar{N}e^{n_t} \approx (\bar{C}e^{c_t})^{-\eta}(1 - \rho) \frac{\bar{Y}e^{y_t}}{A}$$

$$\bar{N}(1 + n_t) \approx \bar{C}^{-\eta}(1 - \eta c_t)(1 - \rho) \frac{\bar{Y}(1 + y_t)}{A}$$

$$\bar{N}(1 + n_t) \approx \frac{\bar{C}^{-\eta} \bar{Y} (1 - \eta c_t) (1 - \rho) (1 + y_t)}{A}$$

Recordemos que $\bar{N} = \bar{C}^{-\eta}(1 - \rho) \frac{\bar{Y}}{A}$, entonces

$$\bar{C}^{-\eta}(1 - \rho) \frac{\bar{Y}}{A} (1 + n_t) \approx \frac{\bar{C}^{-\eta} \bar{Y} (1 - \eta c_t) (1 - \rho) (1 + y_t)}{A}$$

$$1 + n_t \approx (1 - \eta c_t)(1 + y_t)$$

$$1 + n_t \approx 1 - \eta c_t + y_t - \eta c_t y_t$$

Aproximamos la multiplicación de números cercanos a cero a cero tal que:

$$\eta c_t y_t \approx 0$$

Por lo tanto,

$$n_t \approx -\eta c_t + y_t$$

$$0 \approx y_t - \eta c_t - n_t \quad (54)$$

C) Para la ecuación del consumo

De la desviación logarítmica del consumo, la ecuación (40) y la ecuación (52):

$$C_t = \bar{C}e^{c_t} \approx \bar{C}(1 + c_t) \quad \text{Desviación logarítmica del consumo}$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (40)$$

$$C_t = -K_t + (1 - \delta)K_{t-1} + Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (52)$$

Podemos obtener:

$$\begin{aligned}
C_t &= Y_t + (1 - \delta)K_{t-1} - K_t \\
\bar{C}e^{c_t} &= \bar{Y}e^{y_t} + (1 - \delta)\bar{K}e^{k_{t-1}} - \bar{K}e^{k_t} \\
\bar{C}(1 + c_t) &\approx \bar{Y}(1 + y_t) + (1 - \delta)\bar{K}(1 + k_{t-1}) - \bar{K}(1 + k_t) \\
\bar{C} + \bar{C}c_t &\approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)(\bar{K} + \bar{K}k_{t-1}) - \bar{K} - \bar{K}k_t \\
\bar{C} + \bar{C}c_t &\approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K} + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K} - \bar{K}k_t \\
\bar{C} + \bar{C}c_t &\approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + \bar{K} - \delta\bar{K} + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K} - \bar{K}k_t \\
\bar{C} + \delta\bar{K} + \bar{C}c_t &\approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t
\end{aligned}$$

Recordemos que $\bar{Y} = \bar{C} + \delta\bar{K}$

$$\begin{aligned}
\bar{Y} + \bar{C}c_t &\approx \bar{Y} + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t \\
\bar{C}c_t &\approx \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t \\
0 &\approx -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t + (1 - \delta)\bar{K}k_{t-1} - \bar{K}k_t \\
0 &\approx -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t + \bar{K}[(1 - \delta)k_{t-1} - k_t] \quad (16)
\end{aligned}$$

Por la ecuación (53) tenemos que

$$\begin{aligned}
i_t &\approx \frac{1}{\delta}[k_t - (1 - \delta)k_{t-1}] \\
-\delta i_t &\approx \frac{\delta}{\delta}[-k_t + (1 - \delta)k_{t-1}]
\end{aligned}$$

Entonces

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t - \bar{K}\delta i_t$$

Recordemos que $\bar{I} = \delta\bar{K}$

Finalmente obtenemos

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t - \bar{I}i_t \quad (45)$$

D) Para la ecuación del retorno

A partir de la desviación logarítmica del retorno, la ecuación (40) y la ecuación (51):

$$R_t = \bar{R}e^{r_t} \approx \bar{C}(1 + r_t) \quad \text{Desviación logarítmica del retorno}$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (40)$$

$$R_t = \rho \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1 - \delta) \quad (51)$$

Podemos obtener:

$$\frac{Y_t}{K_{t-1}} = \frac{R_t - (1 - \delta)}{\rho}$$

$$\bar{R}e^{r_t} = \rho \frac{\bar{Y}e^{y_t}}{\bar{K}e^{k_{t-1}}} + (1 - \delta)$$

$$\bar{R}e^{r_t} = \rho \frac{\bar{Y}e^{y_t}e^{-k_{t-1}}}{\bar{K}} + (1 - \delta)$$

$$\bar{R}(1 + r_t) \approx \rho \frac{\bar{Y}(1 + y_t)(1 - k_{t-1})}{\bar{K}} + (1 - \delta)$$

$$\bar{R} + \bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t - y_t k_{t-1}) + (1 - \delta)$$

Recordemos que los productos de números pequeños son cercanos a 0: $y_t k_{t-1} \approx 0$

$$\bar{R} + \bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t) + (1 - \delta)$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t) + (1 - \delta) - \bar{R}$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t) + \frac{\rho}{\rho}[(1 - \delta) - \bar{R}]$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t) - \frac{\rho}{\rho}[\bar{R} - (1 - \delta)]$$

Recordemos que

$$\beta \bar{R} = 1; \quad \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} = \frac{\bar{R} - (1 - \delta)}{\rho}$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(1 - k_{t-1} + y_t - 1)$$

$$\bar{R}r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(y_t - k_{t-1})$$

$$r_t \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{R}\bar{K}}(y_t - k_{t-1})$$

$$0 \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{R}\bar{K}} (y_t - k_{t-1}) - r_t$$

$$0 \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} (y_t - k_{t-1}) - \bar{R}r_t \quad (56)$$

E) Para la ecuación del output

A partir de la desviación logarítmica del output y la ecuación (40):

$$Y_t = \bar{Y}e^{y_t} \approx \bar{Y}(1 + y_t) \quad \text{Desviación logarítmica del output}$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (40)$$

Podemos obtener:

$$\bar{Y}e^{y_t} = \bar{Z}e^{z_t} (\bar{K}e^{k_{t-1}})^\rho (\bar{N}e^{n_t})^{1-\rho}$$

$$\bar{Y}(1 + y_t) \approx \bar{Z}(1 + z_t) \bar{K}^\rho (1 + \rho k_{t-1}) \bar{N}^{1-\rho} (1 + n_t(1 - \rho))$$

$$\bar{Y}(1 + y_t) \approx \bar{Z} \bar{K}^\rho \bar{N}^{1-\rho} (1 + z_t) (1 + \rho k_{t-1}) \bar{N}^{1-\rho} (1 + n_t(1 - \rho))$$

recordemos que $\bar{Y} = \bar{Z} \bar{K}^\rho \bar{N}^{1-\rho}$

$$\bar{Y}(1 + y_t) \approx \bar{Y}(1 + z_t) (1 + \rho k_{t-1}) (1 + n_t(1 - \rho))$$

$$1 + y_t \approx (1 + z_t) (1 + \rho k_{t-1}) (1 + n_t(1 - \rho))$$

$$1 + y_t \approx (1 + \rho k_{t-1} + z_t + \rho k_{t-1} z_t) (1 + n_t(1 - \rho))$$

$$1 + y_t \approx 1 + \rho k_{t-1} + z_t + \rho k_{t-1} z_t + n_t(1 - \rho) + n_t(1 - \rho) \rho k_{t-1} + n_t(1 - \rho) z_t + n_t(1 - \rho) \rho k_{t-1} z_t$$

Aproximamos la multiplicación de números cercanos de cero a cero tal que:

$$\rho k_{t-1} z_t \approx 0$$

$$n_t(1 - \rho) \rho k_{t-1} \approx 0$$

$$n_t(1 - \rho) z_t \approx 0$$

$$n_t(1 - \rho) \rho k_{t-1} z_t \approx 0$$

por lo tanto,

$$y_t \approx \rho k_{t-1} + z_t + n_t(1 - \rho) \quad (57)$$

$$0 \approx \rho k_{t-1} - y_t + n_t(1 - \rho) + z_t \quad (58)$$

F) Para la ecuación de Lucas (Asset pricing equation):

A partir de la desviación logarítmica del consumo, del retorno y de la ecuación (50):

$$C_t = \bar{C}e^{c_t} \approx \bar{C}(1 + c_t) \quad \text{Desviación logarítmica del consumo}$$

$$R_t = \bar{R}e^{r_t} \approx \bar{R}(1 + r_t) \quad \text{Desviación logarítmica del retorno}$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (50)$$

Se obtiene

$$E_t \left[\beta \left(\frac{\bar{C}e^{c_t}}{\bar{C}e^{c_{t+1}}} \right)^\eta [\bar{R}e^{r_{t+1}}] \right] = 1$$

$$E_t [\beta (e^{c_t} e^{-c_{t+1}})^\eta [\bar{R}e^{r_{t+1}}]] = 1$$

$$E_t [\beta [(1 + \eta c_t)(1 - \eta c_{t+1})] [\bar{R}(1 + r_{t+1})]] \approx 1$$

$$E_t [\beta \bar{R} (1 + \eta c_t)(1 - \eta c_{t+1})(1 + r_{t+1})] \approx 1$$

$$E_t [\beta \bar{R} (1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t - \eta c_{t+1} \eta c_t)(1 + r_{t+1})] \approx 1$$

$$E_t [\beta \bar{R} (1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t - \eta c_{t+1} \eta c_t + r_{t+1} - r_{t+1} \eta c_{t+1} + r_{t+1} \eta c_t - r_{t+1} \eta c_{t+1} \eta c_t)] \approx 1$$

Recordemos que aproximamos la multiplicación de números cercanos a cero es cero tal que:

$$c_{t+1} c_t \approx 0$$

$$r_{t+1} c_{t+1} \approx 0$$

$$r_{t+1} c_t \approx 0$$

Por lo tanto

$$E_t [\beta \bar{R} (1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t + r_{t+1})] \approx 1$$

Recordemos que $\beta\bar{R} = 1$

$$E_t[1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t + r_{t+1}] \approx 1$$

Aplicamos la propiedad de la linealidad de la esperanza para cancelar el 1

$$E_t[1 - 1 - \eta c_{t+1} + \eta c_t + r_{t+1}] \approx 0$$

$$E_t[\eta(c_t - c_{t+1}) + r_{t+1}] \approx 0$$

Se obtiene:

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (59)$$

G) Para la ecuación de la productividad de los factores

A partir de la desviación logarítmica de la productividad de los factores y de la ecuación (3):

$$Z_t = \bar{z}e^{z_t} \approx \bar{Z}(1 + z_t) \quad \text{Desviación logarítmica de la productividad de los factores}$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t \quad \text{tal que } \varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (41)$$

Se obtiene

$$\log(\bar{Z}e^{z_t}) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(\bar{Z}e^{z_{t-1}}) + \varepsilon_t$$

$$\log(\bar{Z}) + \log(e^{z_t}) = \log(\bar{Z}) - \psi \log(\bar{Z}) + \psi \log(\bar{Z}) + \psi \log(e^{z_{t-1}}) + \varepsilon_t$$

Para simplificar vamos a suponer $\log(e^{z_t}) = \ln(e^{z_t}) = z_t$

$$z_t = \psi z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (60)$$

Se obtiene:

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (61)$$

H) Resultados:

De las ecuaciones:

$$C_t = -K_t + (1 - \delta)K_{t-1} + Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (52)$$

$$Y_t = Z_t K_{t-1}^\rho N_t^{1-\rho} \quad (40)$$

$$N_t = C_t^{-\eta} (1 - \rho) \frac{Y_t}{A} \quad (49.1)$$

$$R_t = \rho \frac{Y_t}{K_{t-1}} + (1 - \delta) \quad (51)$$

$$I_t = K_t - (1 - \delta)K_{t-1} \quad (41.1)$$

$$E_t \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t+1}} \right)^\eta [R_{t+1}] \right] = 1 \quad (50)$$

$$\log(Z_t) = (1 - \psi) \log(\bar{Z}) + \psi \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t \text{ tal que } \varepsilon_t \sim i. i. d N(0, \sigma^2) \quad (44)$$

Obtuvimos los log-desvíos del estado estacionario

$$0 \approx -\bar{C}c_t + \bar{Y}y_t - \bar{I}i_t \quad (55)$$

$$0 \approx \rho k_{t-1} - y_t + n_t(1 - \rho) + z_t \quad (58)$$

$$0 \approx y_t - \eta c_t - n_t \quad (54)$$

$$0 \approx \rho \frac{\bar{Y}}{\bar{K}}(y_t - k_{t-1}) - \bar{R}r_t \quad (56)$$

$$k_t \approx \delta i_t + (1 - \delta)k_{t-1} \quad (53)$$

$$-\eta c_t \approx E_t[-\eta c_{t+1} + r_{t+1}] \quad (59)$$

$$E_t(z_{t+1}) = \psi z_t \quad (60)$$

Bibliografía

- Campbell, J. (1994), "Inspecting the mechanism: an analytical approach to the stochastic growth model," *Journal of Monetary Economics* Vol. 33, No. 3, pp. 463-506
- Hansen, G.D: (1986): "Indivisible labor and the business cycle," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 16, pp. 309-327.
- Hayashi, F. & Prescott, E. (2002) "The 1990s in Japan: A Lost Decade," *Review of Economic Dynamics*, 206–235
- Hodrick, R. & Prescott, E. (1981) "Post-War U.S. Business cycles: an empirical investigation," *Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA*, Discussion Paper #451
- KIM, Y., Kyoji, F., Tatsuji, M. (2010). "The structural causes of japan's "two lost decades" (japanese). *St. Louis: Federal Reserve Bank of St Louis*.
- Klein, P. (2000): "Solution of a system of linear difference equations (Matlab)," QM&RBC Codes 14a, Quantitative Macroeconomics & Real Business Cycles.
- Klein, P. (2000): "Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24(10), 1405–1423.
- Mian, A. & Sufi, A. (2010): "The Great Recession: Lessons from Microeconomic Data", *American Economic Review: Paper and Proceedings 2010*, 100:2 1-10
- Miyazawa, K. (2012): "Capital utilization in Japan's lost decade: A neoclassical interpretation," *Japan and the World Economy*, Volume 24, 246-253
- Swaine, D. (2008), "Estimating the Speed of Convergence in the Neoclassical Growth Model: An MLE Estimation of Structural Parameters Using the Stochastic Neoclassical Growth Model, Time-Series Data, and the Kalman Filter," *College of Holy Cross, Massachusetts, MA*
- Uhlig, H. (1999) "A toolkit for analysing Non-linear Dynamic Stochastic Model Easily," Marimon and A. Scott, Eds., *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, Oxford University Press, New York, 65-78

