



Universidad Torcuato Di Tella

Departamento de Economía

Licenciatura en Economía

Modelo afín heteroscedástico con factores de riesgo no observables

**Autores: László Mikolás, Ana Magalí Rosenzvit, Catalina Braun
y Camila Araoz de Lamadrid**

Tutor: Martín Solá

Fecha de entrega: 08/18

Introducción

Existe extensa literatura sobre cómo modelar la curva de tasas de interés ya que la misma es fundamental tanto para los mercados financieros como para la política monetaria y la política fiscal. Uno de los modelos más utilizados dentro de esta área son los llamados modelos Afín. La ventaja de este tipo de modelos radica en que no solo nos asegura que no existan posibilidades de arbitraje sino que también son matemáticamente simples y permiten obtener soluciones en forma cerrada para los precios de los bonos. Sin embargo, para lograr esta estructura, el modelo necesita realizar ciertos supuestos. La pregunta es si estos nos llevan a predicciones que se ajustan a los hechos estilizados observados en los datos.

Hay algunos aspectos de estos modelos sobre los cuales aún no existe un consenso en la literatura. Uno de los principales, es la manera de restringir al modelo de modo tal que esté identificado. Este aspecto no es trivial ya que, cambios en la manera de restringir al modelo, generan grandes diferencias en los resultados que se obtienen, en particular cuando analizamos las primas de riesgo.

A su vez, en esta clase de modelos suele asumirse que la volatilidad de las tasas de interés es homocedástica. Sin embargo, existe evidencia de que la curva de las tasas de interés presenta volatilidad heterocedástica y en particular, documentamos que esta depende de la diferencia entre la tasa de interés de largo y corto plazo.

Lo que motiva este análisis es el hecho de que, al no incluir la heterocedasticidad, los excesos de retorno, o sea las primas de riesgo se vean afectadas en sus resultados.

Nuestro objetivo es analizar si la introducción de heterocedasticidad en estos modelos modifica la evolución del exceso de retorno respetando las restricciones mínimas que el modelo necesita para estar identificado. Ahora bien, la heterocedasticidad de las tasas de interés puede ser consecuencia de heterocedasticidad en los errores de medición o de heterocedasticidad en la ecuación de estado. Nosotros seguimos este segundo enfoque. Al hacerlo, ello modifica el modelo Afín de forma que no solo en cada observación se deben cumplir las restricciones de no arbitraje sino que también se cumplan para las recursiones que se

utilizan.

El trabajo prosigue de la siguiente manera: En la sección I repasamos el modelo Afín homocedástico. En la sección II mostramos como restringimos el modelo. En la sección III testeamos la presencia de heterocedasticidad en la volatilidad de las tasas de interés empíricamente. En la sección IV proponemos un modelo Afín que incorpora la heterocedasticidad. En la sección V comparamos los resultados obtenidos con cada modelo. Por último, en la sección VI analizamos la correlación entre la prima de riesgo y ciertas variables macroeconómicas.

Sección I: Modelo Afín del precio de los bonos

Sea X_t el vector ($k \times 1$) de factores de riesgo que resume toda la información que los inversores usan para valorar los bonos de descuento. Estos factores de riesgo evolucionan como una autorregresión vectorial de primer orden

$$X_{t+1} = \mu + \Phi_1 X_t + \Gamma \varepsilon_{t+1} \quad (1)$$

Donde $\varepsilon_{t+1} \sim N(0, I_k)$ y Γ es asumida diagonal. Los factores de riesgo pueden ser observados o no observados. En la implementación del modelo asumimos que son no observables.

Los inversores valoran los flujos de efectivo nominales utilizando el factor de descuento estocástico de un período

$$\ln M_{t+1} = -r_t - \frac{1}{2} \Lambda_t' \Lambda_t - \Lambda_t' e_{t+1} \quad (2)$$

donde $r_t = \delta_0 + \delta_1 X_t$.

El vector ($k \times 1$) Λ_t , conocido como el precio del riesgo, representa la compensación que los inversores demandan para hacer frente a shocks del vector de estado e_{t+1} .

El precio de mercado del riesgo es una función afín de los factores

$$\Lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t \quad (3)$$

Donde λ_0 es un vector ($k \times 1$) y λ_1 es una matriz de dimensión ($k \times k$). El principio de no-arbitraje implica que los precios de los bonos satisfacen la recursión:

$$P_t^{(n)} = E_t(M_{t+1} P_{t+1}^{(n-1)}) \quad (4)$$

Usando argumentos estándar (Ang y Piazzesi, 2003), se puede mostrar que el log de los precios de los bonos, $p_t^{(n)} = \ln P_t^{(n)}$, son funciones afines de los factores de riesgo.

$$p_t^{(n)} = A_n + B_n' X_t \quad (5)$$

Los coeficientes A_n y B_n satisfacen las recursiones

$$A_0 = 0; B_0 = 0$$

$$B_{n+1} = \Phi^* B_n - \delta_1 \quad (6)$$

$$A_{n+1} = A_n + \mu^* B_n + \frac{1}{2} B_n' \Gamma \Gamma' B_n - \delta_0 \quad (7)$$

Donde μ^* y Φ^* están definidos como

$$\mu^* = \mu - \Gamma \lambda_0 \quad (8)$$

$$\Phi^* = \Phi - \Gamma \lambda_1 \quad (9)$$

El rendimiento continuamente compuesto de un bono de descuento de n períodos es por

lo tanto

$$y_t^{(n)} = -p_t^{(n)}/n = a_n + b_n' X_t \quad (10)$$

Con $a_n = -A_n/n$ y $b_n = -B_n/n$

Seccion II: Restricciones al modelo

En esta sección mostraremos qué criterio usamos para restringir λ_0 y λ_1 (parámetros que determinan la estructura del riesgo del modelo) de nuestro modelo Afín. Como mencionamos anteriormente, no existe un consenso en la literatura sobre como imponer las mínimas restricciones necesarias para que el modelo esté identificado. Sin embargo, esta decisión no es inocua ya que distintas restricciones pueden resultar en primas de riesgo muy diferentes.

El criterio que usaremos es elegir un λ tal que Φ^* tenga la misma estructura que en el modelo Afín Nelson y Siegel (AFNS).

En el modelo Afín de Nelson y Siegel existen 3 factores de riesgo no observables denotados como $X_t = \{L_t; S_t; C_t\}$ por su similitud al nivel, la pendiente y la curvatura respectivamente, de la curva de retorno. Los *loading factors* en las ecuaciones de medición son funciones de las restricciones que pongamos en Φ^* y por ende en λ_1

En AFNS el Φ^* toma la siguiente forma:

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\eta} & \eta e^{-\eta} \\ 0 & 0 & e^{-\eta} \end{pmatrix}$$

En nuestro modelo restringimos λ de modo tal que nuestro Φ^* tenga ceros en las mismas posiciones que en la versión Afín de Nelson y Siegel. Lo hacemos de este modo para que los modelos homocedástico y heterocedástico sean comparables. Usamos un modelo similar al Afín Nelson y Siegel para poder agregarle heterocedasticidad y comparar los resultados. La estrategia de identificación que usamos es la siguiente:

Dados

$$\mu^* = \mu - \Gamma\lambda_0 \quad (11)$$

$$\Phi^* = \Phi - \Gamma\lambda_1 \quad (12)$$

y dado que asumimos que Γ es diagonal, obtenemos los ceros de Φ^* consistentes con el Afín Nelson y Siegel del siguiente modo:

$$0 = \Phi_{1,2} - \Gamma_1\lambda_{1,2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\Phi_{1,2}}{\Gamma_1}$$

$$0 = \Phi_{1,3} - \Gamma_1\lambda_{1,3} \Rightarrow \lambda_{1,3} = \frac{\Phi_{1,3}}{\Gamma_1}$$

$$0 = \Phi_{2,1} - \Gamma_2\lambda_{2,1} \Rightarrow \lambda_{2,1} = \frac{\Phi_{2,1}}{\Gamma_2}$$

$$0 = \Phi_{3,1} - \Gamma_3\lambda_{3,1} \Rightarrow \lambda_{3,1} = \frac{\Phi_{3,1}}{\Gamma_3}$$

$$0 = \Phi_{3,2} - \Gamma_3\lambda_{3,2} \Rightarrow \lambda_{3,2} = \frac{\Phi_{3,2}}{\Gamma_3}$$

Además, para que el modelo este identificado además hay que restringir μ^* . Elegimos $\mu^* = (\mu^*, 0, 0)$. De este modo:

$$0 = \lambda_{0(2)} = \frac{\mu_2}{\Gamma_2}$$

$$0 = \lambda_{0(3)} = \frac{\mu_3}{\Gamma_3}$$

Sección III: Análisis de la presencia de heterocedasticidad

Estimamos el modelo sujeto a las restricciones anteriormente especificadas y miramos los resultados del modelo homocedástico para testear la presencia de heterocedasticidad en la volatilidad de las tasas de interés.

Para esto en esta sección testeamos la presencia de heterocedasticidad en la volatilidad

de las tasas de interés utilizando un test de Breusch - Pagan. El test consiste en verificar si los residuos al cuadrado pueden ser explicados por algún regresor. De ser así, esto denota la presencia de heterocedasticidad.

La implementación del test debe hacerse de la siguiente manera: en primer lugar, hay que obtener los residuos de la estimación de un modelo. Luego, elevarlos al cuadrado para tener una estimación de la varianza de los mismos. En último lugar, se debe hacer una regresión auxiliar de la siguiente forma:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2,i} + \dots + \gamma_p X_{p,i} + \eta_i$$

Donde los X_i son las variables independientes observables. El estadístico se calcula como $BP = TR^2$ donde T es el tamaño de la muestra y R^2 es el coeficiente de determinación correspondiente a la regresión auxiliar. Este estadístico se distribuye asintóticamente como χ_{p-1}^2 bajo la hipótesis nula de homocedasticidad.

La volatilidad podría potencialmente depender de múltiples variables. En particular, elegimos una serie de variables que en los datos parecen estar relacionadas con la volatilidad de las tasas de interés. Estas variables son: el valor absoluto del spread de las tasas de interés porque cambios en el mismo pueden predecir booms y recesiones y cambios en la curva de tasas de interés; y la raíz cuadrada del nivel de las tasa de interés siguiendo el modelo Cox-Ingersoll-Ross Model - CIR.

Las regresiones auxiliares realizadas fueron las siguientes:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 |Spread_t| + \xi_t$$

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 |Spread_t| + \alpha_2 \sqrt{r_t} + \mu_t$$

Donde ε_t es el residuo de la estimación del modelo anterior para la madurez de 3 meses en el período t ; $Spread_t$ es el Spread entre la tasa de interés del bono con madurez de 3

meses y el bono con madurez de 120 meses en el período t , y $\sqrt{r_t}$ es la raíz cuadrada de la tasa de interés de la madurez de 120 meses en el período t .

En la Tabla 1 del Apéndice presentamos los resultados de estas regresiones para la tasa de interés con madurez de 3 meses junto con los resultados del test F de significatividad conjunta y el test de Breusch – Pagan.

Podemos observar que el estadístico F es significativo para todas las especificaciones, indicando que se rechaza la hipótesis nula de que todos los γ 's son iguales a 0. A su vez, el test de Breusch y Pagan indica que la hipótesis nula de homocedasticidad puede ser rechazada al 5% de significatividad en todas las especificaciones. Por lo tanto, podemos llegar a la conclusión de que la volatilidad de las tasas de interés no es constante y puede ser explicada por el Spread y la raíz cuadrada del nivel de las tasas de interés.

Como adelantamos, el hecho de que los residuos del modelo Afín tengan heterocedasticidad se puede modelar de dos formas. Asumiendo que los errores de medición son heterocedásticos, o que la ecuación de estado lo es. Esta segunda forma modifica la solución del modelo y afecta directamente las primas de riesgo.

Sección IV: Modelo Afín del precio de los bonos con 3 factores de riesgo heterocedásticos

Dados los resultados de la sección anterior, proponemos el siguiente modelo para incorporar la presencia de heterocedasticidad.

Bajo este modelo la evolución de los factores de riesgo (1) cambia de la siguiente manera para incorporar la heterocedasticidad:

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Gamma_t \varepsilon_{t+1} \tag{13}$$

Donde $\varepsilon_{t+1} \sim N(0, I_k)$.

Los factores de riesgo son no observables y Γ_t es diagonal y función de una variable exógena observable. En particular:

$$\Gamma_{t_{ii}} = \theta_0^i + \theta_1^i z_t$$

donde $i = 1, 2, 3$ y z_t es la fuente de heterocedasticidad

Ahora el precio de los bonos depende de estos factores de riesgo, pero los *loadings* varían en el tiempo:

$$p_t^{(n)} = A_{t,n} + B'_{t,n} X_t \quad (14)$$

Donde se puede probar (ver apéndice) que los coeficientes $A_{t,n}$ y $B_{t,n}$ satisfacen las recursiones

$$A_{t,n} = A_{t,n-1} + (\mu - \Gamma_t \lambda_0)' B_{t,n-1} + \frac{1}{2} B'_{t,n-1} \Gamma_t \Gamma_t' B_{t,n} - \delta_0 \quad (15)$$

$$B_{t,n} = (\Phi - \Gamma_t \lambda_1)' B_{t,n-1} + \frac{1}{2} B'_{t,n-1} - \delta_1 \quad (16)$$

Donde μ_t^* y Φ_t^* están definidos como

$$\mu_t^* = \mu - \Gamma_t \lambda_0 \quad (17)$$

$$\Phi_t^* = \Phi - \Gamma_t \lambda_1 \quad (18)$$

Nótese que las restricciones que incorporamos en el modelo homocedástico ahora deben cumplirse para cada t , pues esta versión varía en el tiempo. El rendimiento de un bono de descuento de n períodos (10) se transforma en:

$$y_t^{(n)} = -p_t^{(n)}/n = a_{n,t} + b'_{n,t} X_t \quad (19)$$

Con $a_{n,t} = -A_{n,t}/n$ y $b_{n,t} = -B_{n,t}/n$

Bajo el paradigma homocedástico hay diversos autores que mostraron que 2 factores de riesgo eran suficientes para explicar la mayor parte de la variación de las tasas de interés y el tercer factor explica solo una parte menor de la volatilidad de las tasas de interés. Sin embargo, en un mundo heterocedástico, esto puede o no ser cierto. Estos resultados son obtenidos cuando los *loadings* (a_n, b_n en este caso) son constantes. La pregunta es cómo cambia ello si estos dependen del tiempo, o sea $a_{n,t}, b_{n,t}$. Por lo tanto estimamos 6 modelos que difieren en la cantidad de factores utilizados (2 o 3 factores) y la especificación de la heterocedasticidad. Tanto para los modelos de 2 factores como de 3 factores estimamos también un modelo homocedástico para utilizar como *benchmark*.

A continuación presentamos una pequeña tabla donde se resumen las principales características de los modelos estudiados:

Modelo	Número de factores	Fuente de la heterocedasticidad
(1)	2	$\sqrt{r_t}$
(2)	2	$ Spread_t $
(3)	2	Homoscedástico
(4)	3	$\sqrt{r_t}$
(5)	3	$ Spread_t $
(6)	3	Homoscedástico

Sección V: Implementación empírica

Datos

Para estimar los modelos utilizamos datos mensuales de tasas de interés del Reino Unido del período 1970-2007 (459 observaciones). Además, utilizamos 17 madureces distintas (3,6,9,12,15,18,21,24,30,36,48,60,72,84,96,108,120 meses). En lo que sigue, n denota el tiempo hasta la madurez en unidades mensuales.

Estimación

Para estimar este modelo en que los 3 factores no son directamente observables se utiliza el método de máxima verosimilitud y el filtro de Kalman. A su vez, utilizamos múltiples métodos numéricos para minimizar la probabilidad de obtener resultados que fueran producto de un máximo local en la función de verosimilitud. A continuación presentamos el sistema estimado en formato estado-espacio:

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Gamma_t \varepsilon_{t+1}$$

$$y_t^{(n)} = a_{t,n} + b'_{t,n} X_t + u_t$$

Donde u_t es un error de medida que se asume diagonal y *iid*.

Resultados

Los modelos que estimamos se pueden dividir a grandes rasgos en 2 grupos. En un primer grupo los de 2 factores y en un segundo grupo los de 3 factores. A su vez, dentro de cada subgrupo se pueden dividir según el supuesto que hacemos sobre la varianza de la variable de estado.

Dentro del primer grupo (los de 2 factores) los modelos (1) y (2) alcanzaron una verosimil-

itud de 55453 y 55782 respectivamente. Mientras que el modelo (3), el *benchmark*, de los modelos de 2 factores alcanzó un valor de 55122.

En el segundo grupo (3 factores) los modelos (4) y (5) alcanzaron una verosimilitud de 60200 y 60286 respectivamente, mientras que el modelo (6), el *benchmark*, de los modelos de 3 factores alcanzó un *likelihood* de 59754. A la luz de estos resultados podemos observar que el modelo (5) es que logró el mayor valor de verosimilitud entre los modelos analizados. La diferencia de *likelihood* entre los modelos de 2 factores y de 3 factores es tan grande que nos indica que el modelo de tres factores es claramente superior (utilizando cualquier criterio de información) para explicar la curva de rendimientos.

Dentro de los modelos de tres factores descartamos el modelo (4) ya que para la heterocedasticidad elegida solo el nivel logra rechazar la hipótesis nula de que la volatilidad es homocedástica y es dominado por el modelo (5) usando criterios de información.

Dado que para el modelo (5) encontramos que el $|Spread_t|$ explica la volatilidad utilizando tests individuales, procedemos a implementar un *likelihood* ratio test entre los modelos (5) y (6) para evaluar si se puede rechazar conjuntamente que los parámetros que entran en la volatilidad heterocedástica (θ) son iguales a cero. La implementación del test consiste en construir el siguiente estadístico:

$$D = 2 \ln \left[\frac{\text{likelihood del modelo general (heterocedástico)}}{\text{likelihood del modelo restricto (homocedástico)}} \right]$$

Bajo la H_0 esta distribuido chi cuadrado con 3 grados de libertad, $D \sim \chi^2_{(3)}$ donde:

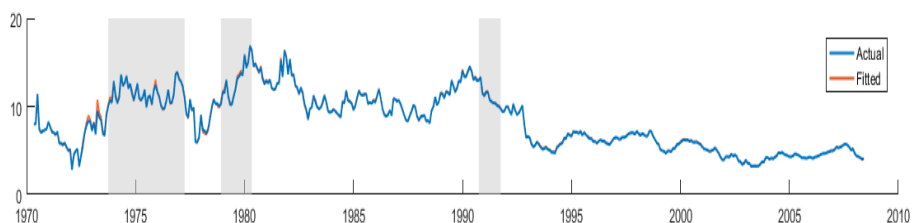
$$D = 2 * (60286 - 59754) = 1064$$

Por lo que el p-valor del test es 2.3505e-230. Esto implica que rechazamos el modelo (6) en favor del modelo (5).

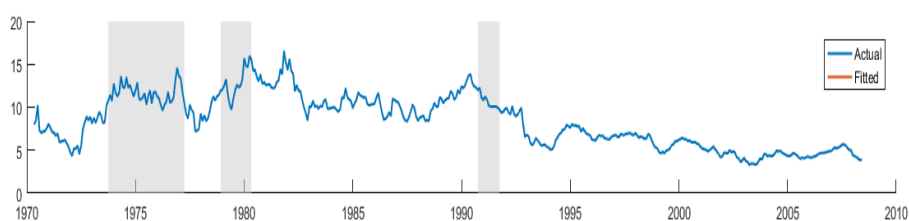
A partir de los resultados presentados anteriormente podemos concluir que el modelo de 3 factores heterocedástico es el que mejor representa los datos y, por lo tanto, es aquel que

utilizamos para evaluar la prima de riesgo.

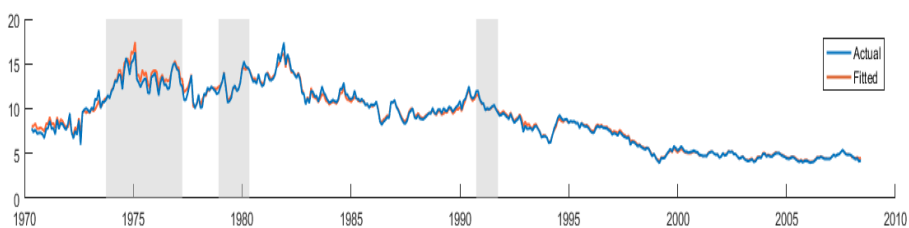
A continuación presentamos los gráficos de las madureces de 12, 24 y 120 meses observadas en los datos y sus valores estimados con el modelo (5). A su vez, señalamos con un sombreado gris las recesiones del Reino Unido presentes en nuestra muestra.



(a) Madurez de 12 meses: datos y valores estimados



(b) Madurez de 24 meses: datos y valores estimados



(c) Madurez de 120 meses: datos y valores estimados

Figure 1: Datos de tasas de interés y tasas de interés estimadas para madureces de 12, 24 y 120 meses

En la figura 1 se puede observar que el modelo (5) logra un buen fit a tal punto que difícilmente se pueden distinguir los datos de los valores obtenidos con el modelo. Solo en los bonos de muy largo plazo podemos notar con mayor nitidez la diferencia entre los mismos, siendo este un resultado esperable.

Prima de riesgo de mantener un bono por más de un período

Una de las conclusiones mas importantes cuando estimamos este tipo de modelos es analizar las primas de riesgo que se desprenden del mismo.

Existen varias formas de tipificarlas, una de ellas es:

$$E_t p_{t+1}^{(n-1)} - p_t^{(n)} - i_t \quad (20)$$

donde i_t es la tasa de interes de un periodo ($\tau = 1$) y se puede mostrar que:

$$E_t p_{t+1}^{(n-1)} - p_t^{(n)} - i_t = -\frac{1}{2} B'_{n-1,t} \Gamma_t \Gamma'_t B_{n-1,t} + B'_{n-1,t} \Gamma_t \Lambda_t$$

Si bien mostramos que de los dos modelos, el heterocedástico es favorecido por los datos, la importancia económica de este resultado se puede apreciar al:

1. Observar la diferencia de las primas de riesgo de los modelos (5) y (6)
2. Observar la evolución de los *loadings* en el tiempo para ver si estos varían y en los periodos que sucede (en el modelo (6) son constantes)

A continuación presentamos gráficos de la diferencia del exceso de retorno estimado para tasas de interés de 12, 24 y 120 meses de madurez entre los modelo (5) y (6) respectivamente:

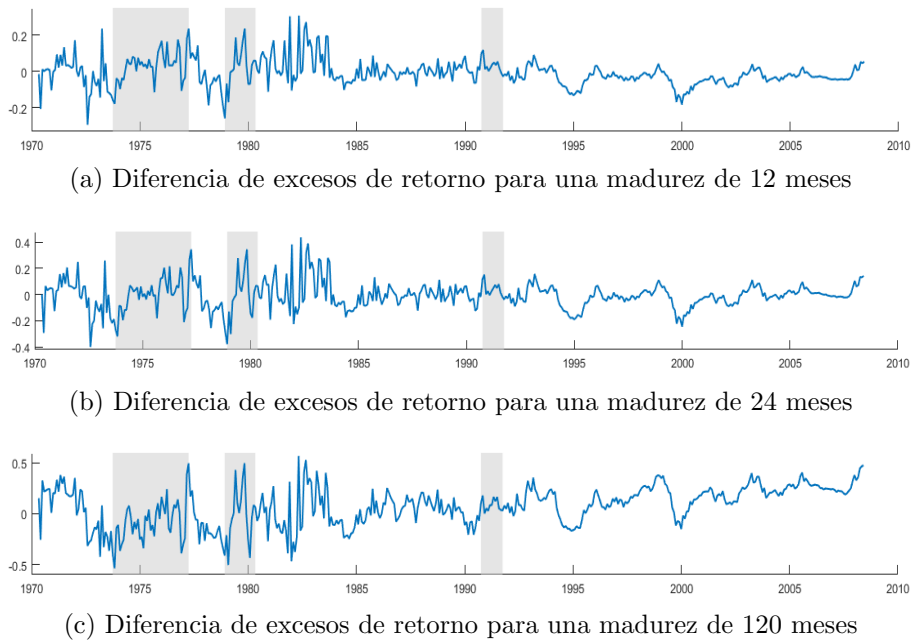
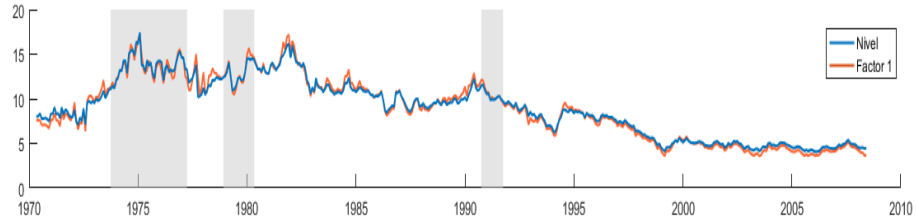


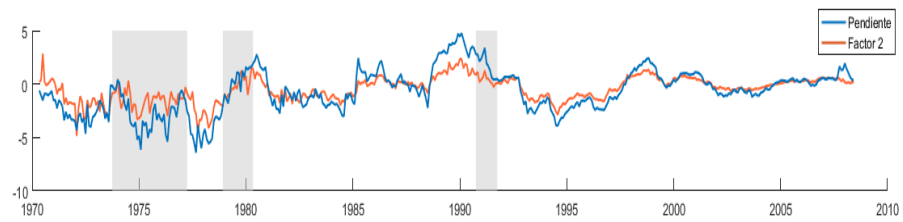
Figure 2: Diferencias de excesos de retorno entre los modelos (5) y (6)

En los gráficos anteriores, puede observarse que para las madureces de 12, 24 y 120 meses las primas de riesgo obtenidas en el modelo heteroscedástico presentan diferencias con respecto al modelo homoscedástico. A su vez, estas diferencias fluctúan considerablemente en el tiempo. Por lo tanto, parecería ser que aumentar la flexibilidad del modelo AFNS dejando que los *loadings* cambien el tiempo al abandonar el supuesto de homocedasticidad permite capturar información adicional relevante y por ende proveer una mejor representación de dicho riesgo.

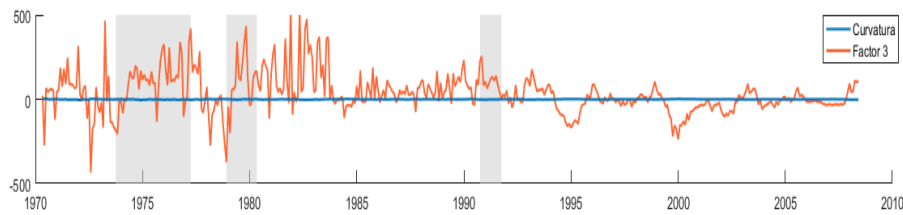
A continuación presentamos gráficos los factores no observables estimados comparados con el nivel, la pendiente y la curvatura de la curva de tasas de interés construidas de los datos:



(a) Primer factor latente estimado y el nivel de la curva de tasas de interés



(b) Segundo factor latente estimado y la pendiente de la curva de tasas de interés

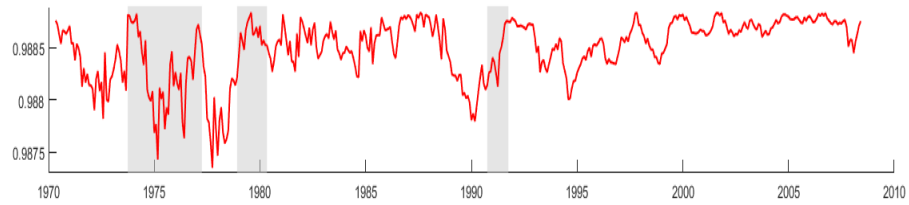


(c) tercer factor latente estimado y la curvatura de la curva de tasas de interés

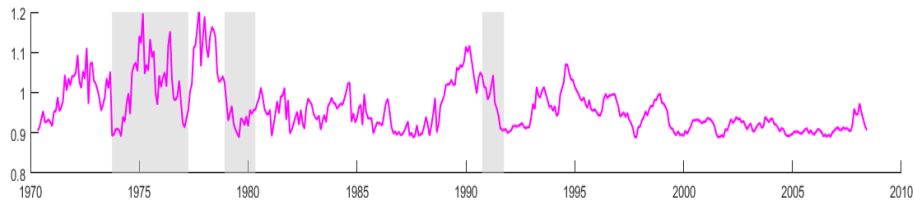
Figure 3: Evolución de los tres factores latentes comparados con el nivel, la pendiente y la curvatura

Podemos observar que los primeros dos factores parecen estar relacionados al nivel y la pendiente de la tasa de interés estimada de los datos, mientras que el tercer factor no parece estar relacionado con la curvatura. Sin embargo, veremos más adelante que el *loading* de este factor es muy pequeño y varía en el tiempo.

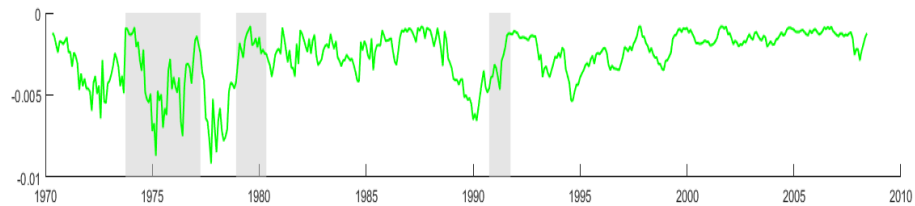
Con respecto a la evolución de los *loadings* de los tres factores latentes, a continuación presentamos su evolución a través de toda la muestra para una madurez de 24 meses:



(a) *Loadings* del primer factor para una madurez de 24 meses a lo largo del tiempo



(b) *Loadings* del segundo factor para una madurez de 24 meses a lo largo del tiempo

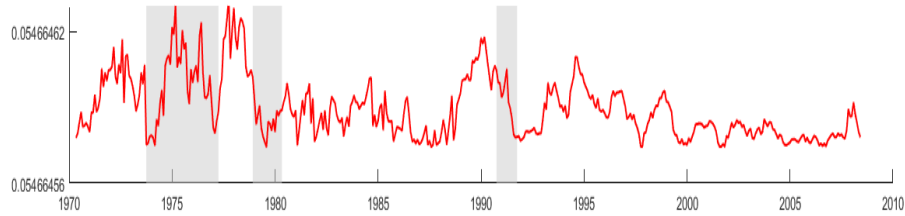


(c) *Loadings* del tercer factor para una madurez de 24 meses a lo largo del tiempo

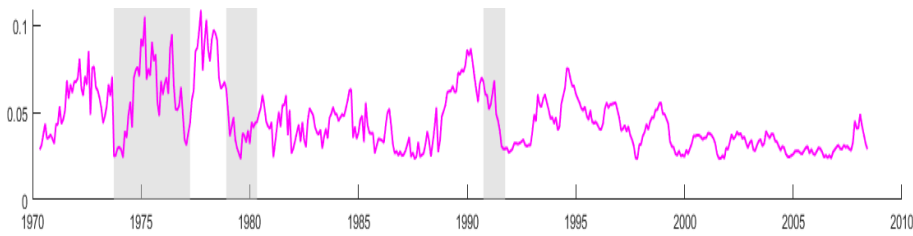
Figure 4: Evolución de los *loadings* de los tres factores latentes a través del tiempo para una madurez de 24 meses

En la figura anterior podemos observar que los *loadings* de los tres factores no observables presentan fluctuaciones a lo largo del tiempo, mientras que en el modelo homoscedástico son constantes. A su vez, es importante destacar que el *loadings* del tercer factor es muy cercano a 0 a lo largo de toda la muestra. Por lo tanto, el bajo ajuste observado en el panel (c) de la figura 3 no genera graves perjuicios en el resto del modelo.

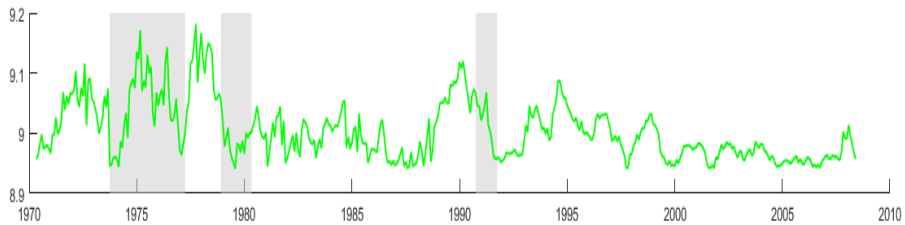
A continuación también presentamos la evolución de la volatilidad de los factores no observables a lo largo del tiempo y nuevamente señalamos con un sombreado gris los períodos recesivos:



(a) Volatilidad del primer factor a lo largo del tiempo



(b) Volatilidad del segundo factor a lo largo del tiempo



(c) Volatilidad del tercer factor a lo largo del tiempo

Figure 5: Evolución de las volatilidades de los tres factores latentes a través del tiempo.

En los gráficos anteriores podemos observar que la volatilidad de los factores latentes presenta fluctuaciones en el tiempo. En particular, se puede destacar el aumento de la volatilidad durante el período recesivo de 1973-1976. Este resultado también apoya el uso de un modelo heteroscedástico.

En último lugar, presentamos los gráficos de las primas de riesgo calculadas a partir del modelo (5) para las madureces de 12, 24 y 120 meses respectivamente. Señalamos con un sombreado gris los periodos de recesiones en el Reino Unido.

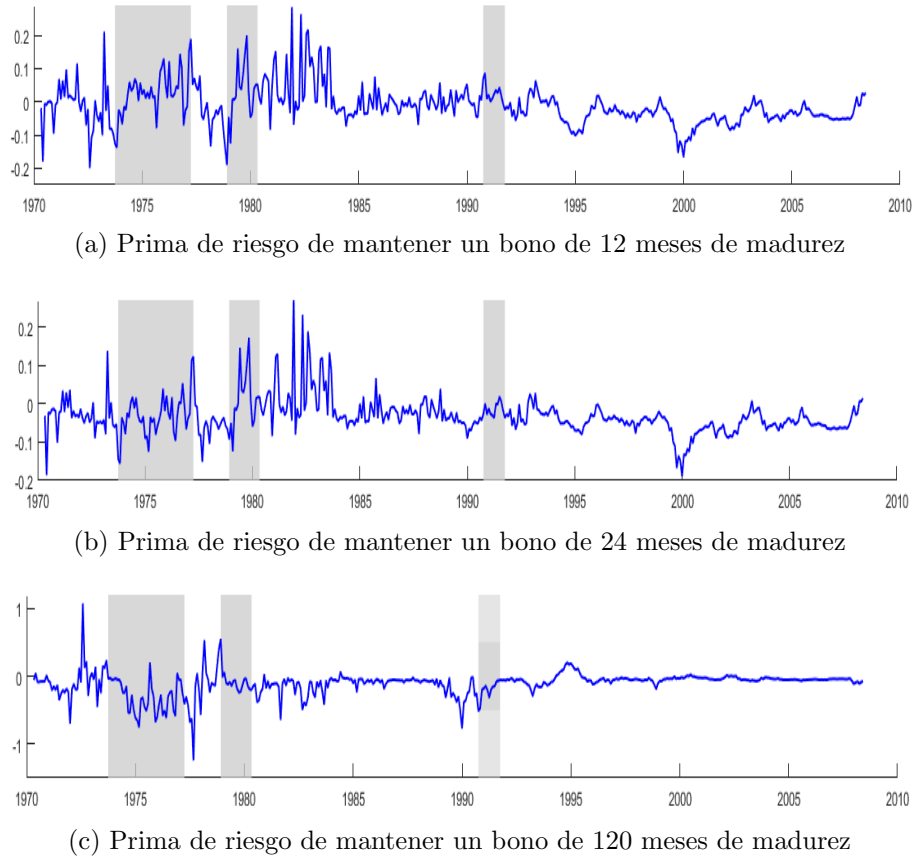


Figure 6: Primas de riesgo obtenidas a partir del modelo (5) para madureces de 12, 24 y 120 meses respectivamente.

Sección VI: Prima de riesgo y variables macroeconómicas

Existe una vasta literatura que relaciona a las primas de riesgo de las tasas de interés con algunas variables macroeconómicas. Muchas veces surge la pregunta de si las primas de riesgo son predichas por estas variables macroeconómicas. Nuestro objetivo en esta sección es analizar la presencia de estas relaciones en nuestros datos.

Para ello, obtuvimos datos trimestrales para el PBI real, la inversión real y el consumo real del Reino Unido en el período 1970-2007. Dada la alta frecuencia de las observaciones de estas variables, hay presente en las series de tiempo una gran cantidad de ruido que podría generar distorsiones en nuestro análisis. Por lo tanto, para poder reducirlo, tomamos las

tasas de crecimiento anual de las variables macroeconómicas mencionadas anteriormente. Luego, analizamos las correlaciones entre éstas con rezagos y adelantos (*leads*) de 5 períodos y las primas de riesgo estimadas con el modelo (5) descrito en la sección anterior.

En lo que sigue no se presentarán tests de significatividad dado que estamos trabajando con una variable generada (la prima de riesgo) y, por lo tanto, estos carecerían de validez. Sin embargo, seguiremos la línea de la literatura de ciclos reales donde se analiza de todas formas la predictabilidad (aunque no en un sentido estricto) de las variables macroeconómicas sobre las primas de riesgo.

A continuación presentamos los gráficos obtenidos de las correlaciones entre las primas de riesgo estimadas para una madurez de 12 meses y las variables macroeconómicas analizadas:

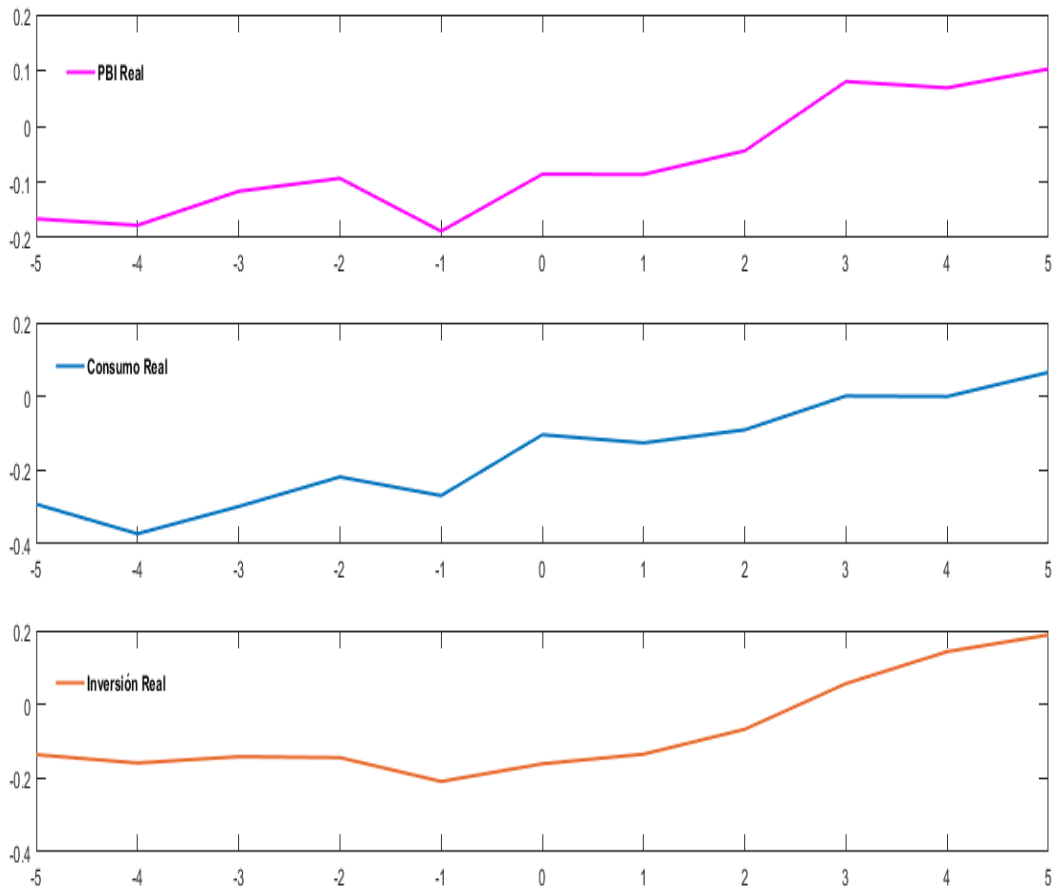


Figure 7: Correlaciones entre las primas de riesgo estimadas para una madurez de 12 meses y variables macroeconómicas

En la figura anterior podemos observar que las correlaciones entre la prima de riesgo y la tasa de crecimiento del PBI real, el consumo real y la inversión real son negativas para la mayoría de *lags* y *leads* analizados. A su vez, podemos notar que en todos los casos, salvo para la inversión, el valor absoluto de las correlaciones cae a medida que consideramos *leads* cada vez mayores.

Esta observación está en línea con parte de la literatura que encuentra, utilizando métodos de Análisis Dinámico de Factores (*Dynamic Factor Analysis*), que conjuntos de variables macroeconómicas reales tienen poder predictivo sobre los excesos de retorno futuros de los bonos (Ludvigson y Ng, 2009).

Por ejemplo, se puede observar que la correlación entre la tasa de crecimiento del PBI real rezagado y la prima de riesgo de una madurez de 12 meses es negativa, es decir, las primas de riesgo tienen un comportamiento contracíclico. Esta observación es consistente con los resultados arrojados por modelos donde los agentes son aversos al riesgo y, por lo tanto, exigirán mayores retornos para ser compensados por el riesgo de que comience un período recesivo. En la Figura 4 de la sección anterior puede observarse que para las madureces de 12 y 24 meses la prima de riesgo aumenta en los períodos recesivos de 1973-1976, 1978-1980 y 1990-1991.

En segundo lugar, encontramos que las correlaciones entre la tasa de crecimiento del consumo rezagadas y las primas de riesgo presentan un comportamiento similar. Esta observación está en línea con los resultados de Wu y Creal (2015) quienes presentan un modelo donde la evolución de la prima de riesgo a lo largo del tiempo está relacionada con la tasa de crecimiento del consumo a través de shocks a las preferencias.

En su trabajo estos autores, permiten variar el grado de impaciencia (factor de descuento) y aversión al riesgo de los agentes económicos. Luego, en las recesiones, los agentes pueden volverse más impacientes. Esto generará un aumento del consumo corriente y, por lo tanto, una caída en las tenencias de activos financieros que, de esta manera, presentarán mayores retornos. Otra de las posibilidades es que, en momentos donde aumenta el riesgo de que

comience una recesión, aumentará la aversión al riesgo de los agentes y, por lo tanto, se producirá un aumento en los retornos exigidos por estos a los activos financieros.

En último lugar, también encontramos que la tasa de crecimiento rezagada de la inversión real tiene una correlación negativa con la prima de riesgo para la madurez de 12 meses. Esto se condice con los resultados de múltiples modelos de crecimiento económico. En éstos, por un argumento de no arbitraje, el rendimiento de una inversión en instrumentos financieros o en acumulación de capital físico deben tener el mismo rendimiento en equilibrio.

Por lo tanto, es de esperar que la caída de la tasa de acumulación de capital en períodos recesivos estará asociado a un aumento de los rendimientos de una inversión en el sector real como sucede en múltiples modelos de crecimiento económico. Luego, si no hay posibilidades de arbitraje, el rendimiento de una inversión en el mercado financiero también debe aumentar en estos contextos.

Conclusión

Este trabajo investiga la presencia de heterocedasticidad en la curva de tasas de interés. Encontramos evidencia de que la volatilidad de las mismas no es constante y que depende del spread de la curva de tasas de interés.

Propusimos un modelo Afín de tres factores y notamos que los excesos de retorno resultantes de nuestro modelo (5) heteroscedástico, presentaba importantes diferencias con el *benchmark* homoscedástico a lo largo del tiempo. El likelihood ratio test realizado en la Sección 4 brinda evidencia de que el modelo homocedástico de 3 factores es rechazado por los datos.

Encontramos que tanto los *loadings* como la volatilidad de los factores no observables presentan una variabilidad considerable a lo largo del tiempo. Este hecho también sugiere que puede ser conveniente extender a los modelos afines tradicionales incorporando la presencia de heterocedasticidad en la ecuación de estado como se hizo en este trabajo

A su vez, encontramos que las correlaciones entre la tasa de crecimiento anual del PBI real, el consumo real, la inversión real y la prima de riesgo estimada para una madurez de 12 meses presentan, en general, un comportamiento que está en línea con los trabajos de múltiples autores. En particular, encontramos que la correlación entre la tasa de crecimiento del PBI real y la prima de riesgo es negativa. Este resultado señala que la prima de riesgo tiene un comportamiento contracíclico indicando que los inversores demandarán un mayor retorno a medida que aumente el riesgo de que comience un período recesivo.

Por lo tanto, incorporar la presencia de heterocedasticidad en modelos afines de la curva de tasas de interés no solo es importante desde el punto de vista estadístico, sino que permite llegar a conclusiones relevantes desde el punto de vista económico. La prima de riesgo que utilicemos en cualquier análisis no debe provenir de un modelo que es rechazado por los datos como sucede típicamente en el modelo afín homocedástico.

Para concluir, podemos decir que el modelo que construimos nos lleva a mejores predicciones e impone las restricciones mínimas necesarias para estar identificado. Este resultado es de utilidad a la hora de estimar el riesgo de los bonos ya que no solo muestra la existencia de heterocedasticidad sino que captura la dependencia de futuros excesos de retorno a la diferencia de tasas de interés de corto y largo plazo.

Bibliografía

- Christensen, Jens H.E., Francis X. Diebold, and Glenn D. Rudebusch (2011): “The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models” *Journal of Econometrics*, 164 (1), 4–20
- Christensen, Jens, Jose Lopez, and Glenn Rudebusch (2010): “Inflation Expectations and Risk Premiums in an Arbitrage-Free Model of Nominal and Real Bond Yields” *Journal of Money, Credit and Banking*, 2010, 42 (s1), 143–178
- Dai, Qiang and Kenneth J. Singleton (2000): “Specification Analysis of Affine Term Structure Models”, *Journal of Finance*, 55 (5), 1943–1978
- Diebold, Francis X. and Canlin Li (2006): “Forecasting the term structure of government bond yields” *Journal of Econometrics*, 130 (2), 337–364
- Glenn D. Rudebusch (2012): ”Yield Curve Modeling and Forecasting: The Dynamic Nelson-Siegel Approach”, In *Economics Books, Princeton University Press*
- Gürkaynak, Refet S. and Jonathan H. Wright (2012): “Macroeconomics and the Term Structure”, *Journal of Economic Literature*, 50 (2), 331–367
- Nelson, Charles R and Andrew F Siegel (1987): “Parsimonious Modeling of Yield Curves”, *The Journal of Business*, 60 (4), 473–89
- Ng, S. y Ludvigson, S. C. (2009):”Macro Factors in Bond Risk Premia”, *Review of Financial Studies*, 22(12), 5027-5067

Apéndice

Apéndice 1: resultados de tests de heterocedasticidad

Table 1: resultados para las ecuaciones de la sección III. Los p-valores se presentan entre paréntesis

	Ecuación 1	Ecuación 2
$ Spread_t $	0.00021542 (0.0408)	6.4142e-05 (0.57674)
$\sqrt{r_t}$	-	4.1345e-05 (1.7181e-07)
F-Statistic	4.21 (0.0409)	16.3 (1.42e-07)
Breusch-Pagan	4.13 (0.04)	30.66 (2.1992e-07)

Apéndice 2: derivación de recursiones de $A_{t,n}$ y $B_{t,n}$

Dada la condición de no arbitraje $P_t^{(n)} = E_t(M_{t+1}P_{t+1}^{(n-1)})$ con $P_t^{(n)} = A_{n,t} + B'_{n,t}X_t$:

$$\begin{aligned}
 e^{A_{t,n} + B'_{t,n}X_t} &= E_t(e^{-\delta_0 - \delta_1 X_t - \frac{1}{2}\Lambda'_t \Lambda_t - \Lambda'_t \varepsilon_{t+1}} e^{A_{n-1,t} + B'_{n-1,t}X_{t+1}}) \\
 &= E_t(e^{-\delta_0 - \delta_1 X_t - \frac{1}{2}\Lambda'_t \Lambda_t - \Lambda'_t \varepsilon_{t+1}} e^{A_{n-1,t} + B'_{n-1,t}(\mu + \Phi_1 X_t + \Gamma_t \varepsilon_{t+1})}) \\
 &= e^{-\delta_0 - \delta_1 X_t - \frac{1}{2}\Lambda'_t \Lambda_t + A_{n-1,t} + B'_{n-1,t}(\mu + \Phi_1 X_t)} E_t(e^{(B'_{n-1,t} \Gamma_t - \Lambda'_t) \varepsilon_{t+1}}) \\
 &= e^{-\delta_0 - \delta_1 X_t - \frac{1}{2}\Lambda'_t \Lambda_t + A_{n-1,t} + B'_{n-1,t}(\mu + \Phi_1 X_t)} e^{\frac{1}{2}B'_{n-1,t+1} \Gamma_t \Gamma'_t B_{n-1,t} - B'_{n-1,t} \Gamma_t \Lambda_t + \frac{1}{2}\Lambda'_t \Lambda_t} \\
 &= e^{-\delta_0 - \delta_1 X_t + A_{n-1,t} + B'_{n-1,t}(\mu + \Phi_1 X_t) + \frac{1}{2}B'_{n-1,t+1} \Gamma_t \Gamma'_t B_{n-1,t} - B'_{n-1,t} \Gamma_t (\lambda_0 + \lambda_1 X_t)} \\
 &= e^{-\delta_0 - \delta_1 X_t + A_{n-1,t} + B'_{n-1,t}(\mu + \Phi_1 X_t) + B'_{n-1,t}(\Phi_1 - \Gamma_t \lambda_1) X_t + \frac{1}{2}B'_{n-1,t} \Gamma_t \Gamma'_t B_{n-1,t}}
 \end{aligned}$$

Apéndice 3: resultados para los modelos (5) y (6)

Modelo (6): benchmark homoscedástico

$$\begin{array}{ccc}
 \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Gamma} \\
 \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0012 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.9725 & -0.2707 & -0.0013 \\ -0.0028 & 0.9504 & 0.0001 \\ -3.9779 & -9.5678 & 0.4454 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0525 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Modelo (5): modelo heteroscedástico elegido

$$\begin{array}{ccc}
 \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\Phi} \\
 \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0174 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.09 & 0.323 & -0.0009 \\ -0.004 & 1.01 & -0.0004 \\ -0.43 & 2.26 & 0.5922 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \boldsymbol{\Gamma}_t(\text{x } 1000) & \\
 \begin{bmatrix} e^{-03} * 0.55 + 0.01 * |Spread_t| & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 + 0.16 * |Spread_t| & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 + 0.39 * |Spread_t| \end{bmatrix} & &
 \end{array}$$

Apéndice 4: correlaciones con variables macroeconómicas

Table 2: Correlaciones con variables macroeconómicas

Lags y Leads	PBI Real	Consumo Real	Inversión Real
-5	-0.1662	-0.2924	-0.1364
-4	-0.1777	-0.3724	-0.1590
-3	-0.1168	-0.2985	-0.1417
-2	-0.0935	-0.2184	-0.1443
-1	-0.1883	-0.2690	-0.2089
0	-0.0861	-0.1040	-0.1612
1	-0.0865	-0.1261	-0.1350
2	-0.0442	-0.0906	-0.0675
3	0.0801	0.0012	0.0565
4	0.0688	-0.0002	0.1431
5	0.1027	0.0651	0.1884